普通高等学校"十二五"规划教材

微积分

（第3版）

赵修坤 主编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等学校“十二五”规划教材

微积分

（第3版）

赵修坤　主编

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是根据作者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，并在“微积分课程教学基本要求”的基础上编写而成的。本书注重与中学数学教学相衔接，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，通俗易懂，使内容和系统更加完整，也更便于教学。

本书是经济类与管理类本科生教材，全书共分9章：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程简介。每章后都有习题，并在本书最后附有习题答案。

本书具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点；并在保证教学基本要求的前提下，扩大了适应面，增强了伸缩性。本书可供高等院校经济类和管理类专业的学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/赵修坤主编. —3版. —北京：国防工业出版社，2012.8
普通高等学校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-118-08196-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①微积分－高等学校－教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第151697号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 印张18¾ 字数467千字
2012年8月第3版第1次印刷 印数1—4000册 定价38.00元

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

本书是根据多年的教学改革实践，按照新形势下教材改革的精神编写而成的，具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题丰富、便于自学等优点，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革举措，使得新内容更适合当前教学的要求。

本书为更好地与中学数学教学相衔接，从一般的集合、实数，引入函数的概念，为有利于培养学生的能力和数学素养，渗透了一些现代数学的思想、语言和方法；为适应微积分课程教学时减少的情况，在保证微积分课程教学基本要求的前提下，对一些内容作了适当精简和合并；在应用方面，注重了微积分在科学技术、经济管理和日常生活等方面的应用性例题和习题。书中注※者为选学内容，可由教师根据需要自行安排。

在编写过程中，许多同行、同事们提出了宝贵的意见和建议，并得到了各级领导的大力支持，在此表示诚挚的谢意。

本书由赵修坤主编，参加编写的教师还有王鹏、马利兵、刘祥森、肖湘萍等。由于编写时间紧迫，更限于编者水平，不当之处，欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

作 者

目　　录

第1章 函 数

函数是现代数学的基本概念，是微积分的主要研究对象。本章主要介绍集合、绝对值、区间、邻域等预备知识；在函数概念的基础上，研究函数的奇偶性、周期性、单调性、有界性；复习六类基本初等函数，结合复合函数的概念，引入初等函数的概念；简单介绍几种常用的由已知函数绘制相关函数图形的方法。

1.1 预 备 知 识

一、集合

1. 集合的概念

定义 集合是指具有某种特定性质的事物的全体，组成这个集合的事物称为该集合的元素。

通常，集合用大写英文字母A、B、C…表示，元素用小写英文字母a、b、c…表示。

定义 如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作$a\in A$，读作a属于A或a在A中；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记作$a\notin A$或$a\overline{\in} A$，读作a不属于A或a不在A中。

定义 由有限个元素构成的集合，称为有限集合。由无限多个元素构成的集合，称为无限集合。

注意 集合具有确定性的特征，即对某一个元素是否属于某个集合是确定的，“是”或者“不是”，二者必居其一。

另外，有如下常用的集合符号：

$N=\{$全体非负整数即自然数$\}=\{0,1,2,3,\cdots\}$

$N^{+}=\{$全体正整数$\}=\{1,2,3,\cdots\}$

$Z=\{$全体整数$\}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

$Q=\{$全体有理数$\}=\{p/q\mid p\in Z,q\in N^{+}$且$p$与$q$互质$\}$

$R=\{$全体实数$\}$

$R^{+}=\{$全体正实数$\}$

$R^{*}=\{$除0外的全体实数$\}$

2. 集合的表示法

表示集合的方法通常有以下两种：

1) 列举法

列举法：把集合的全体元素一一列举出来，并用花括号{}括起来。

例如，由元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示为 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$。

2) 描述法

描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，则可表示成

$M=\{x|x具有性质P\}$。

例如，由全体偶数组成的集合 B，可表示为 $B=\{x|x=2n,n为整数\}$。

3．全集与空集

定义 由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 U。

定义 不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$。

注意 $\{0\}$ 及 $\{\varnothing\}$ 都不是空集，前者含有元素“0”，后者以空集“$\varnothing$”为其元素。

4．子集

定义 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即“如果 $a\in A$，则 $a\in B$”，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A。

例 1 R 为实数集，N 为自然数集，则 $N\subset R$。

定义 设有集合 A 和 B，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

例 2 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A=B$。

关于子集具有下列性质：

(1) 反身性：$A\subset A$，即“集合 A 是其自身的子集”。

(2) 对于任意集合 A，有 $\varnothing\subset A$，即“空集是任意集合的子集”。

(3) 传递性：如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即“集合的包含关系具有传递性”。

5．集合的运算

集合的基本运算有如下几种：

定义 设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$。

关于集合的并有下列性质：

(1) $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$。

(2) 对任意集合，有 $A\cup\varnothing=A$，$A\cup U=U$，$A\cup A=A$。

定义 设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$。

集合的交有以下性质：

(1) $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$。

(2) 对于任何集合 A，有 $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$。

例 3 设 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$B=\{2,4,6,8,9\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}，\quad A\cap B=\{2,4,6,8\}$$

例 4 设 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x>0\}$，则

$$A\cup B=\{x|x\geqslant -1\}，\quad A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$$

例 5 若 A 为奇数集合，B 为偶数集合，则

$$A\cup B=\{x|x\text{为奇数或偶数}\},\quad A\cap B=\varnothing$$

定义 如果 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是分离的。

定义 设有集合 A 和 B，由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$，即 $A-B=\{x|x\in A\text{且}x\notin B\}$。

例 6 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，则

$$A-B=\{2,4,6\}$$

定义 全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 A^C，即

$$A^C=\{x|x\in U\text{且}x\notin A\}$$

关于集合的补集有下列性质：

$$A\cup A^C=U,\quad A\cap A^C=\varnothing$$

6．集合运算规律(交、并、补、差)

关于集合的交、并、补等运算满足下列法则。

设 A，B，C 为任意三个集合，则有下列法则成立：

(1) 交换律：(i) $A\cup B=B\cup A$

(ii) $A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(ii) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律：(i) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 摩根律(对偶律)：(i) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

(ii) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

以上这些法则都可以根据集合相等的定义验证，这里证明从略。

例 7 利用集合运算规律证明 $(A\cap B)\cup(A^C\cap B)=B$。

证明 由分配律(i)有

$$(A\cap B)\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap B=U\cap B=B$$

7．集合的笛卡儿乘积

集合的元素是不涉及顺序问题的，但有时需要研究集合的元素必须按某种规定顺序排列的问题。

定义 将两元素 x 和 y 按前后顺序排列成一个元素组 (x,y)，称为有序元素组。

对于有序元素组 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$ 时，才称 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 是相等的。

由两个元素组成的有序数组 (x_1,x_2) 称为二元有序数组，由三个元素组成的有序数组称为三元有序数组 (x_1,x_2,x_3)，……，由 n 个元素组成的有序数组称为 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

定义 设有集合 A 和 B，$x\in A, y\in B$，所有二元有序数组构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡儿乘积或直积，记作 $A\times B$，即 $A\times B=\{(x,y)|x\in A且y\in B\}$。

例 8 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3\}$，则

$$A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3)\}$$

例 9 设 $A=\{a,b\}$，则

$$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

例 10 设 R 为全体实数的集合，则笛卡儿直角坐标系的坐标平面可记为

$$R\times R=\{(x,y)|x\in R, y\in R\}$$

$R\times R$ 常记作 R^2。

例 11 设 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$A\times B=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

它表示平面直角坐标系中如图 1-1 所示的矩形区域。

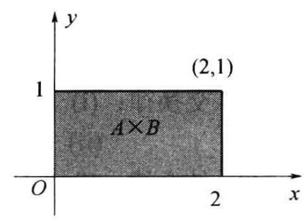

图 1-1

类似地，可以定义

$$A\times B\times C=\{(x,y,z)|x\in A, y\in B, z\in C\}$$

例 12 设 $A=\{0,1\}$，$B=\{1，2\}$，$C=\{3\}$，则有

$$A\times B\times C=\{(0,1,3),(0,2,3),(1,1,3),(1,2,3)\}$$

二、实数

1. 实数与数轴

数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线，称为数轴。如图 1-2 所示。

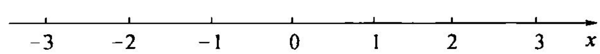

图 1-2

有理数的稠密性：有理数在数轴上是处处稠密的。

无理数的稠密性：无理数在数轴上也是处处稠密的。

有理数和无理数统称为实数。实数充满整个数轴(实数的连续性)。全体实数称为实数域，记为 R。实数与数轴上全体的点建立起一一对应的关系。本书中研究的数都是实数。

2. 绝对值

下面介绍绝对值的定义及性质。

定义 一个实数 x 的绝对值记为 $|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$的几何意义：$|x|$表示数轴上的点 x 与原点的距离。

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(5) $|x| < a, (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a$

(6) $|x| > b, (b > 0) \Leftrightarrow x < -b$或$x > b$

(7) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

(8) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$

(9) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(10) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

3. 区间

变量：在某一过程中可以取不同的数值的量，称为变量。

常量：在某一过程中保持相对不变的量，称为常量。

区间：介于某两个实数之间的全体实数称为区间，这两个实数称为区间的端点。

区间是用得较多的一类数集。设 a，b 为两个实数，且 $a<b$，数集

$$\{x | a < x < b\}$$

称为开区间，记作(a,b)，即

$$(a,b) = \{x | a < x < b\}$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的端点，这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$。数集

$$\{x | a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记作$[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$$

a 和 b 称为闭区间$[a,b]$的端点，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$。

类似地可说明：

$$[a,b) = \{x | a \leqslant x < b\}$$

$$(a,b] = \{x | a < x \leqslant b\}$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 称为半开区间或半闭区间。

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度，从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段，闭区间 $[a,b]$ 和开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1-3(a)和(b)所示。

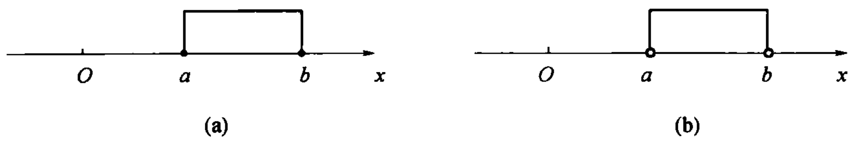

图 1-3

此外，还有所谓无限区间，引进记号 $+\infty$ (读做正无穷大)及 $-\infty$ (读做负无穷大)，则可类似地表示无限区间，例如：

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$$

这两个无限区间在数轴上表示出来，分别如图 1-4(a)和(b)所示。

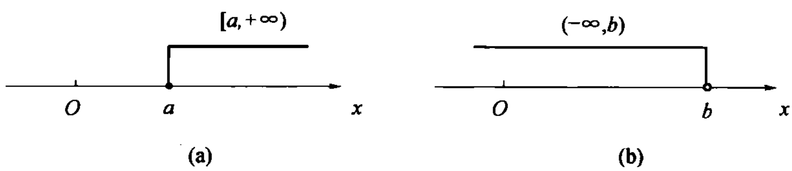

图 1-4

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间。

4. 邻域

定义 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，把满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的所有实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，点 a 叫做这个邻域的中心，δ 叫做这个邻域的半径(图 1-5)，即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta,\delta>0\}$$

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

这里，$0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$。

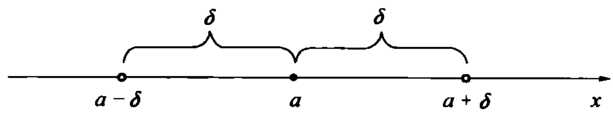

图 1-5

1.2 函 数

一、函数概念

1. 函数的定义

定义 若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应的规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$。

式中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，f 称为对应关系。

对于 $x_0\in D$，$y_0=f(x_0)$，或 $y\big|_{x=x_0}$ 称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值。

数集 $\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为值域，记为 Z 或 $Z(f)$。

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应规则，对应规则也常用 φ,h,g,F 等表示，那么函数也记作 $\varphi(x)$，$h(x)$，$g(x)$，$F(x)$ 等，有时也记作 $y=y(x)$，这时等号左边的 y 表示函数值，右边 y 表示对应规则。

在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，则平面点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的图形。

函数的两大要素：定义域与对应规则。

例 1 $y=\arcsin(2+x^2)$

解 对任意实数 x，都没有按给定规则与之对应的 y 值，函数定义域不能是空集，因此它不是函数关系。

例 2 $x>y$

解 因为按这个规则，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应，而函数定义中的对应规则要求每一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应，因此不符合函数定义，所以此例也不是函数关系。

例 3 研究下列两个函数关系是不是相同的函数关系？

(1) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$；　　(2) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

解 (1) $y=x\quad x\in(-\infty,+\infty)$

$$y=\frac{x^2}{x}\qquad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

这两个函数的定义域不同，因此它们是不同函数。

(2) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但它们的对应法则(函数关系)不同；

函数 $y=x$，当 $x>0$ 时，$y>0$；当 $x<0$ 时，$y<0$。

函数 $y=\sqrt{x^2}$，当 $x>0$ 时，$y>0$；当 $x<0$ 时，$y>0$。

这两个函数的定义域相同，而对应规则与值域不同，因此它们是不同函数。

注意 研究一个函数，必须知道自变量与因变量的对应规则以及函数的定义域，否则就不能确定一个函数。但习惯上常常只给出对应规则，而未指明定义域，此时定义域是指按给

定法则只有一个确定实数 y 值与之对应的所有 x 值构成的集合。

例 4 求 $y=\dfrac{1}{\lg(5x-6)}$ 的定义域。

解 $\begin{cases}5x-6>0\\5x-6\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{6}{5}\\x\neq\dfrac{7}{5}\end{cases}$

定义域为

$$D=\left(\frac{6}{5},\frac{7}{5}\right)\cup\left(\frac{7}{5},+\infty\right)$$

例 5 求 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域。

解 $\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\\x^2<25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|\leqslant 5\\|x|<5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 6\\-5<x<5\end{cases}$

因此，有 $-4\leqslant x<5$，即所给函数的定义域为 $[-4,5)$。

2．多值函数

在函数的定义中，对每一个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数。如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个多值函数。例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=25$ 给出，显然，当 x 取 $(-5,+5)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值，所以这个方程确定了一个多值函数。

今后如无特别声明，均指单值函数，遇到多值函数时，将其分成若干个单值分支。

3．函数记号 $f(x)$ 的使用

函数 $y=f(x)$ 中的“f”表示函数关系中的对应法则。

例如：若 $f(x)=x^2+x$，则有

$$f(2)=2^2+2=6$$

$$f(a)=a^2+a$$

$$f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)=x^2+3x+2$$

$$f\left(-\frac{1}{y}\right)=\left(-\frac{1}{y}\right)^2+\left(-\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}$$

$$f\left[f(x)\right]=(x^2+x)^2+(x^2+x)=x^4+2x^3+2x^2+x$$

4．函数的三种表示法

表示函数的主要方法有三种：公式法(又称解析法)、表格法和图形法，这些方法在中学里大家已经熟知，这里从略。如公式法：

$$y=\sin x+x^2+\frac{1}{x}$$

5. **分段函数**

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数。

例 6 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，对于任何实数，下面关系成立

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

符号函数的图形如图 1-6 所示。

例 7 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，简称为取整函数，记为 $y=[x]$，取整函数的图形如图 1-7 所示，其图形称为阶梯曲线。

例 8 $y=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$

此函数的图形如图 1-8 所示。

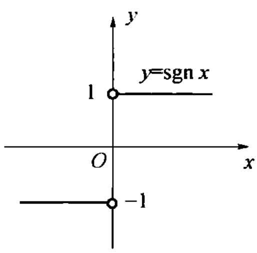

图 1-6

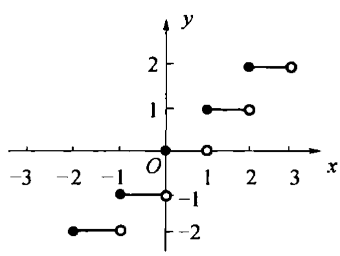

图 1-7

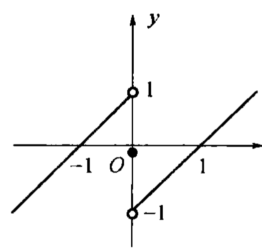

图 1-8

6. **隐函数**

有些函数它的因变量是用自变量的解析表达式表示的，称为显函数，如 $y=f(x)$；而有些函数它的因变量与自变量的对应法则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的，称为隐函数，如 $3x+4y-1=0$，$x^2+y^2=16$ 等。所有的显函数可以用隐函数的形式来表达，因为对于显函数 $y=f(x)$，只要写出 $F(x,y)=y-f(x)=0$ 即可。但有些隐函数却不能用显函数的形式来表达，如 $xy^2+\sin(xy)=0$。

二、常用经济函数

1. **单利和复利**

利息是指借款者向贷款者支付的报酬，它是根据本金的数额按一定比例计算出来的。利息又有存款利息、贷款利息、债券利息、贴现利息等几种主要形式。

单利计算公式：

设初始本金为 p (元)，银行年利率为 r，则

第一年末本利和为

$$s_1=p+rp=p(1+r)$$

第二年末本利和为

$$s_2 = p(1+r) + rp = p(1+2r)$$

$$\vdots$$

第 n 年末本利和为

$$s_n = p(1+nr)$$

复利计算公式：

设初始本金为 p (元)，银行年利率为 r，则

第一年末本利和为

$$s_1 = p + rp = p(1+r)$$

第二年末本利和为

$$s_2 = p(1+r) + rp(1+r) = p(1+r)^2$$

$$\vdots$$

第 n 年末本利和为

$$s_n = p(1+r)^n$$

例 9 现有初始本金 1000 元，若银行的年利率为 7%，问

(1) 按单利计算，3 年末的本利和为多少？

(2) 按复利计算，3 年末的本利和为多少？

(3) 按复利计算，需多少年才能使本利和超过初始本金 1 倍？

解 (1) 已知 $p = 1000$，$r = 0.07$，由单利计算公式，得

$$s_3 = p(1+3r) = 1000 \times (1 + 3 \times 0.07) = 1210\ (元)$$

即 3 年末的本利和为 1210 元。

(2) 由复利计算公式，得

$$s_3 = p(1+r)^3 = 1000 \times (1+0.07)^3 \approx 1225\ (元)$$

即 3 年末的本利和为 1225 元。

(3) 若 n 年后的本利和超过初始本金的 1 倍，即要

$$s_n = p(1+r)^n > 2p，\quad (1.07)^n > 2，\quad n\ln 1.07 > \ln 2$$

从而

$$n > \ln 2 / \ln 1.07 \approx 10.2$$

即需 11 年才能使本利和超过初始本金的 1 倍。

2．多次付息

前面是对确定的年利率及假定每年支付利息一次的情形来讨论的。下面再讨论每年多次付息情况。

单利付息的情形

因每次的利息都不计入本金，故若一年分 n 次付息，则年末的本利和为

$$s = p\left(1 + n\frac{r}{n}\right) = p(1+r)$$