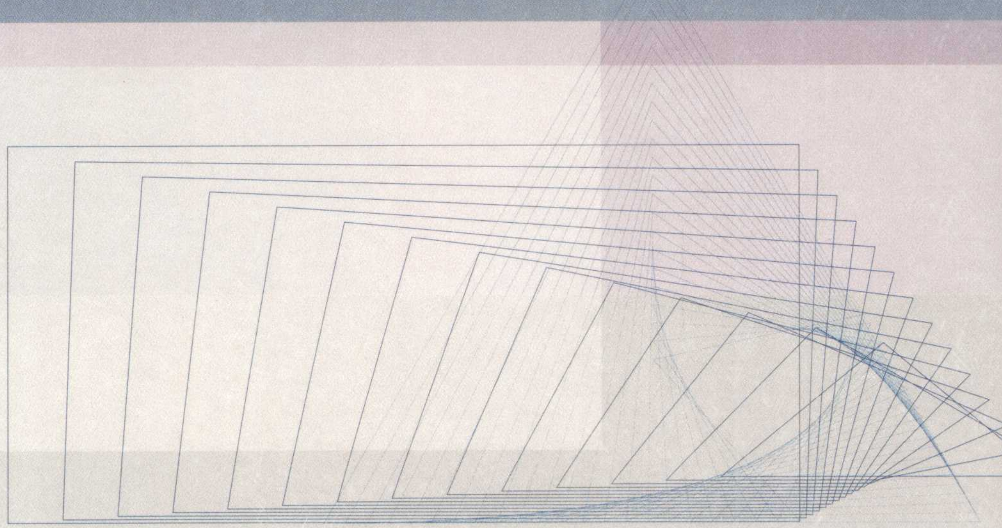
变分法及其应用

物理、力学、工程中的经典建模

欧斐君　编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

变分法及其应用

物理、力学、工程中的经典建模

欧斐君 编著

BIANFENFA JIQI YINGYONG

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

变分法是研究泛函极值问题的一门科学，是古典数学的一个分支。

本书共分六章。第一章介绍泛函分析的一些基本概念和符号；第二章、第三章提出四个古典的变分模型，讨论泛函取得极值的必要条件、各种形式的欧拉方程、条件变分、一阶变分的一般形式、自然边界条件、变动边界与横截条件；第四章介绍物理学、力学中的变分原理，二次泛函极小与特征值的关系，正定算子的极小泛函；第五章介绍变分学中的直接方法；第六章介绍极值的充分条件。

本书可作为应用数学、应用物理及应用力学等专业本科生、研究生的教材，也可作为科技工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

变分法及其应用：物理、力学、工程中的经典建模 / 欧斐君编著. --北京：高等教育出版社，2013.2

ISBN 978-7-04-036556-6

Ⅰ.①变… Ⅱ.①欧… Ⅲ.①变分法-高等教育-教材 Ⅳ.①O176

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 303573 号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 田 玲　封面设计 王 雎　版式设计 王艳红
插图绘制 黄建英　责任校对 刘丽娴　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13	版　　次	2013年2月第1版
字　　数	240 千字	印　　次	2013年2月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	22.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　36556-00

序

历史上很早就有人发现，自然界中有很多现象，例如物体的平衡和运动过程的稳定等都可以归结为某种极值模型。微积分产生后，对这类问题的研究就形成了一门新的学科——变分法。

由于极值模型得到日益广泛的应用，并且人们发现它和数学中另一个重要的分支——微分方程有极为深刻的联系，所以在 20 世纪它成为一些大学的选修课程。

曾受教于知名数学家柯朗(R. Courant)的我国数学教育家朱公谨教授就是在国内最早开设这门课程的先行者之一，本书作者曾亲聆朱先生的讲授。1980 年以后，作者在西安交通大学为理工科学生多次开设变分法选修课，期间还参与并指导了学生的数学建模活动。本书是他在这些工作的基础上，经过多年酝酿和准备才脱稿的，其特色是除了介绍变分法本身的内容外，还结合了古典极值模型的数学建模问题。内容深入浅出，除了古典变分法的基本内容外，还适当介绍了有重要应用的直接方法，因此在应用上及理论上都有一定的广度和深度。

这本教材适合于大学非数学类专业的大学生、研究生的选修课使用。

萧树铁

2012 年 1 月于清华园

前言

20世纪80年代，我开始在西安交通大学给应用数学、应用力学、应用物理专业的学生讲授变分法。与之同时，萧树铁教授在全国高校推广数学建模。是萧先生带我走上数模之路，以后我也把数学建模作为学习、教学与研究的方向。1986年，我在西安交通大学筹办了“第二期全国数模教师培训班”；1988年，在南华大学筹办了“全国数学模型教学经验交流会”；1991年8月，又在张家界筹办了“全国数学建模学术会议”。2011年12月22日，我作为特邀代表，出席了在北京人民大会堂召开的“全国大学生数学建模竞赛20周年庆典暨2011‘高教社杯’颁奖仪式”，遂激励我把在高校教书到70岁的心得写书成册。

在经济建设中，常常会遇到这样一类问题，在一定条件下，怎样设计制造产品，使其用料最省，或成本最低，或投资最小等。在自然现象中，也存在着许多极值规律。例如，光在通过介质的光路时，使其所需时间最小(费马原理)；物体在它所容许的位置中，将自然地处于使其势能为最小的位置(最小势能原理)等。这些都是极值问题。极值问题的研究十分重要，它一直是推动数学、物理、力学发展的主要动力。

变分法是研究极值的重要理论与方法，然而它的研究对象与微分学不一样，变分法是研究泛函的极值。

在自然科学中，变分法的应用极为广泛。一方面，它常用来推导描述自然现象的控制微分方程；另一方面，物理、力学中的多种变分原理的发展，使变分原理本身已成为某些学科理论的组成部分。值得指出的是变分法在计算方法中的应用。20世纪开创的变分法的直接方法有里茨方法与伽辽金方法等，到1943年由柯朗创立、50年代首先由建筑结构工程师使用的有限元方法，已成为重要的计算方法，而有限元的数学基础是变分法。

本书共分六章。第一章简单介绍泛函分析的基本概念；第二、三章介绍变分法的四个经典模型及基本理论、各种形式的欧拉方程、条件变分、一阶变分的一般形式、自然边界条件、变动边界与横截条件；第四章介绍费马原理、哈密顿原理、最小势能原理、二次泛函的极小与特征值问题的关系、正定算子的极小泛函；第五章介绍变分法的直接方法：里茨方法、伽辽金方法、半解析方法；第六章介绍变分法极值的充分条件。全书各章配有习题，并附有参考答案。

在编写本书时，既注意详细叙述变分法的基本理论，同时也注重变分法的应用。物理、力学、工程中的经典建模，就是用物理、力学中的定律、原理来建模。经典建模现今在航天、建筑、桥梁、动力机械、工程中仍有广泛应用。

本书可作为应用数学、应用物理、应用力学等专业的教材，也可以作为教师、大学生、研究生、科技工作者的参考书。部分章节附有“ * ”号，阅读时可以跳过，不会影响对后面的理解。

由于水平有限，不妥之处在所难免，恳请指正。

中国科学技术大学博士生导师徐森林教授评审了本书，非常仔细，并提出了宝贵的意见；在编写本书时，也得到南华大学廖定基教授的帮助。作者在此一并表示感谢！对夫人梁瑞芳副教授的帮助与支持，亦表示敬意。

欧斐君

2012 年 5 月于南华大学

目 录

第一章 预备知识

§1.1 n 维向量与无穷维向量[①]

变分法是个古老的数学分支. 它所研究的对象,用现在的数学术语来说,是泛函的极值问题,而泛函分析是19世纪初发展起来的一门数学学科,现今已渗入到工程技术、自然科学的许多领域. 因此,在这一章先简略地介绍泛函分析的一些最基本的概念和记号,目的是在后面叙述变分法的理论时采用它们. 在本章中,我们准备采用对比的方法,用大家熟知的 n 维向量来引出无穷维向量,用线性代数的基本概念来介绍泛函分析的基本概念.

把 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 叫做一个 n 维行向量,记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

设无穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2<\infty,$$

把这些数所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ 称为一个无穷维行向量,记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots).$$

设 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是另一 n 维行向量.

设 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)$ 是另一个无穷维行向量 $\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2<\infty\right)$.

约定两个 n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),$$

差为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n),$$

数 α 乘 n 维向量为

$$\alpha\boldsymbol{A}=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n),$$

约定无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n,\cdots),$$

差为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n,\cdots),$$

数 α 乘无穷维向量为

$$\alpha\boldsymbol{A}=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n,\cdots),$$

---

① 这里仅以行向量为例,对列向量同样成立.

n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 的范数(即模)为

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})},$$

n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的交角的余弦为

$$\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \frac{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})}\sqrt{(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}.$$

若两个 n 维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$,则称向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交.

n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的全体称为 n 维向量空间 V_n,

$$V_n = \left\{ \boldsymbol{X} \,\middle|\, \begin{array}{l} \boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n \end{array} \right\},$$

其中 $\mathbf{R}$ 表示实数集合.

无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i,$$

无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 的范数(即模)为

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} = \sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})},$$

无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 交角的余弦为

$$\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \frac{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})}\sqrt{(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}}.$$

若两个无穷维向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$,则称向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交.

无穷维向量 $\boldsymbol{X}$ 的全体称为无穷维向量空间 l^2,

$$l^2 = \left\{ \boldsymbol{X} \,\middle|\, \begin{array}{l} \boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n, \cdots), \\ x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots, \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \end{array} \right\}.$$

我们用形式逻辑的办法把 n 维行向量推广到无穷维向量时,条件 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ 起了重要的作用,它保证了无穷维向量的范数有意义. 根据柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right),$$

不难说明这样定义的内积也有意义. 如果把柯西不等式改写为

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}} \leqslant 1,$$

注意到内积与范数的定义,可知这样定义的两个无穷维向量交角的余弦是合理的.

希尔伯特(Hilbert)在研究积分方程时最先引入 l^2 空间,很多理论问题与实际问题都可以归结到对 l^2 空间的研究.

§1.2 函数空间

设 $f(t)$ 是定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,取分点

$$t_i = a + i\Delta t \quad (i = 1,2,\cdots, n),$$

$\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$,依次用 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 表示函数 $f(t)$ 在这些分点上的函数值,把 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 当作 n 维空间的向量 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 的分量,这样一来函数 $f(t)$ 就对应于向量 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$,令 $n\to\infty$ 时,$f(t)$ 就对应着一个无穷维向量. 因此,我们把函数 $f(t)$ 看作一个向量,它的分量就是 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上的函数值,仍然用 $f(t)$ 表示.

我们知道,n 维空间 V_n 的两个向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$,无穷维空间 l^2 的两向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$. 对于连续变量,积分起着求和的作用. 因此,定义在 $[a,b]$ 上的两个函数(向量)$x(t)$ 与 $y(t)$ 的内积为

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t^{①}, \tag{2.1}$$

显然,内积满足以下性质:

(1) $(x,y) = (y,x)$;

(2) $(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$;

(3) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$;

(4) $(x,x) > 0$,当 $x\neq 0$ 时;$(x,x) = 0$,当 $x\equiv 0$ 时.

类似地,定义函数 $x(t)$ 的范数(函数"长度"概念的抽象)为

$$\| x(t) \| = \sqrt{(x,x)} = \left\{\int_a^b x(t)x(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}. \tag{2.2}$$

非零连续函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 间的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\| x(t) \| \; \| y(t) \|}$$

---

① 要求某种意义下的积分有意义,例如黎曼(Riemann)意义下的积分或勒贝格(Lebesgue)意义下的积分.

$$= \frac{\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t}{\left\{\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}}. \tag{2.3}$$

若函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 满足条件

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{2.4}$$

则称函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 正交.

两个 n 维向量 $\boldsymbol{A}=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_1,\cdots,b_n)$ 之间的距离为

$$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2} = \sqrt{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})}.$$

两个函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的距离规定为它们之差的范数,即

$$\|x(t)-y(t)\| = \sqrt{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2\mathrm{d}t} = \sqrt{(x-y,x-y)}.$$

函数的范数可以用不同的方法来定义,就像长度有不同的单位一样.例如,在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $x(t)$ 的范数还可以定义为

$$\|x(t)\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|, \tag{2.5}$$

两个连续函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的距离定义为

$$\|x(t)-y(t)\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

在变分中范数的定义常用(2.5).

上节提到的 n 维向量空间 V_n 和无穷维向量空间 l^2,以及线性代数里讲过的线性空间、欧氏空间等,都是抽象的概念,而所谓“空间”是泛指具有某种数学运算结构的向量集合.具有不同性质的函数集合,构成不同的函数空间.

在 $[a,b]$ 上连续函数的全体构成函数空间 $C_{[a,b]}$,即

$$C_{[a,b]} = \{x(t)\mid x(t)\text{ 在 } a\leqslant t\leqslant b \text{ 上连续}\};$$

在 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的函数的全体构成函数空间 $C_{[a,b]}^{(k)}$,这里 k 是正整数,即

$$C_{[a,b]}^{(k)} = \{x(t)\mid x(t)\text{ 在}[a,b]\text{ 上具有 } k \text{ 阶连续导数}\};$$

在勒贝格积分意义①下，由在区间$[a,b]$上平方可积的函数全体构成函数空间 $L^2_{[a,b]}$，即

$$L^2_{[a,b]} = \left\{ x(t) \,\middle|\, \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

有了距离的概念，我们就可以引入极限、收敛等概念了. 设有函数序列 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), \cdots$ 及函数 $x(t)$，如果满足条件

$$\lim_{n\to\infty} \| x(t) - x_n(t) \| = 0,$$

则称函数序列 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 收敛于 $x(t)$. 因为距离有不同的定义，故相应的收敛就有不同的名称，在(2.2)的意义下有

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_a^b [x(t) - x_n(t)]^2 \mathrm{d}t \right\}^{1/2} = 0$$

成立，称函数 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 2 次幂平均收敛于 $x(t)$；而在(2.5)的意义下，有

$$\lim_{n\to\infty} \{ \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x(t) - x_n(t) | \} = 0$$

成立，这就是函数序列 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 一致收敛于 $x(t)$. 从在有界区域上的一致收敛可以推出平均收敛，反之则不真.

对于向量组 $\boldsymbol{A}_k = (a_{k1}, \cdots, a_{kn})$ $(k=1,2,\cdots,m)$，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得

$$c_1\boldsymbol{A}_1 + c_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{A}_m = 0 \tag{2.6$'$}$$

成立，就称向量组线性相关.

如果向量组 $\boldsymbol{A}_k(k=1,2,\cdots,m)$ 非线性相关，就称为线性无关. 换句话说，只有在 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ 时(2.6)′式才成立，那么称向量组 $\boldsymbol{A}_k(k=1,2,\cdots,m)$ 线性无关.

范数为 1 的向量称为单位向量.

设有向量组

$$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,m), \tag{2.7$'$}$$

对于函数组 $x_1(t), \cdots, x_m(t)$，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_mx_m(t) = 0 \tag{2.6}$$

成立，就称函数组线性相关.

如果函数 $x_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 非线性相关，就称为线性无关. 换句话说，只有在 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ 时(2.6)式才成立，那么称函数组 $x_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 线性无关.

范数为 1 的函数 $x(t)$ 称为规范函数.

设有函数系

$$\varphi_i(t)\ (i=1,2,\cdots,m,\cdots), \tag{2.7}$$

---

① 微积分所讲的积分叫黎曼积分，而勒贝格积分是黎曼积分的推广. 实变函数中证明：若函数在黎曼意义下可积，则函数也在勒贝格意义下可积，而且积分值相等. 详见任何一本实变函数的书籍.

如果向量组中任意两向量满足

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = 0,\ i \neq k,$$
$$i,k = 1,2,\cdots,m, \tag{2.8$'$}$$

则称该向量组为正交向量组. 如果向量组 $\boldsymbol{e}_i$ ($i = 1,2,\cdots,m$) 不仅满足 (2.8)$'$, 还满足 $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ ($i = 1,2,\cdots,m$), 则称(2.7)$'$为正交规范向量组.

如果这个函数系中任意两函数满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t = 0, i \neq j,$$
$$i,j = 1,2,\cdots,m,\cdots, \tag{2.8}$$

则称该函数系为正交函数系. 如果函数系 $\varphi_i(t)$ ($i = 1,2,\cdots,m,\cdots$) 不仅仅满足(2.8), 还满足

$$\int_a^b \varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}t = 1 (\|\varphi_i\| = 1),$$
$$i = 1,2,\cdots,m,\cdots,$$

则称(2.7)为正交规范函数系.

正交函数系有很多, 例如:

(1) 三角函数系

$$1,\quad \cos t,\quad \sin t,\quad \cos 2t,\quad \sin 2t,\quad \cdots,\quad \cos nt,\quad \sin nt,\quad \cdots \tag{2.9}$$

是在 $[-\pi,\pi]$ 上的正交函数系.

容易验证

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \cdots,$$
$$\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\quad \cdots \tag{2.9$'$}$$

是在 $[-\pi,\pi]$ 上的正交规范函数系.

(2) 勒让德(Legendre)多项式

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^n} \quad (n = 0,1,2,\cdots). \tag{2.10}$$

它的开头若干个多项式是

$$P_0(t) = 1,\quad P_1(t) = t,\quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$
$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),\cdots.$$

不难证明, (2.10) 是在 $[-1,1]$ 上的正交函数系.

设有 n 维单位正交向量组

$$e_k(k=1,2,\cdots,n),\tag{2.11$'$}$$

则任意 n 维向量 X 可表示为

$$X=\sum_{k=1}^{n}x_k e_k,\tag{2.12$'$}$$

其中

$$x_k=(X,e_k)\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{2.13$'$}$$

为向量 X 在 e_k 上的投影,我们称向量组(2.11)$'$为坐标向量,称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为向量 X 关于坐标向量组(2.11)$'$的坐标.

设有在闭区间$[a,b]$上给出的完备正交规范函数系("完备"概念下面将会提到)

$$\varphi_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n,\cdots),\tag{2.11}$$

函数 $x(t)$ 可以展成广义傅里叶(Fourier)级数

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(t),\tag{2.12}$$

其中傅里叶系数

$$c_k=(x,\varphi_k)=\int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t\quad(k=1,2,\cdots).\tag{2.13}$$

称函数系(2.11)为坐标函数,称 $c_k(k=1,2,\cdots)$为函数 $x(t)$ 关于坐标函数系(2.11)的坐标.

对于广义傅里叶级数,我们从两方面作进一步的说明,即怎样判定正交函数系的完备性?完备性对于把函数展成广义傅里叶级数有什么意义?

设给定了 m 个在$[a,b]$上互相正交的规范函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 和函数 $x(t)$,它们都是平方可积的函数,欲求常数 $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_m$ 使线性组合 $\bar{c}_1\varphi_1(t)+\bar{c}_2\varphi_2(t)+\cdots+\bar{c}_m\varphi_k(t)$ 与 $x(t)$ 的平均平方偏差 I_m 最小. 我们断言:所求常数 $\bar{c}_k$ 应该等于函数 $x(t)$ 关于 $\varphi_k(t)$ 的傅里叶系数,即

$$\bar{c}_k=c_k=(x,\varphi_k)=\int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

事实上,

$$\begin{aligned}
I_m&=\int_a^b[x(t)-\bar{c}_1\varphi_1-\cdots-\bar{c}_m\varphi_m(t)]^2\,\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t-2\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_k\int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t+\\
&\qquad\sum_{i,j=1}^{n}\bar{c}_i\bar{c}_j\int_a^b\varphi_i(t)\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t-2\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_k c_k+\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_k^2\\
&=\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{m}(c_k-\bar{c}_k)^2-\sum_{k=1}^{m}c_k^2,
\end{aligned}$$

可见，当 $\bar{c}_k = c_k (k=1,2,\cdots,m)$ 时，I_m 达到最小值

$$\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

由于 I_m 是个非负的数，如果 $\bar{c}_k = c_k (k=1,2,\cdots,m)$，则恒有

$$I_m = \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \geqslant 0,$$

即有

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.14}$$

成立. 因为这个不等式对任意的 m 都成立，故当 m 趋于无穷大时，仍有不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.14$'$}$$

成立，称(2.14)′为贝塞尔(Bessel)不等式.

在一个闭区间 $[a,b]$ 上有正交规范函数系

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\quad \cdots,\quad \varphi_n(t),\quad \cdots, \tag{2.15}$$

如果对于任何在 $[a,b]$ 上平方可积的函数 $x(t)$，帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\|x\|^2 = \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{2.16}$$

恒成立，我们说序列(2.15)是完备的，而等式(2.16)叫封闭性方程，它是勾股定理在函数空间的推广.

还有一种判定函数系(2.15)完备的等价方法是：如果任意函数 $\Phi(t)$ 与所有函数 $\varphi_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 都正交，即若

$$\int_a^b \varphi_n(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = 0,\quad n = 1,2,\cdots,$$

可推出 $\Phi_n \doteq 0$（Φ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0），则函数系(2.15)就是完备的，否则它就是不完备的.

可以证明三角函数系(2.9)、(2.9)′以及勒让德多项式(2.10)等都是完备的.

不完备的正交函数系很容易举出，例如三角函数系

$$1,\quad \cos t\quad \cos 2t,\quad \sin 2t,\quad \cdots,\quad \cos nt,\quad \sin nt,\quad \cdots, \tag{2.17}$$

它是由(2.9)去掉一个函数 $\sin t$ 得到的，显然，它仍是在 $[-\pi,\pi]$ 上的正交系，但是不完备. 因为存在函数 $\Phi(t) = \sin t \neq 0$，它与三角函数系(2.17)的所有函数都正交.

正交函数系的完备性，对保证广义傅里叶级数收敛于被展开的函数有着决定性的意义. 一般说来，当正交规范函数系(2.15)和 $x(t)$ 给出后，不管(2.15)完备与否，都可以计算系数

$$c_k = (x,\varphi_k) = \int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t \quad (k = 1,2,\cdots),$$

作出和式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t). \tag{2.18}$$

这时我们只能说(2.18)式对应着 $x(t)$,即

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t),$$

可以证明:当(2.15)是完备的,对于满足狄利克雷(Dirichlet)条件的 $x(t)$,在其连续点处,均有

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t) \tag{2.19}$$

成立,即广义傅里叶级数收敛于 $x(t)$.

正交规范的条件可以减弱,当 $\varphi_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是完备的正交系或完备的独立的函数系时,展开式(2.19)仍然成立,只是计算展开系数 c_k 的公式不同而已.

§1.3 映射、泛函与泛函极值的概念

1. 映射的概念

设有 A,B 两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素 a,在集合 B 中都有唯一的元素 b 和它对应,那么包括集合 A,B 以及 A 到 B 的对应法则就叫做从集合 A 到集合 B 的映射或映象. 记

$$f: A \to B \quad (\text{或 } A \xrightarrow{f} B),$$

而集合 B 中的元素 b,称为集合 A 中的元素 a 在映射 f 下的象.

例如:

(1) 函数 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 可视为由集合 $A = \{x \mid x \in [-r,r]\}$ 到集合 $B = \{y \mid y \in [0,r]\}$ 的一个映射.

(2) 定义在 G 上的二元函数 $z = f(x,y)$,可视为由定义域 G 到函数值域 B 的一个映射.

(3) 设有集合 $C_{[a,b]}^{(1)}$ 和 $C_{[a,b]}$,对应法则是求一阶导数. 对于任意 $x(t) \in C_{[a,b]}^{(1)}$,求导后得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t) \in C_{[a,b]}$. 这样我们就给出了从 $C_{[a,b]}^{(1)}$ 到 $C_{[a,b]}$ 的映射,即