



青年学者文库

康德的数学哲学

Kant's Philosophy of Mathematics

巴 何 飞 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



青年学者文库

康德的数学哲学

Kant's Philosophy of Mathematics



巴 川 心



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

康德的数学哲学/包向飞著. —武汉:武汉大学出版社,2013. 1
青年学者文库
ISBN 978-7-307-10331-3

I. 康… II. 包… III. 康德, I. (1724 ~ 1804)—数学哲学—研究
IV. ①B516. 31 ②01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 289113 号

责任编辑:顾素萍 责任校对:刘 欣 版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:武汉中远印务有限公司

开本:880×1230 1/32 印张:7 字数:185 千字 插页:2

版次:2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-10331-3/B·366 定价:20.00 元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。



阅读说明



为了使本书增加一些趣味性，我对本书中涉及的一些重要人物插录了小传。通过这些小传，人们可以了解更多的背景知识，从而阅读本书更加顺畅。当然，关于人物传记性的内容不能无中生有，在人物传记的材料方面，我主要依据的是德文版的《维基自由百科》，并对相关的内容进行了编译和整理，因此，在这些小传里，省去了详细的注解，但是如果涉及其他书本的材料，则一一作了脚注。在阅读时，人们可以完全不读这些小传，不会影响阅读的完整性。在本书后还有若干附录，旨在从数学技巧方面展示在本书中只简单地作为结论出现的内容。也可以略去不读。

目 录

引 言	1
一、康德和数学哲学	1
二、康德数学哲学的研究状况	4
第一章 康德和数学哲学中的主要人物和流派	13
第一节 康德和逻辑实证主义	14
一、先天综合命题在康德哲学中的含义	14
二、逻辑实证主义对分析命题和综合命题的重新界定 及其疑难	16
三、几何学的命题是先天综合命题还是分析命题？	18
四、分析命题的种类	22
第二节 康德与弗雷格	25
一、弗雷格与逻辑实证主义	25
二、弗雷格与康德	28
三、几何学的算术化和分析地定义自然数	30
四、弗雷格的困境——罗素悖论	34
五、数学命题是重言式的分析命题——一个缺少根据的 断言	35
第三节 康德和希尔伯特	43

一、作为康德主义者的希尔伯特	43
二、希尔伯特计划	47
三、哥德尔证明及其意义	61
四、哥德尔与逻辑实证主义与康德	64
第四节 康德和柏拉图主义	76
一、柏拉图主义关于数学的基本观点	76
二、康德和柏拉图主义者在对待数学基础方面的异同	78
三、逻辑能毫无顾忌地飞跃可能经验吗?	80
四、波粒二象性并不能回答双缝实验所引起的逻辑问题	83
第五节 康德和直觉主义	85
一、在数学哲学方面直觉主义与康德的联系及区别	85
二、直觉主义的问题	91
第六节 康德和维特根斯坦	93
一、维特根斯坦是如何看待数学中的一致性问题	93
二、康德和数学中的一致性问题	99
小 结	110
 第二章 在现代数学背景下的康德的数学哲学	118
第一节 康德的几何观及其面临的问题	118
一、康德的几何观	118
二、康德的几何观所面临的问题	120
第二节 康德的空间	122
第三节 对康德几何观所面临的诘难的回答	124
一、康德与“非欧几何和高维几何”	124
二、几何学在何种意义上讲是先天的	129
三、几何学是规定空间属性的一门科学吗?	131
第四节 对赖欣巴哈的康德批评的一些反驳	134
一、反驳“数学家的几何学是分析性质的”	134
二、反驳“物理的几何学必然是经验的几何学”	136

三、反驳“几何关系是可以视觉化的”	138
第五节 相对论与康德的“时空观和几何观”	140
第六节 纯粹几何学和应用几何学	144
第七节 对一些概念的澄清	147
一、纯直观空间和欧几里得空间	148
二、视觉空间和纯直观空间以及欧几里得空间	148
小 结	149
 第三章 现代数学中的连续性及其问题	151
第一节 现代数学中的连续性	152
第二节 傻瓜的观点——对连续性的疑问	155
一、对实数连续性的疑问	155
二、对“点集”的连续性的疑问	156
第三节 现代测度论对以上疑问的回答与现代测度论 带来的怪异情况	159
第四节 连续统问题	162
 第四章 建基在纯直观上的数学	165
第一节 作为“一般本质”的理想化的规定与注意力的 方向	166
一、“自由变更”作为获得“理想化的规定”的一种方法	166
二、“物理刺激”与“注意力的方向”	169
第二节 在建基于纯直观的数学中实数集只作为标记集	175
第三节 来源于纯直观的“连续”如何获得自己的 可操作性	177
第四节 “建基在纯直观上的数学”如何看待证明	181
一、数学的本质与证明	181
二、“理想化的规定”和证明	186

结 语	192
参考文献	194
附录一 对无穷小量的数学处理	199
附录二 用单位圆获得三角函数公式	202
附录三 用傅立叶级数获得 π 的展开式和求解伯努利难题 ...	205
附录四 对连续统假设的一个否定性说明的尝试	210

引言

一、康德和数学哲学

1. 康德数学哲学在其整个哲学中的地位

康德对数学的讨论在他的整个著作中所占的比重并不大。除了在《纯粹理性批判》的《先验感性论》中，康德对数学有相对比较集中的讨论外，其他的地方都是些零星的讨论，并且，在这些讨论中，数学也并不是真正的主角，比方说，在《纯粹理性批判》的《导言》中康德主要是利用数学来表明在人类的知识中存在着先天综合判断。康德说：“不难指出，在人类知识中会现实地有这样一些必然的和在严格意义上普遍的、因而纯粹的先天判断。如果想从科学中举出一个例子，那么我们只需把目光投向一切数学命题；”^①而在《纯粹理性批判》的《先验方法论》的第一节中，数学执行的主要是一个参照系的功能，康德的目的是通过对比哲学知识和数学知识，

^① [德]康德·纯粹理性批判·邓晓芒，译·杨祖陶，校·北京：人民出版社，2004：B5.

从而更清楚地向人们表明纯粹理性的运用范围和能力界限。总之，康德的目的并不是要专门为数学建立起一种哲学；康德的数学哲学是为他的整个批判哲学服务的。但这一切也并不意味着康德的数学哲学在康德的整个哲学中是不重要的。“数学”，在康德那里，尤其是在康德的《纯粹理性批判》里，稍微夸张一些地说，起着范例和参照系的作用。范例表达着康德的工作所想企及的目标；对于参照系，虽然我们并不需要时刻关注它，但是没有了它，我们也就没有了对比的标准。康德在《导言》中说：“于是纯粹理性的真正课题就包含在这个问题之中：先天综合判断是如何可能的？”^①可见，存在着“先天综合命题”对康德哲学来说是多么的重要。而正是数学给我们提供了一个光辉的范例，因为在康德看来，数学命题都是先天综合命题。如果说连在数学中都不存在先天综合命题，那么康德的“在形而上学中应该包含先天综合知识”的论证就会显得虚弱得多，不可信得多。美国的数学哲学家 M. 克莱因 (Morris Kline, 1908—1992) 在其《数学与知识的探求》一书中说：“……他 (康德) 将数学真理的存在作为其哲学的中心支柱。”^②德国数学家希尔伯特 (David Hilbert, 1862—1943) 也在他的《论无限》中说，对数学和逻辑关系的讨论，是康德学说的主要部分。^③可见，在这些数学 (哲学) 家眼里，数学哲学在康德的批判哲学中处于中心地位。当然，

① [德]康德：《纯粹理性批判》，邓晓芒，译，杨祖陶，校，北京：人民出版社，2004：B20。

② [美]克莱因 M. 《数学与知识的探求》，刘志勇，译，上海：复旦大学出版社，2005：18。

③ 参见：大卫·希尔伯特：《论无限》，/[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南：《数学哲学》，朱水林，等，译，北京：商务印书馆，2003：220。希尔伯特的原话是这样的：“康德教导我们——而且这是他学说的主要组成部分——数学处理的题材是与逻辑无关地被给定的。”

从心理学的角度来看，数学家眼中更容易看到和数学有关的东西，所以他们的观点我们并不能十分严肃地对待，更不能把他们的观点看成定论，但是，至少我们得承认康德的数学哲学在康德的整个学说中并不是不重要的。显然，研究康德的数学哲学是研究康德哲学的重要组成部分。尤其是在康德的道德哲学逐渐成为康德研究焦点的今天，对康德数学哲学的研究就显得越发重要了。毕竟，对哲学的研究并不是一项追逐时髦的活动。

2. 康德数学哲学在数学哲学中的地位

康德虽然对数学的讨论与其整个哲学著述相比并不是很多，但是，在数学哲学中，很多主要人物和流派都与康德有着密切的联系。这是一个非常引人注目，并且值得注意的现象。希尔伯特，一般被认为是一个形式主义者，但是，在有限算术方面他却表现得像是一个彻头彻尾的康德主义者，他时刻谨记康德的告诫，不过，为了能够涵盖整个经典数学，他给有限算术添加了“理想元素”。弗雷格(Gottlob Frege, 1848—1925)，可以被认为是一个逻辑主义者和柏拉图主义者，在算术方面，他是康德的坚决反对者，但是他却完全接受康德关于几何命题是先天综合命题的观点。布劳威尔(Luitzen E. J. Brouwer, 1881—1966)，出名的直觉主义者和建构主义者，反对康德的几何观，在算术上却是一个康德算术观的追随者和支持者。逻辑实证主义者极力地反对康德的“算术和几何的命题是先天综合命题”的观点，而他们和康德的联系却是显而易见的，尽管是作为完全对立的一方。我们可以毫不夸张地说：在数学哲学中，无论你是否赞同康德的数学观，康德的数学哲学本身仍然是一种严肃的、真正的数学哲学。康德对数学的讨论无疑是数学哲学中的经典文献，它不仅是我们思想的出发点，是供我们研究和批判的对象，而且，对现今数学哲学中的疑难，康德的数学观仍然可

以给我们提供很多建设性的启发。

二、康德数学哲学的研究状况

虽然数学哲学中的许多主要人物和流派都与康德有着思想上的联系，但是他们和康德相同的一面却经常被当今的人们所忽略，而他们和康德不同的地方却经常被后来的研究者所夸大。对于这种现象，除了用“学术中的流行”来解释外，仿佛很难找到其他太合理的解释，比方说希尔伯特、弗雷格等经常被解释为康德数学哲学的坚决反对者^①。结果是，在现代数学的影响下，有些现代的学者对康德的数学哲学是不屑一顾的。如果说现在对康德数学哲学还存在一些研究，那么基本上都是些“否定性的、批驳性的”研究，也就是说，是一些对康德数学观的否定和非难。在这里，我引用一些段落来表明这种状况（在这些引言中，有的只是被引用者对康德数学哲学的处境的总结，但它们并不代表被引用者的基本观点）。弗里德曼（Michael Friedman）在《康德和精确科学》（*Kant and the Exact Sciences*）一书中如下地总结了康德几何观的处境：“自从20世纪早期的几何学哲学家像罗素、卡尔纳普、石里克和赖欣巴哈的重要著作问世以后，康德的关于几何学的批判理论已经看起来不是很有吸引力了。在他们的著作出现之后，以及在黎曼、希尔伯特和爱因斯坦的数学成果出现以后，而罗素他们也是从这些数学家获得启发的，康德的几何观看起来，说得好听一点儿，有些古色古香，说得不好听一些，有些愚蠢。康德的几何学是建基在我们的时空直观之

^① 任何学问中都有流行现象，说得好听一些是“时代潮流”，这种现象本也无可厚非，但是对于一个以反思为其主要目的的学问来说，追逐时髦就显得很不恰当。

上的设想看起来完全是错了……”^①上面提到的美国的数学哲学家 M. 克莱因也在他的著作《数学与知识的探求》中不无讽刺地说：“康德在哲学上的大胆为其几何学上的鲁莽所超越，因为尽管他从来没有走出其东普鲁士的故乡柯尼斯堡城十英里之外，他仍能确定关于世界的几何学。”^②德国著名的康德专家奥特弗里德·赫费 (Otfried Höffe) 在其《康德》一书中这样总结说：“在近代的研究中对数学的先天综合性质的批评几乎成了普及性的知识财富。”^③从这些学者们的总结和评论中我们可以清楚地看到，康德的数学哲学在今天是如何被研究的了。当然，我的意思并不是说康德的数学哲学不应该受到非难和批评；恰恰相反，我们认为批判是哲学的主要任务之一。但是，在对康德数学哲学的一片声讨声中，借助现代几何哲学家的观点和现代数学对康德的批驳添砖加瓦并不是一件很值得夸耀的事情，这样做很难摆脱百犬吠声之嫌。我个人的观点是：哲学的重大意义恰恰在于：在人们都认为是正确的地方提供合理的批评；在人们都认为是错误的地方，提供合理的辩护，之所以如此，因为我们经常会思想懒惰，人云亦云。

对于康德的数学哲学，也存在一些“其他类型”的研究，这样

① 英语原文是：“Since the important work of early twentieth-century philosophers of geometry such as Russel, Carnap, Schlick and Reichenbach, Kant's critical thoery of geometry has not looked very attrative. After their work and the work of Rieman, Hilbert, and Einstein from which they drew their inspiration, Kant's conception is liable to seem quaint at best and silly at worst. His picture of geometry as somehow grounded in our intuition of space and time appears thoroughly wrong ...”参见：Michael Friedman. Kant and the Exact Sciences. Massachusetts and London: Harvard University Press, 1992: 55.

② [美]克莱因 M. 数学与知识的探求. 刘志勇, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 17.

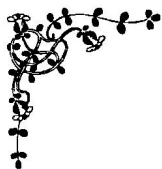
③ [德]奥特弗里德·赫费. 康德: 生平、著作与影响. 郑伊倩, 译. 北京: 人民出版社, 2007: 51.

的研究几乎都是由康德专家在做。在这些研究中，当然也不乏对康德数学哲学的精辟见解，但是这些研究康德的学者面对的是整个的康德哲学，所以，他们对康德数学哲学的研究是零星的，而他们的目的又往往是力图阐明康德的数学观在康德哲学内部的作用和意义。像康德自己一样，他们的注意力并没有放在数学哲学方面。有的康德学者主要是从历史的角度来研究康德的数学哲学，比方说康德的时空数学观与牛顿的、莱布尼茨-沃尔夫的比较，所以他们也很少照顾到在现代数学中所发生的事情，进而做一些有建设性的比较研究。还有些康德学者所做的研究是用现代数学的方法与视角阐发一些康德数学哲学的问题。我们上面引用的 Michael Friedman 就是这样的一位学者，他说：“我们不应该运用我们现代的逻辑概念来蔑视早期的空间理论，认为它们不值一提；我们应该把现代的逻辑概念作为工具来阐明和解释这些理论……”^①虽然这些研究都是一些很有意义的研究，但是后果也是显然的，面对近现代数学哲学家，比方说像赖兴巴哈 (Hans Reichenbach, 1891—1953) 这样的几何哲学家，对康德数学观的诸多批评，他们的声音就显得很微弱，以至于给人们这样一种感觉：康德的数学观不仅是过时的，而且是完全错误的。

在本书中，我将力图表明：康德的数学哲学并不是陈列在博物馆里的仅供观瞻的东西，它并不是“落后”的见证，也不像其他古董一样只具有一些“文化和收藏”的价值；康德的数学哲学至今还具有不一般的生命力。我认为，我们应该抛弃一些现代几何哲学家的偏见和骄傲；像大数学家希尔伯特和布劳威尔一样，深刻地理解康德的告诫，严肃地对待数学哲学中的问题。也许这样，我们能对

① 英语原文是：“Instead of using our modern conception of logic to disparage and dismiss earlier theories of space, we should use it as a tool for interpreting and explaining these theories ...”参见：Michael Friedman. *Kant and the Exact Sciences*. Massachusetts and London: Harvard University Press, 1992: 56.

现代数学哲学中存在的疑难获得一些通向解答的线索。



插录 康德小传

康德(Immanuel Kant), 1724年4月22日生于柯尼斯堡(Königsberg), 1804年2月12日死于柯尼斯堡。康德对于柯尼斯堡, 真是生于斯, 长于斯, 死于斯。康德在他的一生中, 只是短暂地离开过柯尼斯堡。柯尼斯堡现在叫加里宁格勒(Kaliningrad), 加里宁格勒是加里宁格勒州的州府, 它是俄罗斯联邦最小的州, 它位于俄罗斯的西部边境。因此有些人认为, 康德应该算作俄罗斯人。这样的看法是没有任何道理的, 因为第一, 柯尼斯堡在当时属于普鲁士; 第二, 康德的活动和影响都在说德语的文化圈内。康德大概活了80岁, 在那个年代, 绝对属于高龄。康德一般被认为是一个启蒙哲学家, 但是, 毋庸置疑, 康德是西方最重要的哲学家之一。从哲学史的角度上来看, 康德的著作《纯粹理性批判》标志着哲学史的一个重要的转折点和现代哲学的开始。康德不仅在知识论方面影响巨大, 在伦理学和美学方面, 康德哲学所引发的讨论至今也没有停息。



康德的父亲是一个制革师父, 康德的母亲也出生于制革的家庭, 他们一共生育了8个子女, 康德排行第四, 然而8个子女中却只有4个活到了成年, 但在那个年代这也

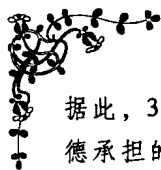




是十分常见的情况，很多名人的家庭也都如此，比康德晚的歌德的家庭也是这样。康德的家庭受虔敬主义影响很大，不过，康德的母亲在教育方面十分开明，她总是试图让孩子受到很好的教育。康德8岁的时候就被送到弗里德里希中学(Collegium Fridericianum)。在中学里，母亲让康德去掌握希腊语、拉丁语等古典语言，大概她想让康德成为古典语言学家。康德16岁的时候，已经开始在柯尼斯堡大学学习。虽然早期的康德的传记记载说康德开始学习的是神学，但是这一点并不能被校方的文件证明。但是，无论如何，康德对自然科学很感兴趣，他在大学里学习了哲学、古典的自然科学、物理学和数学。并且，逻辑学和形而上学的教授马丁·克努岑(Martin Knutzen)使康德熟悉了莱布尼茨和牛顿的思想。

1746年，22岁的康德就发表了论文《对活力的正确评价》。但是由于父亲的死，以及克努岑教授不承认他的论文作为毕业论文，康德中断了学业。于是，他开始了自己做家庭教师的生活。而康德在凯瑟尔灵珂家的(Familie Keyserlingk)家教生活使他走向当时柯尼斯堡上层社会成为可能。1754年，30岁的康德又返回到柯尼斯堡大学，重新开始了自己的学业，在这期间克努岑教授已经死去。第二年(1755年)，康德就发表了自己的第一篇重要论文《自然通史和天空的理论》。康德的《自然通史和天空的理论》与拉普拉斯在1796年发表的理论相似，因而在19世纪，该理论以“康德-拉普拉斯原理”闻名于世。同年，康德撰写了自己的教授资格论文《形而上学知识的原理》。





据此，31岁的康德成为柯尼斯堡大学的私人讲师^①。康德承担的课程多到令人难以置信的程度，他教授的课程有：逻辑学、形而上学、人类学、道德哲学、自然神学、数学、物理学、机械力学、地理学、教育学和自然法学。

康德的讲课特点不在于按部就班的教学方法，他也不通过重复来强调自己的讲课内容，也不善于循循善诱不太聪明的学生，因此在课堂上，每个学生都必须时时集中精神，否则可能跟不上。康德也不赞成一直低头做笔记，他认为许多注重细节的学生常会抄写下不重要的内容，却漏掉了真正的重点。在他是年轻讲师的时候，他也欢迎提问。^②

也许人们会认为，康德教授了这么多课程，课程的质量肯定不能保证。康德确实对自己所承担的繁重课程抱怨过。不过，事实上康德的课程很受大学生欢迎。赫尔德（Johann Gottfried Herder）于1762年到1764年在康德那里听过课，他后来是这样称赞康德的：“带着感激的喜悦我去回忆在我青年时期和一位哲学家的结识以及他教授的课程，对我来说，他是一位真正的人道主义老师……他的哲学唤起了我自己的思想，我几乎不能设想有比他的课程更



① 私人讲师的意思是，大学不支付薪水，靠学生支付的钟点费，因此收入的多寡完全看讲师能吸引多少学生。

② 参见：[美]库恩·康德传·黄添盛，译。上海：上海人民出版社，2007：139。