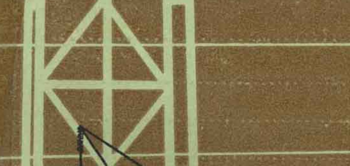
上海市中学课本

数学

第五册



上海人民出版社

目　　录

第一章　任意角的三角比

第一节　角的概念的推广

我们过去学过的角，都在0°～360°范围内，但在实际应用时，常常会遇到大于360°的角．例如，车轮上某一根辐条OA[图1.1(1)]，绕着O点旋转一周后，再旋转到OB位置．这时所形成的$\angle AOB$的度数就超过了360°．

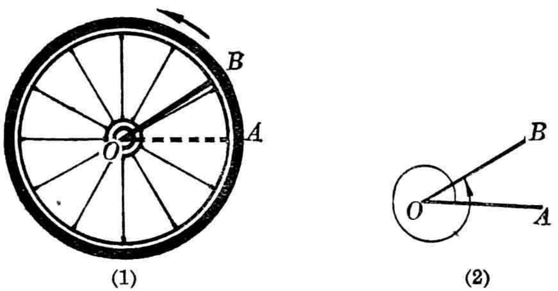


图　1.1

从这里可以看到：$\angle AOB$也可以理解为一条射线OA，按确定方向绕着端点O旋转到OB所经过的部分［图1.1(2)］．射线旋转开始位置OA叫做角的始边，旋转终止位置OB叫做角的终边．

因为旋转方向不同，所以形成的角的方向也不同．例如，图1.2是一对大小相同又互相啮合的齿轮．当右边主动轮

上的 OA，按逆时针方向旋转到 OB 时，形成了 $\angle AOB$. 这时，左边被动轮上的 $O'A'$，按顺时针方向转到 $O'B'$，形成了 $\angle A'O'B'$. 这两个角的旋转方向是相反的. 如果我们把 $\angle AOB$ 看成正角，那末 $\angle A'O'B'$ 就是负角.

习惯上规定：

按逆时针方向旋转所形成的角是正角；按顺时针方向旋转所形成的角是负角.

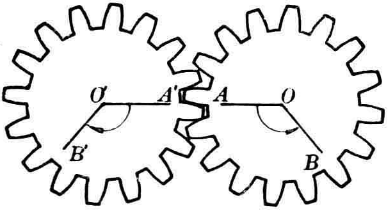


图 1.2

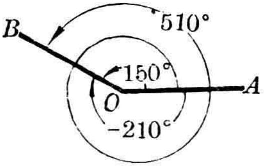


图 1.3

在图 1.3 中，我们可以看到，$510°$ 和 $-210°$ 的角都和 $150°$ 的角具有相同的始边和终边. 这些角的度数都相差 $360°$ 的整数倍，即

$$510° = 1\times 360° + 150°, \quad -210° = -1\times 360° + 150°.$$

除此之外，和 $150°$ 角具有相同始边和终边的角还有.

$$870° = 2\times 360° + 150°, \quad -570° = -2\times 360° + 150°.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此，所有与 $150°$ 角的始边和终边相同的角，连同 $150°$ 角在内，可以表示成

$$n\cdot 360° + 150°. \quad (n=0、\pm 1、\pm 2\cdots\cdots)$$

一般地说，与 α 的始边和终边相同的角，连同 α 在内，可以表示成

$$n\cdot 360^\circ+\alpha. \quad (n\text{ 是整数})$$

试一试，把和下列各角的始边和终边相同的一切角，用一般式表示出来：

(1) 30°；　　(2) 120°；

(3) -200°；　　(4) $-\alpha$.

为了研究方便，我们把角的顶点作为直角坐标系的原点，角的始边作为 x 轴的正方向，它的终边落在哪一个象限内，这个角就叫做第几象限的角.

例如：图 1.4 中，30°、150°、210° 和 330° 分别是第一、第二、第三和第四象限的角；-30°、-150°、-585° 和 -690° 分别是第四、第三、第二和第一象限的角.

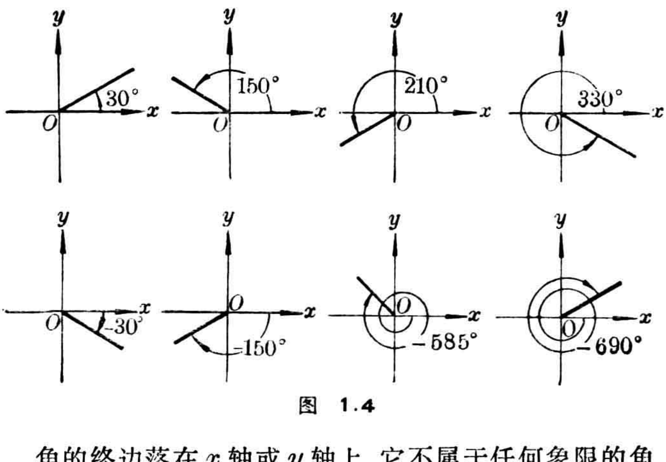


图 1.4

角的终边落在 x 轴或 y 轴上，它不属于任何象限的角.

想一想，下列各角是第几象限的角：

(1) $95°$;　　(2) $-30°$;

(3) $780°$;　　(4) $n\cdot 360°+250°$.

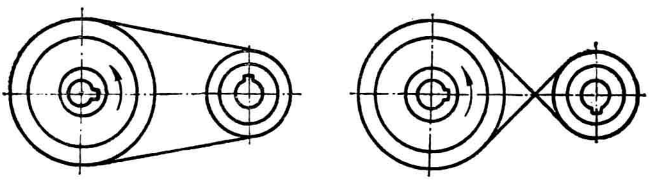
练　习　一

1. 试计算时钟走了一昼夜,分针和时针所转过的角度.

2. 在半径为 3dm 的轮子边缘上有一点,求这点绕轴心旋转 720° 所经过的距离.

3. 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿. 当大链轮转过一周时,小链轮转过的角度是多少?

4. 图中皮带轮标有旋转方向的是主动轮，把皮带安装成不交叉和交叉时，问被动轮旋转所形成的角是正角还是负角?



(不交叉的)　　(交叉的)

(第 4 题)

5. 试举几个能形成正角和负角的实际例子.

6. 判定下列各角是第几象限的角:(题中 n 为整数)

(1) $91°40'$;　　(2) $300°$;

(3) $181°20'$;　　(4) $368°$;

(5) $-110°$;　　(6) $-200°$;

(7) $n\cdot 360°+15°$;　　(8) $n\cdot 360°-38°16'$.

7. 用一般式表示和下列各角始边和终边相同的角：

(1) 35°；　　　　(2) 0°；

(3) -120°；　　　　(4) -500°；

(5) $\alpha+\beta$；　　　　(6) $\beta-\alpha$.

第二节　任意角的三角比

在生产实际中，经常会遇到要计算孔的中心坐标的问题. 例如，图 1.5 是粉碎机壳的一个视图. 试根据图示尺寸，求 A、B、C、D 四孔中心的坐标.（精确到 0.1 mm）

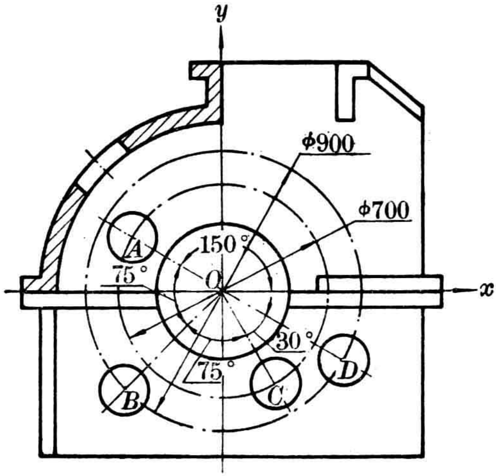


图 1.5

这个问题，实际上是已知半径 $OA=OC=350$，$OB=OD=450$，$\angle xOA=150^\circ$，$\angle xOB=225^\circ$，$\angle xOC=300^\circ$，$\angle xOD=330^\circ$，求 A、B、C、D 的坐标.

要解决这个问题，就必须在锐角三角比的基础上，进一步研究任意角三角比.

我们在学习锐角三角比时，是用直角三角形中两条边的比来定义锐角三角比的. 对于任意角，我们又怎样来定义它的三角比呢？

毛主席教导我们："**普遍性即存在于特殊性之中**". 锐角三角比是任意角三角比的特殊情况. 为了研究任意角的三角比，我们先在直角坐标系中研究锐角三角比.

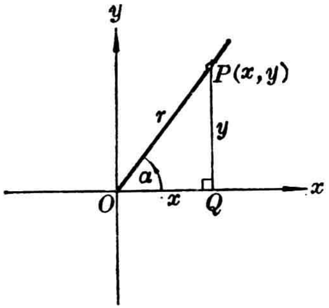


图 1.6

在锐角 α 的终边上任意取一点 P（图1.6），过 P 点画 x 轴的垂线，交 x 轴于 Q，那末 OQ、QP 就分别是 P 点的坐标 x、y，OP 是原点 O 到 P 点的距离. 而在直角三角形 OQP 中，它们又分别是锐角 α 的邻边、对边和斜边，即

$$OQ=x,\quad QP=y,\ OP=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

因此，有

$$\sin\alpha=\frac{QP}{OP}=\frac{y}{r},$$

$$\cos\alpha=\frac{OQ}{OP}=\frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{QP}{OQ}=\frac{y}{x}.$$

由此我们知道：一个锐角 α 的三角比，既可以用它所在的直角三角形两条边的比来定义，又可以用它的终边上任意一

点的横坐标和纵坐标、原点到这点的距离这三者中任意两者的比来定义. 这种用点的坐标的比来定义锐角三角比的方法, 可以用来定义任意角的三角比.

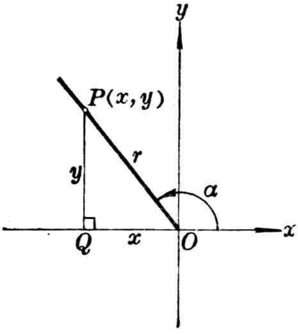


图 1.7

如图 1.7 所示, 我们把任意角 α 的顶点作为坐标原点, 始边作为 x 轴正方向, P 是任意角 α 的终边上任意一点, 它的横坐标为 x, 纵坐标为 y, 到原点的距离为 r. 那末 α 的三角比定义为

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

它们的倒数是

$$\csc\alpha=\frac{r}{y};\quad \sec\alpha=\frac{r}{x};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

这里 $\sec\alpha$ 叫做 α 的正割, $\csc\alpha$ 叫做 α 的余割. 显然有,

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

从上面倒数关系式中可以看出, 如果了解了前三个三角比的性质, 后三个三角比的性质也就知道了. 因此, 以后我们将着重研究前三个三角比.

根据任意角三角比的定义, 由已知角的终边上一点的坐标, 可以求出这个角的三角比的值.

【例 1】 已知 α 的终边经过 $P(3, -4)$ (图 1.8), 求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\csc\alpha$、$\sec\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$.

解：∵ $x=3,\quad y=-4,$

∴ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$

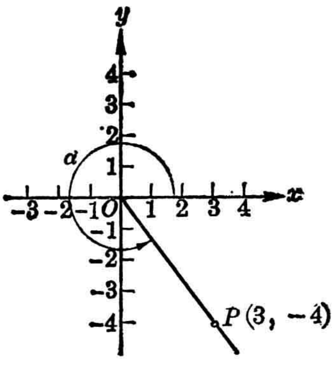


图 1.8

∴ $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5};$

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5};$

$\mathrm{tg}\,\alpha=-\dfrac{4}{3};$

$\csc\alpha=-\dfrac{5}{4};$

$\sec\alpha=\dfrac{5}{3};$

$\mathrm{ctg}\,\alpha=-\dfrac{3}{4}.$

【例 2】 已知α的终边经过$(0,\ -1)$，求$\sin\alpha$、$\cos\alpha$.

解：由$x=0$, $y=-1$，得

$$r=1.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-1}{1}=-1;$$

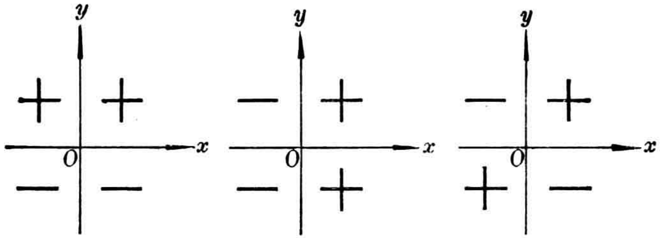
$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0.$$

算一算：

(1) 已知φ的终边经过$(-3,\ -4)$，求$\sin\varphi$、$\cos\varphi$、$\mathrm{tg}\,\varphi$、$\csc\varphi$、$\sec\varphi$、$\mathrm{ctg}\,\varphi$.

(2) 已知β的终边经过$(-4,\ 0)$，求$\sin\beta$、$\cos\beta$.

根据任意角三角比的定义，可以看出：各象限内角的三角比的符号，与它的终边上点的纵坐标、横坐标的符号有关. 现把各象限内的角的正弦、余弦、正切的符号用下面的图来表示：



sin α 的符号　　cos α 的符号　　tg α 的符号

图 1.9

【例 3】 确定下列式子的符号：

(1) $\sin 108°\cdot\cos 234°$；　(2) $\dfrac{\operatorname{tg} 210°}{\sin 320°}$.

解：(1) $\because\ \sin 108°>0,\quad \cos 234°<0,$

$\therefore\ \sin 108°\cdot\cos 234°<0.$

(2) $\because\ \operatorname{tg} 210°>0,\quad \sin 320°<0,$

$$\therefore\ \frac{\operatorname{tg} 210°}{\sin 320°}<0.$$

【例 4】 根据下列条件，确定 α 所在的象限：

(1) $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$；

(2) $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，并且 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解：(1) $\because\ \cos\alpha=\dfrac{1}{3}>0,$

$\therefore$ α 在第一或第四象限.

(2) $\because\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}>0,$

$\therefore$ α 在第一或第二象限，

$$\because \quad \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0,$$

$$\therefore \quad \alpha \text{ 在第二或第三象限.}$$

因此，适合 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 和 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的 α 在第二象限.

【例 5】 已知 $\cos\alpha=-0.2$，求 $\sin\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$.

解： $\because \quad \cos\alpha=-0.2<0,$

$\therefore \quad \alpha$ 在第二或第三象限.

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-0.2=-\frac{1}{5}.$$

如果取 $r=5$，那末 $x=-1$.

当 α 是第二象限的角时(图 1.10)，

$$y=\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{5^2-(-1)^2}=2\sqrt{6}.$$

$$\therefore \quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{6}}{5};$$

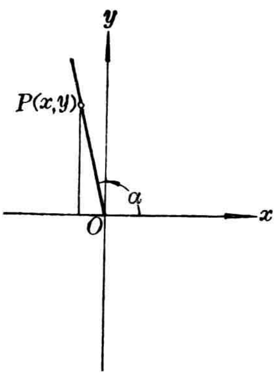


图 1.10

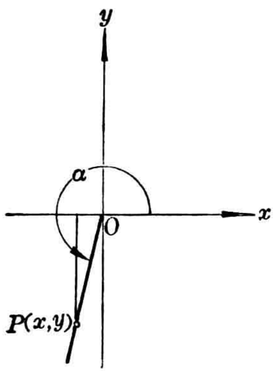


图 1.11

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{6}}{-1}=-2\sqrt{6}.$$

当 α 是第三象限的角时(图 1.11)，

$$y=-\sqrt{r^2-x^2}=-\sqrt{5^2-(-1)^2}=-2\sqrt{6}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{2\sqrt{6}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-2\sqrt{6}}{-1}=2\sqrt{6}.$$

算一算：已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，求 $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$.

【例 6】 已知 $\operatorname{tg}\theta=1$，且 $\sin\theta<0$，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$.

解：$\because\quad \operatorname{tg}\theta=1>0$，

θ 是第一或第三象限的角.

又 $\because\quad \sin\theta<0$，

θ 是第三或第四象限的角.

$\therefore$ θ 是第三象限的角(图 1.12).

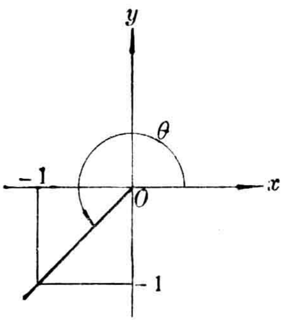


图 1.12

由此可知

$$x<0,\quad y<0.$$

$$\because\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=1,$$

如果取 $y=-1$，那末 $x=-1$.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

算一算：已知 $\operatorname{tg}\theta=-1$，且 $\cos\theta>0$，求 $\sin\theta$、$\cos\theta$.

【例 7】 求 $\sin 0°$、$\cos 0°$、$\sin 270°$、$\cos 270°$.

解：(1) $0°$ 角的终边在 x 轴的正方向上(图 1.13)．如果取 $x=1$，那末 $y=0$，$r=1$．

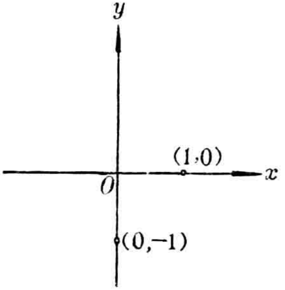


图 1.13

$$\therefore\quad \sin 0° = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\cos 0° = \frac{1}{1} = 1.$$

(2) $270°$ 角的终边在 y 轴的负方向上．如果取 $y=-1$，那末 $x=0$，$r=1$．

$$\therefore\quad \sin 270° = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\cos 270° = \frac{0}{1} = 0.$$

算一算：求 $\sin 90°$、$\cos 90°$ 的值．

练　习　二

1．已知 α 的终边上一点的坐标如下：

(1) $(4, 3)$；　　(2) $(-12, 9)$；

(3) $(-2, -3)$；　　(4) $(\sqrt{2}, -1)$．

求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\csc\alpha$、$\sec\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$．

2．已知 α 的终边上一点的坐标如下：

(1) $(2, 0)$；　　(2) $(0, 3)$；

(3) $(0, -2.5)$；　　(4) $(-\sqrt{3}, 0)$．

求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$．

3．化简下列各式：

(1) $\dfrac{1}{\csc\alpha}$；　　(2) $\sin\alpha\cdot\csc\alpha$；

(3) $\frac{1}{\sec\alpha}$;　　(4) $\sec\alpha\cdot\cos\alpha$;

(5) $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;　　(6) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

4. 确定下列式子的符号:

(1) $\sin 89°\cdot\cos 121°$;　　(2) $\cos 259°\cdot\sin 350°$;

(3) $\sin 145°\cdot\operatorname{tg} 130°$;　　(4) $\cos 280°\cdot\operatorname{tg} 190°$.

5. 根据下列条件,确定α所在象限:

(1) $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$;

(2) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 并且 $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$;

(4) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 并且 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. 说明各象限内角的余割、正割、余切的符号.

7. 已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, 求 $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$.

8. 已知 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, 求 $\sin\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$.

9. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$, 求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

10. 已知 $\sin\theta=-0.5$, 且 θ 是第三象限的角, 求 $\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$.

11. 已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, 且 $\sin\alpha<0$, 求 $\operatorname{tg}\alpha$.

12. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-2$, 且 $90°<\alpha<180°$, 求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

13. 求 $\sin 180°$、$\cos 180°$、$\sin 360°$、$\cos 360°$ 的值.

14. 填表：

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					

15. 计算：$3\sin 270° + 4\cos 180° - 2\cos 0° - 3\sin 90°$.

第三节 化任意角的三角比为锐角的三角比

一、求 90°～360° 角的三角比的值

应用“三角函数表”，可以直接求出 0°～90° 范围内的角的三角比的值. 但是，0°～90° 范围以外的角的三角比的值，就不能直接从“三角函数表”中查得，那末，我们能否先把 0°～90° 范围以外的角的三角比，转化为 0°～90° 范围内的角的三角比，再查表求出它们的值呢？毛主席教导我们：“**一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的**”. 下面我们来研究 90°～360° 范围内的角的三角比与锐角三角比之间的关系.

先讨论当 $90° < \theta < 180°$ 时，θ 的三角比和锐角 α 的三角比之间的关系.

从图 1.14(1) 可以看出，对于 θ，我们一定可以找到一个锐角 α，有 $\alpha = 180° - \theta$（或 $\theta = 180° - \alpha$）. 如果在 θ 的终边上任取一点 P，并设 P 的坐标为 (x, y)，$OP = r$. 再过 P 画 x 轴的垂线交 x 轴于 Q，那末 QP 和 OQ 既可以看作是 θ 的终边上一点 P 的纵坐标 y 和横坐标 x，也可以看作是直角三角形 PQO 中 α 的对边 b 和邻边 a.

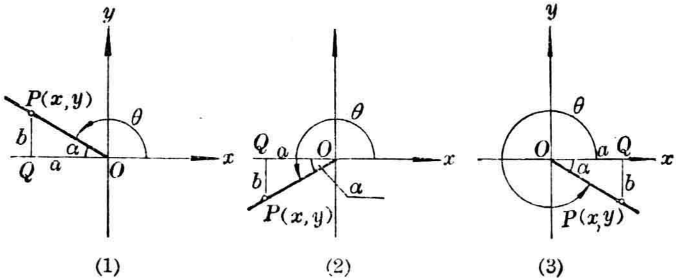


图 1.14

因此，当 $90°<\theta<180°$ 时，有

$$y=b,\quad x=-a.$$

$$\because\quad \sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x};$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{r},\ \cos\alpha=\frac{a}{r},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\sin\alpha;\ \cos\theta=-\cos\alpha;\ \operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}\alpha.$$

即

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

用同样的方法可以得到：

当 $180°<\theta<270°$ 时，$\alpha=\theta-180°$（或 $\theta=180°+\alpha$）[图 1.14(2)]，有

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180°+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$