

多重线性代数与矩阵

王伯英文集

WANG BOYING WENJI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



王伯英文集

多重线性代数与矩阵

李仲来 / 主编



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

2012 · 北京

图书在版编目(CIP)数据

多重线性代数与矩阵——王伯英文集/王伯英著,李仲来
主编.—北京:北京师范大学出版社,2012.8
(北京师范大学数学家文库)
ISBN 978-7-303-14787-8

I. ①多… II. ①王…②李… III. ①多线性代数—文集
②矩阵—文集 IV. ① O151.23-53 ② O151.21-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 129510 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码:100875

印 刷:北京联兴盛业印刷股份有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:155 mm × 235 mm
印 张:21.75
插 页:4
字 数:330 千字
版 次:2012 年 8 月第 1 版
印 次:2012 年 8 月第 1 次印刷
定 价:55.00 元

策划编辑:岳昌庆 责任编辑:岳昌庆
美术编辑:毛 佳 装帧设计:毛 佳 刘松弢
责任校对:李 茵 责任印制:李 啸

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话:010-58800697

北京读者服务部电话:010-58808104

外埠邮购电话:010-58808083

本书如有印装质量问题,请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话:010-58800825



1961年8月回农村老家探亲，在广东茂名金塘与我父母及三个弟弟的合影。



1980年4月在美国，难得一穿的西装照。



1980年1月，
夏道行教授（左一）、
樊畿教授（中）与我
在 UCSB 合影留念。



1989年5月，和
陈公宁陪同樊畿教授
夫妇游览北海公园。



1997年10月，
我的中学老师钟荣光
来北京办事，与他愉
快会面交谈。

1998 年 6 月，
与在校的研究生合
影。左起：周惊雷，
李洵，侯耀平，王伯
英，张秀平，宝音特
古斯（席博彦）。



2000 年 8 月，
张福振（左一）在北
京师范大学数学系作
报告后与我和雷天刚
（右一）交谈。



2008 年 1 月，
与蔡俊亮合影。

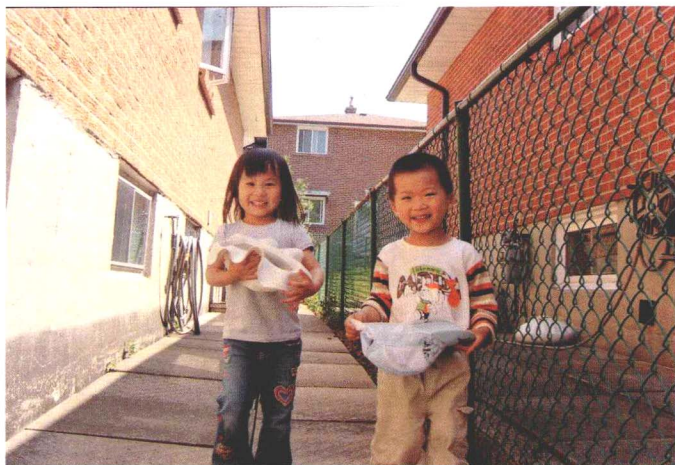


1986年7月，全家和北京师范大学数学系教师到延庆县龙庆峡游览。左起：关慧敏，王天梅，王梅天，王伯英。



2007年7月，全家汇合到瑞士日内瓦游览时合影。

2009年8月，两个可爱的孙辈在玩耍。



自序

我于1937年5月2日出生在广东省茂名市金塘乡宋村。那时全村不到一百户，也无正规学校，只有一个先生教的私塾。父亲王如柏读过几年私塾，能看一些书和报，解放初到一家商店当了售货员。母亲林月华一辈子在宋村种稻和一些杂粮，连自己名字都不认识。

从1944年初起我读了四年半私塾，主要是认字和背诵，不求甚解。例如背诵《三字经》《千字文》到唐诗和一些有名的古文。现在想起来当时反复背诵过的《滕王阁序》，至今还能背出其中的一些名句，这也给日后的生活添加了一些情趣。

1948年8月我长大些了就到附近的金塘读小学。在寒暑假，放牛、割草、插秧等农活我都干过。1950年小学毕业后就到离家很远的茂名五中读初中，随后到高州中学读高中。初、高中的生活较艰苦，晚上是在小小的煤油灯下看书做作业。初中的数学老师是钟荣光，高中是程登瀛。我很喜欢他们的数学教学，一直都很崇敬他们。

1956年高中毕业时，由于知道在北京师范大学读大学，吃、住、学费全免，加上对学数学有兴趣

趣,我的第一志愿就是北京师范大学数学系.没想到在大学四年中却赶上多种政治运动,各种经历难以一一描述.

1960年8月毕业后留校任教.头两年我教过电子计算机原理、程序设计,还当过刘绍学教授讲偏微分方程课的助教(半年).这期间我有空时就常常寻找和思考一些自己认为不太难的数学问题.碰巧1961年我发现一个有关计算数学的问题并把它证明出来.于是我试着投了稿,后来在1962年初的《数学进展》上发表了,题目为《关于求逆矩阵方法的一个注记》.

1962年系里派出一些教师到名校(北京大学、复旦大学等)进修学习,也派我到中国科学技术大学(当时在北京市玉泉路)向著名的石钟慈教授(1991年当选为中国科学院院士)进修学习计算数学.可能是因我当时已发表过论文,石老师就让我协助他改学生作业并参加数学系的计算数学教研组活动.这对我的学习有很大帮助,同时也使得我有更多机会向石老师学习和交流.也因此石钟慈教授和我合作完成了论文《某些类矩阵的行列式,特征值以及条件数界限的若干估计》,发表在1965年的《数学学报》上.

1964年暑假从中国科技大学进修回来后,又开始卷入各种政治运动.包括“四清”“文化大革命”和各种劳动锻炼.曾到河北衡水搞“四清”,到山西临汾参加农业劳动,北京师范大学机电厂劳动,清河汽车修配厂劳动等.但从1973年到1978年我断断续续参与了数学系计算机组台式计算机的仿制和造成后与实际结合应用的工作.值得一提的是,由我编写的程序经与北京五金机电厂和北京第二轻工业研究所的有关同志及计算机组的其他同志共同努力完成了“BCX-203小型数控线切割编程机”.该项成果获得1978年全国科学大会奖.

1979年改革开放初期,国家公费让很多单位派知识分子到国外进修学习、访问研究、读研究生等,我有幸成为其中的一员.经由当时系主任张禾瑞教授与他的好朋友——世界知名数学家樊畿(Ky Fan)教授联系推荐我到美国加利福尼亚大学(简称加州大学)圣巴巴拉分校(UCSB, University of California, Santa Barbara)向 Marvin Marcus 进修学习多重线性代数. M. Marcus 当时是《Linear and Multilinear Algebra》杂志的主编.他于1973年出版的《Finite Dimensional Multilinear Algebra, Part I》和

1975 年出版的《Part II》是多重线性代数的经典名著. 我在 UCSB 听 M. Marcus 教授讲课, 参加他举办的讨论班, 从中得到了很好的启发. M. Marcus 教授和我合作发表了论文《Some variations on the numerical range》. 在这期间, 樊熷教授还告诉我一件事, 由 A. W. Marshall 和 I. Olkin 1979 年出版的《Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications》(《控制不等式理论及其应用》) 的书中采用了石钟慈教授和我 1965 年合作论文的两个定理. 这吸引了我对控制不等式理论的兴趣并开始研究它在矩阵上的应用.

1981 年 9 月回国后, 我从事的主要是多重线性代数、控制不等式应用和计算数学的教学、科研、指导研究生及举办研究生讨论班等工作. 我也从事本科生的图论和组合数学的教学和研究工作. 多次在国内外举行的有关会议上作学术报告. 在国内外杂志上先后发表了近 60 篇论文, 证明了一些有一定难度的问题. 在北京师范大学出版社出版了《多重线性代数基础》《控制不等式基础》. 这些工作也获得了有关方面的认同. 我先后成为国际线性代数学会会员, 美国数学会会员, 《Mathematical Reviews》评论员, 并被列入《World Directory of Mathematicians》和《Who's Who in the World》等. 1983 年 5 月任副教授, 1985 年 7 月任教授, 1993 年 12 月任博士生导师. 1997 年 9 月至 2001 年 7 月任北京师范大学数学与数学教育研究所所长. 先后主持和完成了 3 项国家自然科学基金资助项目和 3 项国家教育委员会博士点基金资助项目. 1988 年“多重线性代数及其他”项目获国家教育委员会科学技术进步奖二等奖. 1992 年被国家人事部授予有突出贡献的中青年专家称号, 同年获国务院颁发的政府特殊津贴. 2002 年 10 月退休.

最后对于一同共事的, 有过美好合作的, 给予我很多鼓励和帮助的老师、同事和朋友致以衷心的感谢.

这部文集的出版得到了北京师范大学数学科学学院, 特别是李仲来教授的热情鼓励和不厌其烦的帮助, 还有北京师范大学出版社的大力支持, 在此一并表示衷心的感谢.

王伯英

2012 年 1 月

序 二

时值王伯英教授 75 周岁之际,北京师范大学数学科学学院与北京师范大学出版社决定出版王伯英老师的数学文集. 作为王老师的学生,我得此消息很高兴,并想借这个机会说上几句学生感谢老师的话.

1984 年为报考研究生,我到处收集国内有关线性代数和矩阵理论方面数学家的信息. 第一次见到“王伯英”这个名字是在《数学学报》上,那是王老师和石钟慈教授合写的一篇有关矩阵特征值估计的文章. 得知王老师是位年轻的教授,又刚从美国加亚大学进修访问回来不久,我决定报考他的研究生. 北京师范大学那年的数学研究生考题有相当的难度而且覆盖面广泛. 综合考试一门就包括几乎所有的数学学科. 初试之后,我在茫然中等待……最终,让我万分高兴的面试通知书来了.

5 月的东北,天依然寒气不去. 我乘沈阳开往北京的列车赴北京师范大学面试,这时的北京已经感受到了早春的暖意. 到了北京师范大学校园,天色已近黄昏,但我还是很想能在当晚见到向往的王老师. 找到王老师的住所,轻轻地敲门,门慢

慢地开了。一位面容清瘦的中年男子出现在我的面前，操着浓浓但细细的广东口音。这是我第一次见到王伯英老师。

王老师 1984 年开始招收研究生。首批招收的三位硕士研究生有雷天刚、吴俊(现居加拿大)和我。我在三人中年长，便自然且荣幸地成为王老师所有学生的“师兄”了。北京师范大学有非常好的学习环境。研究生的学习生活紧张而有序。王老师指导的“控制不等式”(Inequalities of Majorization)的讨论班使我开始走上了数学研究之路。这是一门当时较为新颖的数学分支；应该说王老师是引进并且在国内系统地讲授这门学科的第一人。王老师思维缜密，治学严谨。我们论证时每有细微疏忽，都逃不过他的眼睛。如此经过一年多的训练学习，我们掌握了基本的“矩阵功夫”，算是入门了。进入做论文阶段，老师给我的一个研究题目是解决著名矩阵和线性代数学家 M. Marcus 关于矩阵西不变范数的一个猜想。经过王老师的多次指点和几个月的艰苦工作，我终于有些好的想法并写出来给老师看。一日，老师骑着自行车来研究生宿舍(学 11 楼)找我，说我的证明是对的。老师脸上流露出的笑容给了我很大的鼓舞和自信，也让我感到了数学研究的乐趣。经老师的推荐，这篇文章获得了当年北京师范大学研究生论文奖(收录在《北京师范大学学报(自然科学版)》1988 年增刊 2 号上)，并发表在《Linear and Multilinear Algebra》(线性及多重线性代数)杂志上。除了控制不等式外，王老师还把“多重线性代数”这门数学分支引入国内，先是在北京师范大学本科生和研究生中系统讲授，继而又开办了全国暑期多重线性代数讲习班。王伯英教授无疑是这两个数学分支的领军人物。他在北京师范大学出版社出版的《多重线性代数基础》(1984)和《控制不等式基础》(1990)是国内经典的教材，为这两个数学分支的发展起到了巨大的作用。

在北京师范大学三年的研究生学习中，我如饥似渴地钻研多重线性代数和不等式理论，我深知在一位权威教授身边学习的重要性。在这期间，我独自或与老师合作共发表了 5 篇文章。这与老师的指点和培养是分不开的。1989 年经由王老师引荐，我认识了著名数学家樊畿(Ky Fan)先生，并有机会到美国加利福尼亚大学(圣巴巴拉—UCSB)继续学习，从师著名矩阵理论专家 R. Thompson 教授。当时，这里是世界上最好的矩阵及线性代数研究中心，也是王伯英老师 20 世纪 80 年代初进修访问的

地方. 我在加州大学(UCSB)王老师曾经出出入入的数学楼里继续着矩阵理论的研读, 并有许多机会和樊璘教授接触. 樊先生对王老师的数学成果给予充分的肯定和赞扬.

在北京师范大学几年的时光是美好的. 虽然后来离开了北京, 但我从来没有失去和王老师的联系. 我们在学术上的交流与合作更多、更紧密了. 我十分敬重王老师对数学研究的认真态度和深刻的思考能力. 王老师的主要研究方向为多重线性代数和矩阵理论. 他在其他数学领域, 如组合数学、图论、矩阵计算等方面也有很深的造诣, 并解决了一些世界著名的问题. 比如 $0-1$ 矩阵类 $\mathfrak{A}(R, S)$ 的计数问题, 美国的组合论专家 H. Ryser 教授在他的书和文章中几次提到这是一个“相当难的题目”“函数的表达式无疑会非常复杂”. 王伯英老师发表在《中国科学》(1987, 17A(5): 463~468) 和《Discrete Mathematics》(1998, 187(1-3): 211~220) 的文章给出了此类矩阵数的精确计算公式. 在一篇关于矩阵迹的文章中 (SIAM Matrix Analysis and Applications, 1995, 16(4): 1 173~1 183), 王伯英老师用控制不等式理论研究推广了普林斯顿大学教授 E. Lieb 等人的不等式. 他与龚明鹏发表在《Linear Algebra and Its Applications》(1993, 184: 249~260) 的文章统一并推广了一大类有关矩阵特征值和奇异值的不等式. 这些结果被多次引用. 王老师的数学研究成果无疑使中国数学家在这些数学领域的研究得到重视并为中国数学家获得荣誉.

在加州大学完成学业后, 我到佛罗里达一所大学工作. 距离北京更远了, 可回来访问的次数更多了. 虽然每次行程仓促, 却总要找机会见上老师一面. 老师依然话语不多, 可谈起数学来兴致不减当年. 我也人到中年, 闲暇时回想起往事和对自己有影响的人, 王老师自然是最重要的一位. 老师致力于数学研究, 生活俭朴无所多求. 做人做事非常低调谦和, 唯有对数学热爱和执著. 这大致是老师给我的整体印象. 时光荏苒, 转眼老师已过古稀之年. 想当初我读他的研究生时, 老师比我现在还年轻. 今提笔写上几句, 不敢自称为序. 我谨在此, 从遥远的异国他乡, 衷心祝愿老师身体健康.

张福振

2012 年 5 月 18 日于美国佛罗里达州劳德戴堡

Contents



A Note on the Way to Find the Inverse Matrix/1	
Bounds for the Determinant, Characteristic Roots and Condition Number of Certain Types of Matrices/5	
A Iterative Form of Reducing Condition Number/26	
A Inequality of the Sum of Eigenvalues of Hermitian Matrices and Its Application/33	
Relation between Minors and Cofactors of Unitary Matrix /38	
The Bounds of Minimum Eigenvalue Separation of Some Matrices/44	
A Proof of the Closure of Renewal Sequences for Circle- Operation/57	
Some Properties of the Decomposable Element in Grassmann Space/61	
A Necessary and Sufficient Condition of Hermitian Operator in the Tensor Product Space/70	
A Necessary and Sufficient Condition of Non-Negative Definite Operator in the Tensor Product Space/76	
On the Extremum Property of Eigenvalues and the Subspace Incidence Problem/83	
Some Necessary and Sufficient Conditions for High Derivative Operator to be Hermitian/87	
Equivalent Conditions for Elementary Symmetric Function to be Schur-Concave/92	
Precise Number of $(0,1)$ -Matrices in $\mathfrak{A}(R,S)$ /104	
The Index of the Symmetrizer on Tensor Space/111	
Some Variations on the Numerical Range/117	

- Some Necessary and Sufficient Conditions Satisfied by
Decomposable Tensors in Grassmann Spaces/130
- A High Symmetry Class of Tensors with an Orthogonal Basis of
Decomposable Symmetrized Tensors/142
- The Subspaces and Orthonormal Bases of Symmetry Classes of
Tensors/147
- Some Inequalities for the Eigenvalues of the Product of Positive
Semidefinite Hermitian Matrices/158
- Some Eigenvalue Inequalities for Positive Semidefinite Matrix
Power Products/163
- A Trace Inequality for Unitary Matrices/172
- Trace and Eigenvalue Inequalities for Ordinary and Hadamard
Products of Positive Semidefinite Hermitian Matrices/175
- Words and Normality of Matrices/190
- Some Inequalities for Singular Values of Matrix Products/200
- Schur Complements and Matrix Inequalities of Hadamard
Products/206
- On Zero-One Symmetric and Normal Matrices/216
- On Normal Matrices of Zeros and Ones with Fixed Row Sum/224
- Indices and Nonzero Decomposable Elements of a Symmetry
Class of Tensors/236
- On the Precise Number of $(0,1)$ -matrices in $\mathfrak{A}(R,S)$ /246
- On the Singularity of LCM Matrices/256
- Some Inequalities for Sum and Product of Positive Semidefinite
Matrices/263
- Some Inequalities on Generalized Schur Complements/274
- On the Hadamard Product of Inverse M -matrices/286
- Explicit Expressions of Smith's Determinant on a Poset/297
- The Invertibility of LCM Matrices and the Solutions of
Indeterminate Equation $ayz+bzx+cxy=xyz+1$ /309
- The Characterization of Symmetric Primitive Matrices with
Exponent $n-1$ /319
- Bibliography of Papers and Works /331
- Postscript by the Chief Editor /336

目 录



关于求逆矩阵方法的一个注记 /1
某些类矩阵的行列式,特征值以及条件数界限的若干估计 /5
一种降低条件数的迭代格式 /26
关于厄米特阵特征值之和的一个不等式及其应用 /33
酉矩阵的子式与余子式的关系 /38
一类矩阵特征值最小距离的界限 /44
更新序列圈乘运算封闭性的一个证明 /57
反对称张量空间中可合元素的一些性质 /61
张量空间中厄米特算子的一种充要条件 /70
张量空间中一种非负定算子的充要条件 /76
关于特征值的极值性质与子空间的包含问题 /83
高阶导算子为厄米特算子的几个充要条件 /87
对称凸集上初等对称函数为 Schur-凹的充要条件 /92
$(0,1)$ -矩阵类 $\mathfrak{M}(R,S)$ 中矩阵个数的精确数 /104
张量空间对称化算子的指标 /111
数值域的一些变类型 /117
Grassmann 空间中可合张量的一些充要条件 /130
一个有可合对称张量为正交基的高阶张量对称类 /142
张量对称类的子空间和规格化正交基 /147

正半定 Hermitian 矩阵乘积的一些特征值不等式 /158

正半定矩阵幂积的一些特征值不等式 /163

酉矩阵的一个迹不等式 /172

正半定 Hermitian 矩阵的通常积和 Hadamard 积的迹和特征值不等式 /175

矩阵的词和规范性 /190

矩阵乘积的一些奇异值不等式 /200

Hadamard 积的 Schur 补和矩阵不等式 /206

关于 0,1 的对称和规范矩阵 /216

有固定行和的 0 与 1 元素的规范矩阵 /224

张量对称类的指标与非零可合元素 /236

关于在 $\mathfrak{M}(R, S)$ 中 $(0, 1)$ -矩阵的精确数 /246

关于 LCM 矩阵的奇异性 /256

正半定矩阵的和与积的一些不等式 /263

广义 Schur 补的一些不等式 /274

关于逆 M -矩阵的 Hadamard 积 /286

偏序集上 Smith 行列式的显式表达式 /297

LCM 矩阵的可逆性与不定方程 $ayz+bzx+cxy=xyz+1$ 的解 /309

指数为 $n-1$ 的对称本原矩阵的刻画 /319

论文和著作目录 /331

后记 /336