

标准化题型解法导引

刘瘦侠 王伟钰 主编

○ 高中代数(一)



○ 上海科学普及出版社

责任编辑 顾蕙兰 倪汉虞

标准化题型解法导引

——高中代数(一)

刘瘦侠 王伟钰 主编

上海科学普及出版社出版发行

(上海南昌路47号)

华东师范大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 89,000

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数 1—20,000册

统一书号: 7128·028 定价 0.64元

ISBN 7-5427-0046-4/G·25

495231



90495231

为了拓宽学生的知识视野，开发智力，培养能力，指导和帮助他们熟悉、了解并掌握标准化题型的解法，以适应教育改革不断深入发展的需要，根据上海教育学院数学系的研究课题，我们组织有经验的教师编写了本书，供广大教师在教学中参考。

由于本书编排与现行高中数学统编教材（甲种本）同步，程度要求两者大致相仿，而题型又完全不同于教材，故可以充实和丰富教学内容。

我们力求使本书起点低一些，坡度平缓些，最终能达到一个较为令人满意的水平。这样做，也许更能适合各种层次的读者的需求。

这是一次尝试，我们期待能成功。但是限于编者的水平和成书时间仓促，差错和疏漏自是难免，尚希读者批评指正。

本书由刘瘦侠、王伟钰主编，由孙国和、冯涵芳、张杰、勇清、蒋国华、薄幼培等编写，张正之、谈国大审阅了全部内容。





目 录

高中代数第一册

第一章	幂函数、指数函数和对数函数	(1)
一	集合	(1)
二	映射与函数	(11)
三	幂函数	(18)
四	指数函数与对数函数	(36)
第二章	三角函数	(48)
一	任意角的三角函数	(48)
二	三角函数的图象和性质	(64)
第三章	两角和与差的三角函数	(76)

高中代数第二册

第一章	反三角函数和简单三角方程	(104)
一	反三角函数	(104)
二	简单三角方程	(116)

高中代数 第一册

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

一 集 合

1.1 集合

阅读指导

1. 集合与点、直线、平面等一样是个不定义的概念，是数学中的原始概念。关于集合的基本理论是近代数学最基本的内容之一。

2. 集合的特性：(1) 元素的确定性；(2) 元素的互异性；(3) 元素的无序性。

3. 集合的分类：按集合中元素个数来分，有无限集与有限集。

4. 集合的表示法

(1) 列举法：把集合中的所有元素一一列举出来（或有代表性的元素），写在大括号内表示集合的方法。

(2) 描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，例如{直角梯形}。

5. “ $\in$ ”与“ $\notin$ ”只表示元素与集合间的关系。

解法示范

例 1 给出的下列四个对象：① 好人；② 很大的数；
③ 较小的角；④ 某校的学生. 其中能够构成集合的 (A)

- (A) 只有一个； (B) 只有两个；
(C) 只有三个； (D) 有四个.

解 “好人”、“很大的数”、“较小的角”属性不明确，都不能构成集合. 而“某校的学生”能够成集合，因为取得某校学籍的人就是该校的学生，否则就不是，故选 (A). 这种从已知条件出发，通过运算、推理判断，得出与选择支相同的结果，从而作出选择的方法叫**直接法**. 这是解选择题的常用方法，但它不能充分利用选择支所提供的信息.

例 2 下列命题：

① $\{2, 3, 4, 2\}$ 是 4 个元素组成的集合；

② $\{0\}$ 表示仅有一个“零”组成的集合；

③ $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 2, 1\}$ 是两个不同的集合；

④ $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$ ；

⑤ 集合的表示法是唯一的.

其中正确的 (D)

(A) 全部； (B) 只有三个；

(C) 只有二个； (D) 只有一个.

解 由集合的元素的互异性知①是三元素集合；由集合元素的无序性知③中的两集合是相同的集合；由符合“ $\in$ ”的含意知，它不能表示集合间的关系，只能表示元素与集合间的关系； $\{1, 2\}$ 可表示为 $\{x | (x-1)(x-2)=0\}$ 或 $\{x | x < 3, x \in \mathbb{N}\}$ ，故命题①、③、④、⑤都不正确，而只有命题②是正确的，因此应选 (D).

实践与思考

1. 下列写法中:

- ① {比5略大的数}; ② {全体整数};
③ {2, 4, 6, ..., 20}; ④ $\{(x, y) \mid |y| = |x|\}$.

能正确表示集合的只有 ()

- (A) ①、②; (B) ②、③; (C) ②、③、④; (D) ①、③.

2. 判断题 (对的打“√”, 错的打“×”)

(1) $\{y=x\}$ 表示坐标平面上第一、第三象限的角平分线上的点组成的无限集; ()

(2) {质数} 中的元素都是奇数; ()

(3) $\{x^2+2>3\}$ 表示由一个不等式组成的集合; ()

(4) $\{x \mid x^2+2>3\}$ 表示大于1、或小于1的数组成的集合; ()

(5) 若 $a \notin N$, 则 $a \notin Z$; ()

(6) 若 $a \notin \{2k, k \in N\}$ 则 $a \in \{2k+1, k \in N\}$. ()

3. 用另一种形式表示下列集合:

(1) {奇数}, _____;

(2) {2, 4, 6, 8, ...}, _____;

(3) $\{x \mid -2 < x < 3, x \in N\}$, _____;

(4) $\left\{a \mid \frac{6}{5-a} \in N, a \in Z\right\}$, _____;

(5) $\{(x, y) \mid x+y=6, x, y \in N\}$, _____.

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集、2. 交集

阅读指导

1. “子集一定是由原来的集合中的部份元素组成的集

合”这句话是否正确？为什么？（请同学们自己回答）。

2. 空集是任何集合的真子集吗？为什么？

3. 空集是一个特殊的集合，它是不含任何元素的集合，记作 $\emptyset$ ，但不能记作 $\{\emptyset\}$ ，为什么？（同学思考）。

4. $\subset$ 、 $\subseteq$ 、 $=$ 、 $\not\subset$ 、 $\not\subseteq$ 是表示集合间关系的符号。

5. 两个集合的交集一定是原来两个集合的真子集吗？

解法示范

例 1 下列命题中：

① 若 a 是集合 A 中的一个元素，也是集合 B 的元素，则 A 是 B 的子集；

② 若集合 A 的某一元素是集合 B 的元素，集合 B 中的某一元素是集合 A 中的元素，则 $A=B$ ；

③ 由集合 A 、 B 的所有公共元素组成的集合是 A 与 B 的交集，

正确的是 (C)

(A) ①；(B) ②；(C) ③；(D) ②、③。

解 命题①中仅指“一个元素”是不能够确保 A 是 B 的子集，故①不成立；命题②中的“某一元素”若改为“每一个元素”才能确保 $A=B$ ；命题③显然是正确的，所以应选(C)。

例 2 设 $M=\{(x, y) | y=3-x\}$ 、

$$N=\{(x, y) | y=x^2+2x-1\}$$

则 $M \cap N$ 是 (B)

(A) $\{(-4, 7)\}$ ； (B) $\{(-4, 7), (1, 2)\}$ ；

(C) $\{(-1, 4)\}$ ； (D) $\{(1, 2), (-3, 6)\}$ 。

解 令 $x=-4, y=7$ 代入 $\begin{cases} y=3-x \\ y=x^2+2x-1 \end{cases}$ 适合，

$$\therefore (-4, 7) \in M \cap N,$$

因此, (A)、(B)可能正确, (C)、(D)错误.

同理以 $x=1, y=2$ 代入 $\begin{cases} y=3-x \\ y=x^2+2x-1 \end{cases}$ 适合,

$$\therefore (1, 2) \in M \cap N.$$

因此选(B).

注意:

(1) 这种通过对选择支是否满足题设条件的讨论, 从而判定该选择支是否正确的方法叫**逆推法**;

(2) 本题也可用直接法解之. 即解方程组的结果与选择支相对照, 从而确定该选的结论.

例 3 设 $M = \left\{ n \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \right\}, N = \{ n \mid n \neq 3k, k \in \mathbb{Z} \}$, 则 $M \cap N$ 是 (D)

(A) $M_1 = \{ n \mid n = 3k \pm 1, k \in \mathbb{Z} \};$

(B) $M_2 = \{ n \mid n = 4k \text{ 或 } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \};$

(C) $M_3 = \{ n \mid n = 6k \pm 1, k \in \mathbb{Z} \};$

(D) $M_4 = \{ n \mid n = 6k \pm 2, k \in \mathbb{Z} \}.$

解 不妨取一特殊值 2, 显然 $2 \in M \cap N$, 检验 2 仅属于 M_4 而不属于 M_1, M_2, M_3 , 从而判定应选(D).

注意: 这种在满足条件的众多元素中, 恰当地选出一个或几个元素, 排除错误选择支 (也需运算、变形和推理), 从而作出正确选择的方法叫做**特殊值法**. 运用此法必须: 结论是唯一确定的. 所选元素不能是四个选择支中的共同元素. 这时不必排除错误选择支就能作出选择, 否则必须排除错误选择支后才能作出选择. 例如若取特殊值 4, 显然 $4 \in M \cap N, 4 \in M_2$, 但不能选(B).

实践与思考

1. 方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的解集为 A ; 小于 10 的正偶数的集合为 B ; 小于 10 的非负实数集为 C ; 最小的质数集为 D ; 空集 $\emptyset$, 则以上五个集合应满足 ()

(A) $\emptyset \subset A \subset B \subset C \subset D$; (B) $\emptyset \subset D \subset A \subset B \subset C$;
(C) $\emptyset \subset B \subset C \subset D \subset A$; (D) 以上结论都不对.

2. 设 $M_1 = \{x | x = 4k \pm 1\}$; $M_2 = \{x | x = 2k + 1\}$;
 $M_3 = \{x | x = 2k - 1\}$; $M_4 = \{x | x = 2k \pm 1\}$ (以上 $k \in \mathbb{N}$) 则以下关系成立的是 ()

(A) $M_1 = M_4, M_2 = M_3$; (B) $M_1 = M_2, M_3 \subset M_4$;
(C) $M_1 = M_3, M_2 = M_4$; (D) $M_1 \cap M_4 = M_2$.

3. 给出下列四个等式

- ① $\{\text{梯形}\} \cap \{\text{平行四边形}\} = \emptyset$;
② $\{\text{正方形}\} \cap \{\text{菱形}\} = \{\text{正方形}\}$;
③ $\{\text{等腰梯形}\} \cap \{\text{直角梯形}\} = \{\text{矩形}\}$;
④ $\{\text{矩形}\} \cap \{\text{正方形}\} = \{\text{矩形}\}$.

其中成立的是

- (A) 只有①; (B) 只有①、②;
(C) 只有三个; (D) 0 个.

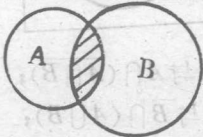
4. 根据给出的图与相应关系, 作出判断 (正确的打“√”, 错误的打“×”)

图				
关系	$A \cap B \subset A$	$A \cap B = B$	$A \cap B = \emptyset$	$A \cap B \cap C \subset A \cap B$
判断				

3. 并集、4. 补集

(B) 阅读指导

1. 并集与交集的比较

名称	定义	示意图	数学表达式
并集	两个集合的所有元素组成的集合		$A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
交集	两个集合的所有公共元素组成的集合		$A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

2. 上表中, 数学表达式里的“ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”应作如下理解, 即有三种可能: ① $x \in A$, 但 $x \notin B$; ② $x \in B$, 但 $x \notin A$; ③ $x \in A$ 且 $x \in B$.

3. 根据集合元素的互异性, 当两个集合有公共元素时, 在并集中只能算一个元素.

4. 几个关系式:

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A, \\ A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A.$$

5. 补集是对给定的全集而言的, 所以全集不同, 补集也不同.

解法示范

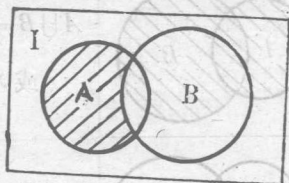
例 1 设 $A = \{x | x^2 - px + 15 = 0\}$; $B = \{x | x^2 - mx + q$

$=\{0\}$, 且 $A \cup B = \{2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, 则 p, m, q 的值依次为

- (A) $-8, -5, 6$; (B) $8, 5, 6$;
(C) $2, 3, 5$; (D) 以上结果均不对.

解 运用韦达定理和给出条件, 易于求得: $p=8, m=5, q=6$, 故选(B).

例 2



图中阴影部分表示的集合为

(D)

- (A) $A \cup (\overline{A \cup B})$ 与 $A \cap (\overline{A \cap B})$;
(B) $A \cup (\overline{A \cup B})$ 与 $\overline{B} \cap (A \cup B)$;
(C) $A \cup (\overline{A \cup B})$ 与 $\overline{B} \cap A$;
(D) $\overline{B} \cap A$.

注意:

(1) 本题中判断命题错误比判断命题正确要容易得多. 所以根据观察推理, 先排除错误的选择支, 从而获得应选的正确选择支. 这种间接解选择题的方法叫**排除法**.

(2) 作出正确判断, 选出正确结果, 固然完成了解题任务, 但有时, 不能满足于此, 还得深入思考. 例如, 本题中该图的数学表示式有几种? 选择支的各集合所表示的图形应是怎样的?

(3) 学习子集、交集、并集和补集时应当多用图形, 能加深对知识的理解并有助于解题.

实践与思考

1. 设 $I = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$
 则 $\bar{A} \cup \bar{B}$ 是 ()

- (A) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$; (B) $\{3, 4\}$;
 (C) $\{3, 4, 8\}$; (D) $\{8\}$.

2. 设 $I = \{\text{三角形}\}$, $A = \{\text{直角三角形}\}$,
 $B = \{\text{等腰三角形}\}$, $C = \{\text{正三角形}\}$,
 $D = \{\text{斜三角形}\}$, 则下列关系不正确的是 ()

- ① $A \cup D = I$, ② $A \cap D = \emptyset$,
 ③ $C \cup B \cup D = \bar{A}$, ④ $C \subset B \subset D$.

- (A) 只有③; (B) 只有③、④;
 (C) 只有②、③、④; (D) 全部不正确.

3. 设 $I = R$, 则 ① $\bar{Z} = Q$ 、② $\bar{Z} = \bar{Q}$ 、③ $\bar{Q} \cap \bar{Z} = I$ 、
 ④ $(Q \cap Z) \cup (\bar{Q} \cup \bar{Z}) = Z$ 的关系式中成立的 ()

- (A) 只有一个; (B) 只有两个;
 (C) 只有三个; (D) 全部.

4. 若 A, B 是两互不相等的非空集, 且是全集 I 的真子集,
 则

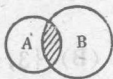
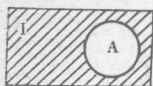
- ① $A \subset A \cap B \subset A \cup B$, ② $B \subset \overline{A \cup B}$,
 ③ $\bar{A} \cup B \not\subset B \cup A$, ④ $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

四个关系式中 ()

- (A) 只有①、③正确; (B) 只有②、④正确;
 (C) 只有①、④正确; (D) 只有③、④正确.

习 题 一

1. 在各图下面配上相应的关系式的编号:



() () () ()

① $A \subset B$; ② $M = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;

③ $M = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$; ④ $M = \{x | x \notin A\}$.

2. 直角坐标平面内第一、第三两象限的点集为

3. 由(1,5)、(2,3)、(3,2)、(5,1)组成的集合为

4. 设 $A = \{(x, y) | x + 2y = 5\}$, $B = \{(x, y) | 2x - y = 3\}$

则 $A \cup B =$, 它的几何意义是

$A \cap B =$, 它的几何意义是

5. $\{a, b, \underline{\hspace{1cm}}\} \cap \{c, d, \underline{\hspace{1cm}}\} = \{b, c, e\}$.

6. $\{a, b, \underline{\hspace{1cm}}\} \cup \{m, n, b, p\} = \{a, b, c, d, m, n, p\}$.

7. $\{a, b, \underline{\hspace{1cm}}\} \cap \{d, c, e, \underline{\hspace{1cm}}\} = \{a, b, e\}$.

8. 给出的对象为: ① 难题; ② 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内的解; ③ 坐标轴上的点; ④ 很多代数式.

其中能组成集合的是

(A) 仅③; (B) 仅②、④; (C) 仅①、②; (D) 仅②、③.

9. 设 $I = R$, A, B, C 都是 R 的子集, 且 $A = \bar{B}$, $B = \bar{C}$, 则 A 与 C 的关系是

(A) $A \subset C$; (B) $A \supset C$; (C) $A = C$; (D) $A = \bar{C}$.

10. 若集合 X 满足关系 $\{1, 2, 3\} \subset X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则

集合 X 的个数为 ()

(A) 3个; (B) 6个; (C) 7个; (D) 16个.

11. 某生写出如下四个关系式:

① $\{2\} \in \{x|x \leq 10\}$; ② $\emptyset \subset \{x|x \leq 10\}$;

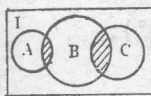
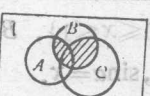
③ $\{4,5,6\} \notin \{2,3,4,6,7,8\}$;

④ $0 \subset \{x|x \leq 10\}$, 其中写得正确的是 ()

(A) 只有①、②; (B) 只有②、④;

(C) ②、③; (D) 没有.

2. 根据下列四图的阴影部份所表示的集合, 写出的相应表达式, 哪个是正确的? ()

			
$(A \cap B) \cap (B \cap C)$	$\overline{A \cup B}$	$A \cap B \cap C$	$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap A \cap B)$
(A)	(B)	(C)	(D)

二 映射与函数

1.3 映射

阅读指导

1. 构成映射的条件是:

(1) 两个集合: 原象集合 A 与象集合 B .

(2) 一个对应法则 f .

2. 映射的注意点: 集合 A 是原象集, 象集是集合 B 的

子集;有些映射,集合 B 中每一个元素都有原象,有些映射,集合 B 中的元素不一定都有原象。

解法示范

例 给出以下四个对应:

① $A = \{a | a \text{ 是三角形的内角}\}, B = \{y | y \in R\},$

$f: a \rightarrow y = \operatorname{tg} a;$

② $A = \{m | m \in Z\}, B = \{y | y = 0, 1\},$

$f: m \rightarrow y = \begin{cases} 0, & \text{当 } m = 2n \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } m = (2n+1) \text{ 时} \end{cases} \quad m, n \in Z;$

③ $A = \{x | 0 < x < 1\}, B = \{y | 0 < y < 1\},$

$f: x \rightarrow y = x^2;$

④ $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}, B = \{a | 0^\circ \leq a < 180^\circ\},$

$f: x \rightarrow a, \sin a = x.$

其中为映射的

(B)

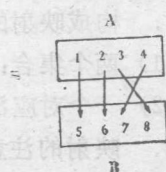
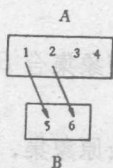
(A) 只有①、②、③; (B) 只有②、③;

(C) 只有②、③、④; (D) 四个都不是。

解 容易看出对应③是映射,所以(D)是错的.其余三个选择支中都有②、③,因此只要看①、④是否是映射,显然对应①中 $\operatorname{tg} 90^\circ$ 是不存在的,对应④中一个原象有两个象,所以①④都不是映射,因此应选(B)。

实践与思考

1. 给出下列四个对应(自左至右,依次为①、②、③、④),



其中构成映射的是

- (A) 只有①、②; (B) 只有①、④;
(C) 只有①、③、④; (D) 只有③、④.

2. 已知下列四个对应:

① $A = \{x | x = 1, 2, 3, 4\}, B = \{y | y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\},$

$f: x \rightarrow y = \frac{1}{x};$

② $A = \{x | x = 1, 4, 9, 16\}, B = \{y | y = 1, 2, 3, 4\},$

$f: x \rightarrow y$ 是 x 的平方根;

③ $A = \{x | x \geq 1\}, B = \{y | y \in \mathbb{R}\}, f: x \rightarrow y = 1 - x^2;$

④ $A = \{x | x \in \mathbb{R}\}, B = \{y | y \in \mathbb{R}\}, f: x \rightarrow y = x^2 + 2x - 3.$

其中构成映射的是 ()

- (A) 全部是; (B) 只有①、③、④;
(C) 只有③、④; (D) ③、④中只有一个是.

3. 设 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射, 则下面的命题为真命题的是 ()

- (A) A 中的每一个元素在 B 中必有象;
(B) B 中的每一个元素在 A 中必有原象;
(C) B 中的每一个元素在 A 中的原象唯一;
(D) A 中的不同元素的象必定不同.

1.4 函数

阅读指导

1. 用映射来定义函数, 必须有两个数域 A, B , 一个对应法则, $f: A \rightarrow B$, 且 B 必须是象的集合.

2. 数轴上的一部份可以用集合表示, 也可用区间表