工科研究生教材

# 矩阵论引论

田振际　王永铎　吴德军　编

科学出版社

工科研究生教材

# 矩阵论引论

田振际　王永铎　吴德军　编



科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书全面系统地介绍了与工程技术联系密切的矩阵理论及其应用，注重理论和应用的结合，具有工科教材的特点和方法. 全书共 6 章，分别介绍了线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的若尔当标准形及其分解、矩阵分析及应用、特征值的估计、广义逆矩阵. 各章后面配有一定数量的习题.

本书可作为理工科院校硕士研究生和高年级本科生的教材，也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

矩阵论引论/田振际, 王永铎, 吴德军编. —北京：科学出版社, 2013

工科研究生教材

ISBN 978-7-03-036872-0

Ⅰ. ①矩… Ⅱ. ①田… ②王… ③吴… Ⅲ. ① 矩阵论-研究生-教材 Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 040844 号

责任编辑：张中兴／责任校对：邹慧卿
责任印制：阎　磊／封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第　一　版　开本: 720 × 1000 B5
2013 年 3 月第一次印刷　印张: 10 1/2
字数: 205 000

**定价: 30.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前　　言

矩阵理论是高等院校和科研院所的理工科研究生的一门重要基础课程, 该课程的理论性强, 概念比较抽象, 而且有独特的数学思维方式.

作为数学的一个重要分支, 矩阵理论有着悠久的发展历史和极其丰富的内容. 作为一种基本的数学工具, 矩阵理论在数学学科与其他科学技术领域, 如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、运筹学、控制论、系统工程等学科都有广泛的应用, 甚至在经济管理、社会科学等方面, 矩阵的理论和方法也起着十分重要的作用. 现代科学技术的发展, 特别是电子计算机及计算技术的发展, 为矩阵理论的应用开辟了更广阔的前景. 因而, 学习和掌握矩阵的基本理论和方法, 对于将来从事工程技术工作的工科研究生来说是必不可少的.

本书较全面系统地介绍了与工程技术联系密切、应用广泛的矩阵理论与方法. 编写过程中力求做到深入浅出、简明易懂, 深度与广度适中. 因而, 本书较为实用, 既便于教又便于学.

本书第 1 章介绍线性空间、线性变换、特征值与特征向量. 第 2 章主要介绍欧氏空间和酉空间, 以及正规矩阵的相关结论. 第 3 章介绍 $\lambda$-矩阵及其施密斯标准形, 以及矩阵的若尔当标准形和若干分解. 第 4 章介绍向量和矩阵的范数、矩阵序列的极限、矩阵函数、矩阵的微分与积分, 以及矩阵函数在微分方程组求解中的应用. 第 5 章介绍矩阵特征值界的估计和矩阵特征值的分布区域 —— 圆盘定理, 以及矩阵谱半径的估计. 第 6 章介绍广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-}$ 和 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的概念、性质及求法, 并分别给出了它们在解相容线性方程组及不相容线性方程组中的应用. 各章后面配有一定数量的习题.

本书第 1、2、4 章由王永铎编写, 第 3、5 章由吴德军编写, 第 6 章由田振际编写. 全书由田振际负责策划和统稿, 书后习题答案由吴德军提供.

本书可作为理工科院校硕士研究生和高年级本科生的教材, 也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书.

由于编者水平所限, 在编写中难免有疏漏和不妥之处, 恳请读者指正.

编　者

2012 年 12 月

# 目　　录

# 第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是学习现代矩阵理论时经常用到的两个极其重要的概念. 本章简要地论述这两个概念及其有关理论, 论述是在假定读者已经具备了 $n$ 元数组构成的向量空间的理论、矩阵的初步运算、线性方程组的理论等基础上进行的.

## 1.1　线 性 空 间

我们知道, 数是数学的一个最基本的概念. 在历史上, 数的概念经历了一个长期发展的过程, 由自然数到整数、有理数, 然后是实数, 再到复数. 这个过程反映了人们对客观世界的认识的不断深入. 按照所研究的问题, 通常需要明确规定所考虑的数的范围. 我们经常遇到的数的范围有全体有理数、全体实数和全体复数. 有时我们还会碰到一些其他的数的范围, 为了方便起见, 当我们把这些数当成整体来考虑的时候, 常称它为一个数的集合, 简称数集. 有些数集也具有有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质. 为了在讨论中能够把它们统一起来, 我们引入一个一般的概念.

**定义 1.1**　设 $P$ 是由一些复数组成的集合, 其中包含 0 和 1. 如果 $P$ 对于加法、减法、乘法、除法 (除数不为 0) 是封闭的, 那么 $P$ 就称为一个**数域**.

显然, 全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域. 这三个数域我们分别用字母 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 来代表. 全体整数组成的集合就不是数域, 因为任意两个整数的商未必是整数.

不难验证, 数集

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$$

构成一个数域. 事实上, 对任意的 $a + b\sqrt{2}, x + y\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, 有

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (x + y\sqrt{2}) = (a \pm x) + (b \pm y)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{x + y\sqrt{2}} = \frac{ax - 2by}{x^2 - 2y^2} + \frac{bx - ay}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

关于数域我们有一个显然的性质: 任何数域均包含有理数域作为它的一部分, 即有理数域是最小的数域.

线性空间是线性代数最基本的概念之一, 也是学习现代矩阵理论的重要基础. 本节我们来介绍它的定义, 并讨论它的一些简单的性质. 为了说明它的来源, 在引入定义之前, 先看两个熟知的例子.

**例 1.1** 为了解线性方程组, 我们讨论过以 $n$ 元有序实数组作为元素的 $n$ 维向量空间. 对于它们, 有加法和数乘运算, 即

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$
$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

**例 1.2** 对于函数, 也可以定义加法和实数与函数的数量乘法. 例如, 考虑全体定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续实函数的集合 $C(a, b)$. 我们知道, 连续函数的和是连续函数, 连续函数与实数的数量乘积还是连续函数.

从这些例子中我们看到, 虽然所考虑的对象完全不同, 但是它们有一个共同点, 那就是它们都有加法和数量乘法这两种运算. 当然, 随着对象不同, 这两种运算的定义也是不同的. 为了抓住它们的共同点, 把它们统一起来加以研究, 由此引入线性空间的概念.

**定义 1.2** 设 $V$ 是一个非空集合, $P$ 是一个数域. 在集合 $V$ 的元素之间定义了一种称为加法的代数运算, 就是说, 给出了一个法则, 对于 $V$ 中任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, 在 $V$ 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与它们对应, 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$. 在数域 $P$ 与集合 $V$ 的元素之间还定义了一种称为**数乘**的运算, 就是说, 对于数域 $P$ 中任一数 $k$ 与 $V$ 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$, 在 $V$ 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应, 记为 $\boldsymbol{\delta} = k\boldsymbol{\alpha}$. 如果加法与数乘满足下述八条规则, 那么 $V$ 称为**数域 $P$ 上的线性空间**(简称**线性空间**):

(1) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$;

(2) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$, $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$;

(3) $V$ 中存在一个元素 $\mathbf{0}$ ( 称为**零元素**或简称为**零元**), 使得对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$;

(4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 都存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负元素**或简称为**负元**);

(5) 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$;

(6) 对任意 $k, l \in P$ 及 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) 对任意 $k, l \in P$ 及 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) 对任意 $k \in P$ 及 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$.

通常, 线性空间 $V$ 中每一个元素也称为**向量**, 因此, 线性空间也称为**向量空间**. 当数域 $P$ 为实数域时, 线性空间称为**实线性空间**; 当数域 $P$ 为复数域时, 线性空间称为**复线性空间**.

显然, 例 1.1 和例 1.2 给的集合在各自的两个运算下都是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 再看其他一些例子.

**例 1.3** 数域 $P$ 上的所有一元多项式构成的集合 $P[x]$ 在通常多项式的加法和数与多项式的乘积运算下构成数域 $P$ 上的线性空间. 如果只考虑次数小于 $n$ 的多项式, 再添上零多项式也构成数域 $P$ 上的一个线性空间, 通常表示为 $P[x]_n$.

**例 1.4** 元素属于数域 $P$ 的全体 $m\times n$ 矩阵的集合, 在矩阵的加法和矩阵的数乘运算下, 构成数域 $P$ 上的一个线性空间, 表示为 $P^{m\times n}$.

**例 1.5** 全体正实数 $\mathbf{R}^+$ 在如下定义的加法运算 "$\oplus$" 和数乘运算 "$\cdot$" 下, 构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间: 对任意 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 及 $k\in\mathbf{R}$,

$$a\oplus b=ab,\quad k\cdot a=a^k.$$

这是因为对任意 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ 以及 $k,l\in\mathbf{R}$,

(1) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$;

(2) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=abc=a\oplus(b\oplus c)$;

(3) $a\oplus 1=a\times 1=a$; (因此 1 是零元)

(4) $a\oplus a^{-1}=a\times a^{-1}=1$; (因此 $a^{-1}$ 是 $a$ 的负元)

(5) $1\cdot a=a^1=a$;

(6) $k\cdot(l\cdot a)=k\cdot a^l=(a^l)^k=a^{kl}=(kl)\cdot a$;

(7) $(k+l)\cdot a=a^{k+l}=a^ka^l=a^k\oplus a^l=k\cdot a\oplus l\cdot a$;

(8) $k\cdot(a\oplus b)=k\cdot(ab)=(ab)^k=a^kb^k=a^k\oplus b^k=k\cdot a\oplus k\cdot b$.

也就是说, 在 $\mathbf{R}^+$ 中的加法运算和数乘运算满足线性空间定义的八条规则, 所以 $\mathbf{R}^+$ 构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间, 且 1 是零元素, $a^{-1}$ 是 $a$ 的负元素.

由线性空间的定义我们可证明线性空间的下列一些简单性质:

(1) 零元是唯一的.

(2) 每个元素的负元是唯一的.

事实上, 假设 $\boldsymbol{\alpha}$ 有两个负元 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}.$$

那么

$$\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0}+\boldsymbol{\beta}_1=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2)+\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1)=\boldsymbol{\beta}_2+\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}_2,$$

由此说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元是唯一的.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元通常记为 $-\boldsymbol{\alpha}$. 利用负元, 定义减法如下:

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

(3) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 以及 $k\in P$, 总有

$$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\quad (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},\quad k\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

先证 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

$$0\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})=(0\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{\alpha}=(0+1)\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

再证 $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$.

$$\begin{aligned}(-1)\boldsymbol{\alpha}&=(-1)\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})=((-1)\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{\alpha}\\&=(-1+1)\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}-\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

最后证 $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

$$k\mathbf{0}=k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha})=k(1+(-1))\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

设 $V$ 是数域 $P$ 上的一个线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $V$ 中的一组向量, $k_1$, $k_2,\cdots,k_r$ 是数域 $P$ 中的数, 那么向量

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个**线性组合**. 有时也说向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **线性表出**.

**定义 1.3**　设 $V$ 是数域 $P$ 上的一个线性空间. $V$ 中的一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 称为**线性相关**, 如果存在 $P$ 中的不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

如果一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 不是线性相关, 则称它为**线性无关**. 换句话说, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 称为线性无关, 如果上式只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时才成立.

以上定义是大家过去已经熟悉的, 它们是逐字逐句地重复了 $n$ 元数组相应概念的定义. 不仅如此, 有关 $n$ 元数组的那些论证也完全可以搬到数域 $P$ 上的抽象的线性空间中来, 并得出相同的结论. 我们不再重复这些论证, 仅把几个常用的结论叙述如下:

(1) 向量组线性相关的充分必要条件是其中有一个向量能被其余的向量线性表出.

(2) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 且可以被向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出, 那么 $r\leqslant s$.

(3) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 但向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 那么 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 且表出系数是唯一的.

我们知道, 对于三维几何空间中的向量, 线性无关的向量最多是 3 个, 而任意 4 个向量都是线性相关的. 对于数域 $P$ 上所有 $n$ 元数组构成的向量空间, 有 $n$ 个线性无关的向量, 而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的. 那么, 在一个一般的线性空间中, 究竟最多能有多少个线性无关的向量, 显然是线性空间的一个重要属性. 我们引入维数和基的概念.

**定义 1.4** 如果在线性空间 $V$ 中有 $n$ 个线性无关的向量, 但没有更多数目的线性无关的向量, 那么 $V$ 称为$n$ **维**的或称 $n$ 为 $V$ 的**维数**, $V$ 的维数常记为 $\dim(V)$ 或 $\dim V$. 在 $n$ 维线性空间 $V$ 中, 任意 $n$ 个线性无关的向量称为 $V$ 的一组**基**.

按照这个定义, 不难看出, 三维几何空间中所有向量构成的线性空间是三维的; 数域 $P$ 上所有 $n$ 元数组构成的线性空间是 $n$ 维的.

如果在 $V$ 中可以找到任意多个线性无关的向量, 那么 $V$ 就称为**无限维**的. 例如, 由所有实系数多项式构成的实线性空间是无限维的, 因为对于任意的 $n$, 都有 $n$ 个线性无关的向量. 无限维空间是一个专门研究的对象, 它与有限维空间有比较大的差别. 我们这里只研究有限维空间.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $V$ 中任一向量, 则向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 因此存在唯一一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n.$$

这组数就称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的**坐标**, 记为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

由以上定义来看, 在给出空间 $V$ 的一组基之前, 必须先确定 $V$ 的维数. 实际上, 这两个问题通常是同时解决的.

**定理 1.1** 如果在线性空间 $V$ 中有 $n$ 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 且 $V$ 中任一向量都可以被它们线性表出, 那么 $V$ 是 $n$ 维的, 并且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 $V$ 的一组基.

**证明** 显然, 我们只需证明 $V$ 中任意 $n+1$ 个向量线性相关即可. 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 是 $V$ 中任意 $n+1$ 个向量, 则它们可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出. 如果假设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 线性无关, 那么 $n+1\leqslant n$, 矛盾!

## 1.2 基变换与坐标变换

在 $n$ 维线性空间中, 任意 $n$ 个线性无关的向量都可以作为空间的基. 对不同的基, 同一个向量的坐标一般是不同的. 现在我们关心, 随着基的改变, 向量的坐标是怎样变化的.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的两组基, 它们的关系是

$$\begin{cases}\varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n,\\ \varepsilon_2' = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n,\\ \cdots\cdots\\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n.\end{cases} \tag{1.1}$$

再设 $V$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = x_1'\varepsilon_1' + x_2'\varepsilon_2' + \cdots + x_n'\varepsilon_n'. \tag{1.2}$$

现在的问题就是要找出 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 的关系.

为了方便, 我们引入一种形式的写法. 把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 写成

$$\boldsymbol{\alpha} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = (\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

也就是把基写成一个 $1\times n$ 矩阵, 把向量的坐标写成一个 $n\times 1$ 矩阵, 而把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 看成这两个矩阵的乘积.

类似地, 式 (1.1) 可以写成

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n') = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\boldsymbol{A}, \tag{1.4}$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的**过渡矩阵**. 由基向量的线性无关性容易证明, 过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的.

我们之所以说上述写法是"形式的", 在于这里是以向量作为矩阵的元素, 一般说来没有意义. 不过在这个特殊的情况下, 这种约定的用法不会出任何问题, 而且可以验证 (留给读者), 普通矩阵的加法、乘积、数乘等运算规则对它们也适合.

将式 (1.4) 代入式 (1.3) 得

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}.$$

由此,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},\tag{1.5}$$

即

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.\tag{1.6}$$

式 (1.5) 和式 (1.6) 给出了同一向量在不同基下的坐标之间的变换关系.

## 1.3 线性子空间

在通常的三维几何空间中, 考虑一个通过原点的平面. 不难看出, 这个平面上的所有向量对于加法和数量乘法组成一个二维的线性空间. 这就是说, 它一方面是三维几何空间的一个部分, 同时它对于原来的运算也构成一个线性空间.

**定义 1.5** 数域 $P$ 上线性空间 $V$ 的一个非空子集 $W$ 称为 $V$ 的一个**线性子空间**(或简称**子空间**), 如果 $W$ 对于 $V$ 的两种运算也构成数域 $P$ 上的线性空间.

由线性空间的定义, 我们有以下定理成立.

**定理 1.2** 设 $W$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的非空子集, 那么 $W$ 是 $V$ 的子空间的充要条件是

(1) 对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$;

(2) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in W$ 及 $k\in P$, $k\boldsymbol{\alpha}\in W$.

也就是说, $W$ 是 $V$ 的子空间的充要条件是 $W$ 关于 $V$ 中的两个运算是 “封闭” 的.

我们注意到, 定理中的条件 (1) 和条件 (2) 可合写为: 对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$ 及 $k,l\in P$, $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}\in W$.

**例 1.6**　在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间, 它称为**零子空间**.

**例 1.7**　线性空间 $V$ 本身也是 $V$ 的一个子空间. 在线性空间中, 零子空间和线性空间本身这两个子空间有时候称为**平凡子空间**, 而其他的线性子空间称为**非平凡子空间**.

**例 1.8**　在全体实函数组成的空间中, 所有的实系数多项式组成一个子空间.

**例 1.9**　在线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中, $n$ 元齐次线性方程组的全部解向量构成一个子空间, 这个子空间称为齐次线性方程组的**解空间**.

**例 1.10**　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 中的 $r$ 个向量, 那么由它们的所有可能的线性组合构成的集合

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r \mid k_1,k_2,\cdots,k_r\in P\}$$

是 $V$ 的一个子空间. 这个子空间通常称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$**生成的子空间**.

**定理 1.3**　设 $V_1,V_2$ 为数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的两个子空间, 则

(1) $V_1$ 与 $V_2$ 的交 $V_1\cap V_2$ 是 $V$ 的子空间;

(2) $V_1$ 与 $V_2$ 的和

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha}\in V_1,\boldsymbol{\beta}\in V_2\}$$

是 $V$ 的子空间.

**证明**　(1) 因为 $V_1,V_2$ 是 $V$ 的子空间, 所以 $V$ 的零元在 $V_1\cap V_2$ 中, 这就是说 $V_1\cap V_2$ 非空. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1,\quad \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2,$$

进而,

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2.$$

另一方面, 对任意 $k\in P$ 及 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$, 显然有 $k\boldsymbol{\alpha}\in V_1$, $k\boldsymbol{\alpha}\in V_2$, 由此有

$$k\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2.$$

这证明了 $V_1\cap V_2$ 是 $V$ 的子空间.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1+V_2$, 则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\in V_1$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2\in V_2$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2.$$

于是,

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2).$$

因为 $V_1, V_2$ 是子空间, 所以,

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \in V_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \in V_2.$$

从而,

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_1 + V_2.$$

同样地, 对任意 $k \in P$,

$$k\boldsymbol{\alpha} = k(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = k\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1 + V_2.$$

因此 $V_1 + V_2$ 是 $V$ 的子空间. □

需要指出的是, 一般来说, 线性空间的两个子空间的并集不是其子空间.

**例 1.11** 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 生成的子空间与由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 生成的子空间的和等于由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 生成的子空间, 即

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) + L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s).$$

既然线性子空间本身也是一个线性空间, 那么在 1.1 节中引入的概念, 如维数、基、坐标等, 当然也可以应用到子空间上. 因为在子空间中不可能比在整个空间中有更多数目的线性无关的向量, 所以, 任何一个子空间的维数不会超过整个空间的维数. 关于子空间的交与和的维数, 我们有维数公式成立.

**定理 1.4** (维数公式) 设 $V_1, V_2$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的两个子空间, 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

**证明** 设 $\dim V_1 = s$, $\dim V_2 = t$, 且 $\dim(V_1 \cap V_2) = r$. 选取 $V_1 \cap V_2$ 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$, 并将它分别扩充为 $V_1$ 和 $V_2$ 的基:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_s,$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon'_{r+1}, \cdots, \varepsilon'_t.$$

现在证明向量组

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_s, \varepsilon'_{r+1}, \cdots, \varepsilon'_t \tag{1.7}$$

是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 这样, $V_1 + V_2$ 的维数就为 $s + t - r$, 因而维数公式成立.

首先证明 $V_1 + V_2$ 中的任一向量可由向量组 (1.7) 线性表出. 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1 + V_2$, 则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2.$$

而对 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, 又分别存在 $c_1, c_2, \cdots, c_s \in P$ 和 $c_1', c_2', \cdots, c_t' \in P$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{s} c_i \boldsymbol{\varepsilon}_i,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \sum_{i=1}^{r} c_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{t} c_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i'.$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \left(\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{s} c_i \boldsymbol{\varepsilon}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} c_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{t} c_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i'\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} (c_i + c_i') \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{s} c_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{t} c_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i'.\end{aligned}$$

再证明向量组 (1.7) 线性无关. 事实上, 如果

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{s} x_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{t} x_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i' = \mathbf{0},$$

那么有

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{s} x_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = -\sum_{i=r+1}^{t} x_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i'. \tag{1.8}$$

若令

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{s} x_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = -\sum_{i=r+1}^{t} x_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i',$$

则 $\boldsymbol{\gamma} \in V_1 \cap V_2$. 因此, 存在 $y_1, y_2, \cdots, y_r \in P$ 使得

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^{r} y_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = -\sum_{i=r+1}^{t} x_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i',$$

由此有

$$\sum_{i=1}^{r} y_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{i=r+1}^{t} x_i' \boldsymbol{\varepsilon}_i' = \mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_t'$ 线性无关 (是 $V_2$ 的基), 所以,

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_r = x_{r+1}' = \cdots = x_t' = 0.$$

于是, 由式 (1.8) 有

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\varepsilon_i + \sum_{i=r+1}^{s} x_i\varepsilon_i = \mathbf{0},$$

又由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_s$ 的线性无关性可知

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_r = x_{r+1} = \cdots = x_s = 0.$$

从而, 向量组 (1.7) 线性无关.

这样, 向量组 (1.7) 是 $V_1 + V_2$ 的一组基, 从而维数公式成立. □

在本节的最后, 我们讨论子空间的和的一个特殊情况, 这就是子空间的直和.

**定义 1.6**　设 $V_1, V_2$ 是线性空间 $V$ 的两个子空间, $V_1$ 与 $V_2$ 的和 $V_1 + V_2$ 称为**直和**, 如果 $V_1 + V_2$ 中每个元素的分解是唯一的, 即对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1 + V_2$, 存在唯一的 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1$ 及唯一的 $\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2.$$

$V_1$ 与 $V_2$ 的直和记为 $V_1 \oplus V_2$ 或 $V_1 \dot{+} V_2$.

**例 1.12**　设有 $\mathbf{R}^3$ 的三个子空间:

$$V_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbf{R}\},$$
$$V_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbf{R}\},$$
$$V_3 = \{(0, u, v) \mid u, v \in \mathbf{R}\}.$$

那么 $T = V_1 + V_2$ 是直和, 这是因为对任意 $(a, b, c) \in T$, 若

$$(a, b, c) = (x, y, 0) + (0, 0, z) = (x', y', 0) + (0, 0, z'),$$

则 $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. 这就是说, $T$ 中每个元素的分解是唯一的, 即 $T$ 是直和.

但 $W = V_1 + V_3$ 不是直和, 因为对 $(1, 2, 1) \in W$,

$$(1, 2, 1) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, -1, 0) + (0, 3, 1),$$

且 $(1, 1, 0), (1, -1, 0) \in V_1$, $(0, 1, 1), (0, 3, 1) \in V_3$.

**定理 1.5**　设 $V_1, V_2$ 为数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的两个子空间, 则下列条件等价:

(1) $V_1 + V_2$ 是直和;

(2) 零向量 $\mathbf{0}$ 的分解是唯一的;

(3) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;

(4) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.