运筹与管理科学丛书 15

模糊优化方法与应用

刘彦奎　陈艳菊　刘颖　秦蕊　著

科学出版社

运筹与管理科学丛书 15

模糊优化方法与应用

刘彦奎 陈艳菊 刘 颖 秦 蕊 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

在模糊决策系统中，模糊优化方法在工程与管理问题中有着越来越广泛的应用. 本书主要介绍模糊优化方法中一些最新研究成果. 在理论方面，介绍 2-型模糊理论的公理化体系以及简约不确定性的新方法；在优化模型方面，介绍两阶段模糊规划的最新进展；在模型求解方法方面，给出新的模糊规划模型逼近方法；在应用方面，既有静态模糊优化方法的应用，又有两阶段(动态)模糊优化方法的应用.

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学、系统科学与系统工程专业高年级本科生或研究生的教材，也可以作为相关领域的科技工作者、工程技术人员、高校教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊优化方法与应用/刘彦奎等著. —北京：科学出版社，2013
(运筹与管理科学丛书；15)
ISBN 978-7-03-036312-1

Ⅰ. ①模… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①模糊数学-最佳化-研究 Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 001047 号

责任编辑：徐园园 赵彦超／责任校对：朱光兰
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2013 年 3 月第一次印刷 印张：17 3/4
字数：340 000

定价：69.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道: "运筹帷幄之中, 决胜千里之外. "

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于 20 世纪 50 年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

前 言

在工业生产、农业生产、交通运输、能源开发、生态环境、工程与管理等许多实际决策问题中, 都存在着数学规划的应用, 其中目标函数及约束函数都是在建模过程中确定的, 而且在许多情形下这些目标函数和约束函数中的参数都具有不确定性. 这里的不确定性可能表现为与系统有关事件的随机性, 也可能表现为与决策者或专家主观判断有关的模糊性. 本书主要目的是介绍模糊决策系统中优化理论的最新研究成果. 在理论方面重点介绍近几年发展起来的 2-型模糊理论; 在优化模型方面, 将介绍两阶段模糊规划模型的最新进展; 在模型求解方法方面, 将介绍模型新的逼近方法; 在应用方面, 将介绍静态与两阶段 (动态) 模糊优化方法在有价证券选择、数据包络分析、设备选址以及原材料获取计划等问题中的应用.

此外, 本书在结构安排上考虑了两类读者的需要. 对于喜欢数学理论的读者, 通过本书的学习, 可在模糊理论方面做进一步深入的研究. 而对于那些擅长实际应用的读者, 则可以将本书中所提出的优化方法与其他建模方法进行比较, 并结合一些具体工程或管理问题, 做一些创新性的应用研究.

本书共分 8 章. 第 1 章主要介绍模糊理论中的一些基本概念, 包括可信性测度、可信性空间、模糊变量、独立性、期望值、方差、可信性分布、2-型模糊集、第二隶属函数以及不确定性的迹等.

第 2 章主要介绍模糊模拟方法在求解模糊规划问题中的应用. 首先给出模糊变量序列几种收敛模式, 然后讨论逼近方法关于收敛模式的收敛性, 给出三个主要结论：模拟模糊事件可信性的收敛性、模拟关键值的收敛性和模拟期望值的收敛性.

第 3 章主要介绍一类新的模糊规划 —— 两阶段模糊规划或称为带有补偿的模糊规划. 首先介绍两阶段模糊规划模型的建立及其性质, 然后介绍与模糊规划有关的三种解概念, 在此基础上引入两个重要指标：完全信息期望值和模糊解的价值.

第 4 章介绍两阶段模糊整数规划模型的逼近方法. 为了说明逼近方法的有效性, 本章讨论近似两阶段模糊优化问题与原两阶段模糊优化问题在目标函数值、最优目标函数值以及最优解三方面的收敛关系.

第 5 章介绍模糊规划在有价证券选择、数据包络分析、两阶段设备选址和原材料获取计划问题中的应用, 设计求解优化模型的算法并通过数值试验说明算法的有效性.

第 6 章主要介绍 2-型模糊理论的公理化体系 —— 模糊可能性理论. 该理论包

括如下一些基本概念：模糊可能性测度、模糊可能性空间、2-型模糊变量、2-型可能性分布函数、2-型边缘可能性分布函数、相互独立的 2-型模糊变量和乘积模糊可能性空间等.

第 7 章介绍简约不确定性的方法. 重点介绍三种新方法：关键值简约、均值简约和等价值简约. 所谓简约就是一种舍弃, 更是一种保留, 三种简约方法分别通过三种不同积分对第二可能性分布的不确定性进行简约, 所得到的简约模糊变量均具有参数可能性分布, 从而确保 2-型可能性分布的重要信息不会缺失.

第 8 章主要介绍参数模糊优化方法. 该章内容是第 5 章相关内容的延伸, 主要阐明当实际决策问题中的可能性分布不能确定时, 可以借助参数可能性分布并采用参数规划建模方法. 这样得到的优化模型更加具有柔性, 充分体现模糊理论在解决实际问题过程中所起到的重要作用.

本书中的研究工作得到国家自然科学基金 (No.60974134)、河北省自然科学基金 (No.A2008000563, No.A2011201007) 及河北省人才工程培养经费资助科研项目 (课题) 的资助, 作者在此表示衷心的感谢.

作　者

2012 年 11 月

常用符号

α, β	置信水平	$\Re$	实数集
$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$	模糊向量或 2-型模糊向量	$\Re^n$	n 维欧氏空间
ξ, η, ζ	模糊变量或 2-型模糊变量	$\vee$	取大算子
$\hat{\xi}$	模糊变量实现值	$\wedge$	取小算子
I_A	集合 A 的示性函数	x	决策向量
μ	可能性分布	y	决策向量
G_ξ	可信性分布	T, W, h	矩阵
$\xi_{\sup}(\alpha)$	可信性 α-乐观值	$Q(x, \xi)$	第二阶段最优值函数
$\xi_{\inf}(\alpha)$	可信性 α-悲观值	$\mathcal{Q}(x)$	补偿函数
Pos	可能性测度	$\\|\cdot\\|$	欧几里得范数
Nec	必要性测度	WS	分布解
Cr	可信性测度	RP	补偿解
E	期望值	EV	期望值解
V	方差	EVPI	完全信息期望值
$\breve{f}$	函数 f 的伪逆	VFS	模糊解价值
Ξ	模糊向量的支撑	$\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{os}$	模糊可能性测度
$(\Gamma, \mathcal{A})$	备域空间	CV	关键值
$(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Pos})$	可能性空间	CV^*	乐观关键值
$(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Cr})$	可信性空间	CV_*	悲观关键值

《运筹与管理科学丛书》已出版书目

1. 非线性优化计算方法　袁亚湘　著　2008 年 2 月
2. 博弈论与非线性分析　俞　建　著　2008 年 2 月
3. 蚁群优化算法　马良等　著　2008 年 2 月
4. 组合预测方法有效性理论及其应用　陈华友　著　2008 年 2 月
5. 非光滑优化　高　岩　著　2008 年 4 月
6. 离散时间排队论　田乃硕　徐秀丽　马占友　著　2008 年 6 月
7. 动态合作博弈　高红伟　〔俄〕彼得罗相　著　2009 年 3 月
8. 锥约束优化——最优性理论与增广 Lagrange 方法　张立卫　著　2010 年 1 月
9. Kernel Function-based Interior-point Algorithms for Conic Optimization　Yanqin Bai　著　2010 年 7 月
10. 整数规划　孙小玲　李　端　著　2010 年 11 月
11. 竞争与合作数学模型及供应链管理　葛泽慧　孟志青　胡奇英　著　2011 年 6 月
12. 线性规划计算(上)　潘平奇　著　2012 年 4 月
13. 线性规划计算(下)　潘平奇　著　2012 年 5 月
14. 设施选址问题的近似算法　徐大川　张家伟　著　2013 年 1 月
15. 模糊优化方法与应用　刘彦奎　陈艳菊　刘　颖　秦　蕊　著　2013 年 3 月

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

可信性测度是一种非可加测度, 本章首先介绍与这一测度有关的积分理论, 重点回顾一些基本概念和基本性质. 此外, 本章还介绍一些与 2-型模糊集有关的概念.

1.1　可信性测度

1.1.1　备域

备域这个概念是由 Wang(1982) 首先提出的, 它是一类特殊的 σ-代数. 设 Γ 是一个非空的论域. 下面先介绍 σ-代数的概念.

定义 1.1 (Halmos, 1974)　称由 Γ 的子集所构成的集类 Σ 为一个 σ-代数, 如果它满足下面的三个条件

(1) $\Gamma \in \Sigma$;

(2) 若 $E \in \Sigma$, 则 $\Gamma \setminus E \in \Sigma$;

(3) 若 $E_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$.

定义 1.2 (Wang, 1982)　备域 $\mathcal{A}$ 是一个由 Γ 的子集所构成的集类, 并且满足下面的条件

(1) $\Gamma \in \mathcal{A}$;

(2) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\Gamma \setminus A \in \mathcal{A}$;

(3) 若 $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, 则 $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, 其中 I 是一个任意指标集,

称 $(\Gamma, \mathcal{A})$ 为一个备域空间. 幂集 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 是 Γ 上一个特殊的备域, 它是 Γ 上备域中最大的一个, 从而 $(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma))$ 是一个特殊的备域空间.

由定义 1.2 易知, 任意一族备域的交仍然是备域.

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 的子类. 由 $\mathcal{C}$ 生成的最小备域记为

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \cap\{\mathcal{A} \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ 为备域}\}.$$

容易验证, 备域 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 有以下性质:

(1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}(\mathcal{C})$;

(2) 对任意备域 $\mathcal{A}'$, 有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}'$.

命题 1.1 (Liu, Wang, 2006)　设 ξ 是从 Γ 到 $\Re$ 的一个实值函数, $\mathcal{C}$ 是 $\Re$ 的一个备域, 那么 $\xi^{-1}\mathcal{C}$ 是 Γ 的一个备域.

命题 1.2 (Liu, Wang, 2006)　对 $\Re$ 的任意集类 $\mathcal{C}$, 有 $\mathcal{A}(\xi^{-1}\mathcal{C}) = \xi^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$.

1.1.2 可信性空间

可信性测度是 Liu B 和 Liu Y K 于 2002 年提出的, 它是一个具有自对偶性的非可加模糊测度. 对于模糊测度, 有兴趣的读者可参阅文献 (Klir, 1999; Sugeno, 1974; Wang, Kilr, 1992).

定义 1.3(Zadeh, 1978) 设 $(\Gamma, \mathcal{A})$ 是一个备域空间, Pos 是定义在备域 $\mathcal{A}$ 上的一个集函数. 如果 Pos 满足下面的条件

(1) $\mathrm{Pos}(\varnothing) = 0$, 且 $\mathrm{Pos}(\Gamma) = 1$;

(2) 对 $\mathcal{A}$ 的任意子类 $\{A_i \mid i \in I\}$, 有

$$\mathrm{Pos}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \mathrm{Pos}(A_i),$$

称它是一个可能性测度, 称三元组 $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Pos})$ 为一个可能性空间. 在文献 (Nahmias, 1978) 中, Nahmias 称其为模式空间.

由定义 1.3 知, 可能性测度具有如下基本性质.

(1) 有界性: 对于任何 $A \in \mathcal{A}$, $0 \leqslant \mathrm{Pos}(A) \leqslant 1$;

(2) 单调性: 如果 $A, B \in \mathcal{A}$, 且 $A \subset B$, 有 $\mathrm{Pos}(A) \leqslant \mathrm{Pos}(B)$;

(3) 强次可加性: 对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 有

$$\mathrm{Pos}(A \cup B) + \mathrm{Pos}(A \cap B) \leqslant \mathrm{Pos}(A) + \mathrm{Pos}(B);$$

(4) 下半连续性: 如果 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 则

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Pos}(A_n) = \mathrm{Pos}\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) = \mathrm{Pos}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

利用可能性测度，如下定义的集函数:

$$\mathrm{Nec}(A) = 1 - \mathrm{Pos}(A^c), \quad A \in \mathcal{A}$$

称为必要性测度, 其中 A^c 为集合 A 的补集. 可能性测度 Pos 和必要性测度 Nec 是一对对偶的半连续模糊测度. 必要性测度具有如下性质.

(1) 单调性: 如果 $A, B \in \mathcal{A}$, 且 $A \subset B$, 有 $\mathrm{Nec}(A) \leqslant \mathrm{Nec}(B)$;

(2) 上半连续: 如果 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 则

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Nec}(A_n) = \mathrm{Nec}\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) = \mathrm{Nec}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right);$$

(3) 弱超可加: 对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 有

$$\mathrm{Nec}(A \cup B) + \mathrm{Nec}(A \cap B) \geqslant \mathrm{Nec}(A) + \mathrm{Nec}(B).$$

显然, 一个事件的可能性为 1 时, 该事件未必发生. 一个事件的必要性为 0 时, 该事件有可能发生. 因此可能性测度和必要性测度都不具有自对偶性. 下面介绍可信性测度 Cr, 它是一个具有自对偶性的集函数, 其定义如下:

定义 1.4(Liu B, Liu Y K, 2002) 设 $(\Gamma, \mathcal{A})$ 是一个备域空间, Cr 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的一个集函数. 如果对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\mathrm{Cr}(A) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Pos}(A) - \mathrm{Pos}(A^c)\right), \tag{1.1}$$

则称 Cr 是一个可信性测度. 称三元组 $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Cr})$ 为可信性空间.

例 1.1 设 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$. 定义一个 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 上的集函数如下:

$$\mathrm{Pos}\{\gamma_1\} = 0.1, \quad \mathrm{Pos}\{\gamma_2\} = 0.5, \quad \mathrm{Pos}\{\gamma_3\} = 1, \quad \mathrm{Pos}\{\gamma_4\} = 0.7,$$

对任意的集合 $A \in \mathcal{P}(\Gamma)$, 定义

$$\mathrm{Pos}(A) = \max_{\gamma_i \in A} \mathrm{Pos}\{\gamma_i\},$$

且

$$\mathrm{Cr}(A) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Pos}(A) - \mathrm{Pos}(A^c)\right),$$

那么 Pos 是 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 上的一个可能性测度, Cr 是 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 上的一个可信性测度, 三元组 $(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), \mathrm{Cr})$ 为可信性空间. 模糊事件 $\{\gamma_2, \gamma_4\}$ 的可信性测度

$$\mathrm{Cr}\{\gamma_2, \gamma_4\} = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Pos}\{\gamma_2, \gamma_4\} - \mathrm{Pos}\{\gamma_1, \gamma_3\}\right) = \frac{1}{2}(1 + 0.7 - 1) = 0.35.$$

下面介绍 Cr 的一些性质 (Liu B, Liu Y K, 2002).

定理 1.1 若 $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathrm{Cr})$ 是一个可信性空间, 则

(1) $\mathrm{Cr}(\varnothing)=0$, $\mathrm{Cr}(\Gamma) = 1$;

(2) 有界性: 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 有 $0 \leqslant \mathrm{Cr}(A) \leqslant 1$;

(3) 单调性: 如果 $A, B \in \mathcal{A}$, 且 $A \subset B$, 则 $\mathrm{Cr}(A) \leqslant \mathrm{Cr}(B)$;

(4) 自对偶性: 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\mathrm{Cr}(A) + \mathrm{Cr}(A^c) = 1$;

(5) 可列次可加性: 对任意 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, 有 $\mathrm{Cr}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cr}(A_n)$.

1.2 模糊变量

1.2.1 模糊变量的定义

Kaumann(1975) 是最早提出模糊变量的学者, Zadeh(1975, 1978) 也对这一概念进行了研究. 1978 年模糊变量的公理化定义由 Nahmias(1978) 在模式空间上给出. 1982 年, Wang 将这一定义推广到了备域空间.

定义 1.5(Wang, 1982)　设 $(\Gamma, \mathcal{A})$ 是一个备域空间, ξ 为定义在 Γ 上的一个实值函数. 如果对于任意的 $t \in \Re$, 有

$$\{\gamma \mid \xi(\gamma) \leqslant t\} \in \mathcal{A},$$

则称 ξ 为一个模糊变量.

一般地, 模糊向量可以类似地定义如下.

定义 1.6　一个模糊向量 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是从备域空间 $(\Gamma, \mathcal{A})$ 到空间 $(\Re^n, \mathcal{P}(\Re^n))$ 上的向量值函数, 并且满足对任意的 $B \in \mathcal{P}(\Re^n)$, 有

$$\boldsymbol{\xi}^{-1}B = \{\gamma \in \Gamma \mid \boldsymbol{\xi}(\gamma) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

可以验证 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是一个模糊向量的充要条件是 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 都是模糊变量 (Liu, Wang, 2006).

例 1.2　设 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Gamma)$, 定义 $\xi(\gamma_i) = i, i = 1, 2$, 则 ξ 是一个模糊变量.

例 1.3　一个确定的常数 c 可看成一个特殊的模糊变量.

模糊向量的函数还是一个模糊变量, 其运算规则如下.

设 $f : \Re^n \to \Re$ 是一个函数, $\xi_i : \Gamma \to \Re$, $i = 1, \cdots, n$ 是模糊变量, 则 $\boldsymbol{\xi} = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是一个模糊向量, 其定义如下:

$$\boldsymbol{\xi}(\gamma) = f(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), \cdots, \xi_n(\gamma)), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

设 $f : \Re^n \to \Re$ 是一个函数, $\xi_i : \Gamma_i \to \Re$, $i = 1, \cdots, n$ 是模糊变量, 则 $\boldsymbol{\xi} = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是一个模糊向量, 其定义如下:

$$\boldsymbol{\xi}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = f(\xi_1(\gamma_1), \xi_2(\gamma_2), \cdots, \xi_n(\gamma_n)), \qquad \forall \gamma_i \in \Gamma_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

例 1.4　设 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, ξ_1 和 ξ_2 是定义在 Γ 上的两个模糊变量, 且 $\xi_1(\gamma_i) = i$, $\xi_2(\gamma_i) = i + 1, i = 1, 2$, 则

$$(\xi_1 + \xi_2)(\gamma_1) = \xi_1(\gamma_1) + \xi_2(\gamma_1) = 3,$$

$$(\xi_1 + \xi_2)(\gamma_2) = \xi_1(\gamma_2) + \xi_2(\gamma_2) = 5.$$

例 1.5　设 $\Gamma_1 = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma_3, \gamma_4\}$, ξ_1 和 ξ_2 分别是定义在 Γ_1, Γ_2 上的模糊变量, 且 $\xi_1(\gamma_i) = i$, $i = 1, 2$, $\xi_2(\gamma_i) = i + 1$, $i = 3, 4$, 则

$$(\xi_1 + \xi_2)(\gamma_1, \gamma_3) = \xi_1(\gamma_1) + \xi_2(\gamma_3) = 5,$$

$$(\xi_1 + \xi_2)(\gamma_2, \gamma_3) = \xi_1(\gamma_2) + \xi_2(\gamma_3) = 6,$$

$$(\xi_1 + \xi_2)(\gamma_1, \gamma_4) = \xi_1(\gamma_1) + \xi_2(\gamma_4) = 6,$$

$$(\xi_1 + \xi_2)(\gamma_2, \gamma_4) = \xi_1(\gamma_2) + \xi_2(\gamma_4) = 7.$$

1.2.2 模糊变量的可能性分布

下面, 我们首先给出模糊变量可能性分布的定义.

定义 1.7(Nahmias, 1978) 设对于任意的 $t \in \Re$,

$$\mu_\xi(t) = \mathrm{Pos}\{\gamma \in \Gamma \mid \xi(\gamma) = t\}. \tag{1.2}$$

称函数 $\mu_\xi(t)$, $t \in \Re$ 为模糊变量 ξ 的可能性分布.

如果存在某一实数 r 满足 $\mu_\xi(r) = 1$, 则称模糊变量 ξ 是正则的.

如果模糊变量的可能性分布 $\mu_\xi(t)$ 是一个连续的实值函数, 则称 ξ 是一个连续型的模糊变量. 如果 $X = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$ 是 ξ 的一切可能取值的集合, 则称 ξ 是一个离散型的模糊变量. 离散型模糊变量的可能性分布常表示为

$$\mathrm{Pos}\{\gamma \in \Gamma \mid \xi(\gamma) = t_i\} = \mu_i, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

或

$$\xi \sim \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

易知

$$\mu_i > 0, \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} \mu_i = 1.$$

若 ξ 是一个离散型模糊变量, 则下面一些事件的可能性和可信性可以直接通过 $\{\mu_i\}$ 来表示. 例如,

$$\mathrm{Pos}\{a < \xi \leqslant b\} = \bigvee_{a < t_i \leqslant b} \mathrm{Pos}\{\xi = t_i\} = \bigvee_{\{i \mid a < t_i \leqslant b\}} \mu_i; \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Pos}\{\xi > a\} = \bigvee_{t_i > a} \mathrm{Pos}\{\xi = t_i\} = \bigvee_{\{i \mid t_i > a\}} \mu_i; \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Cr}\{a < \xi \leqslant b\} = \frac{1}{2}\left(1 + \bigvee_{\{i \mid a < t_i \leqslant b\}} \mu_i - \left(\bigvee_{\{i \mid t_i \leqslant a\}} \mu_i\right) \bigvee \left(\bigvee_{\{i \mid t_i > b\}} \mu_i\right)\right). \tag{1.5}$$

若 ξ 是连续型模糊变量, 则下面一些事件的可能性和可信性, 可以直接通过可能性分布 μ_ξ 来表示. 例如,

$$\mathrm{Pos}\{\xi \geqslant a\} = \sup_{u \geqslant a} \mu_\xi(u), \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Pos}\{\xi < a\} = \sup_{u < a} \mu_\xi(u), \tag{1.7}$$

从而

$$\mathrm{Cr}\{\xi \geqslant a\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sup_{u < a} \mu_\xi(u) + \sup_{u \geqslant a} \mu_\xi(u)\right), \tag{1.8}$$

其中 $\mathrm{Pos}\{\xi \geqslant a\}$ 和 $\mathrm{Cr}\{\xi \geqslant a\}$ 分别表示 ξ 不小于 a 的可能性和可信性.