1958-1959学年度

上海市高中毕业班复习参考资料

三角

上海市教育局编

上海教育出版社

說　明

本資料扼要地提出平面三角教材的重点，供高中毕业班系統复习时参考，最后部分的复习題可以选作例題与練习之用.

本資料系委托部分中学教师編写，虽經我們审閱，但由于时間匆促，又限于水平，其中不妥之处在所难免，希望使用时随时提出批評和意見.

目　　录

一 三角函数和它的性質

1. 角的形成与度量

(1) 角的形成 一个角可以看做是由它的一条边从另一条边的位置开始,繞着頂点旋轉而成的.我們規定終边依照反时針方向旋轉所成的角是正角; 依照順时針方向旋轉所成的角是負角.

α 与 $\alpha+k\cdot360°$ ($k=0$、±1、±2、……) 是有共同終边和始边的角.

(2) 角的度量

① 角度制 (就是六十分制): 1 周角$=360°$, $1°=60'$, $1'=60''$.

② 弧度制 (就是弳制): 把等于半徑长的弧所对的圓心角叫做 1 弧度的角根据弧度的定义,得到: 圓心角的弧度数(α)等于弧长(l)除以半徑(R)的长. 就是:

$$\alpha=\frac{l}{R}.$$

在应用上,"弧度"两字往往略去不写. 例如, $\alpha=3$ 弧度, $\beta=\frac{1}{2}$ 弧度等, 习惯上只写 $\alpha=3$ 和 $\beta=\frac{1}{2}$. 但是度的符号就不能不写,例如, $50°$ 就不能写成 50.

度与弧度可以相互换算:

$$1\text{ 平角}=180°,\quad \text{又 }1\text{ 平角}=\frac{\pi R}{R}\text{ 弧度};$$

$$\therefore\quad 180^\circ = \pi \text{ 弧度}.$$

因此，　$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ 弧度≈ 0.017453 弧度；

$$1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 57^\circ 17' 44.8''.$$

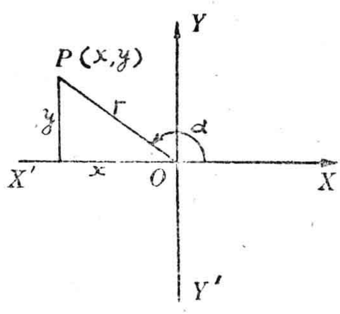
下面表里是几个常用到的角的度与弧度的对应值：

度	360°	270°	180°	150°	120°	90°	60°	45°	30°	15°	10°
弧度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$

2．三角函数

(1) 三角函数的定义

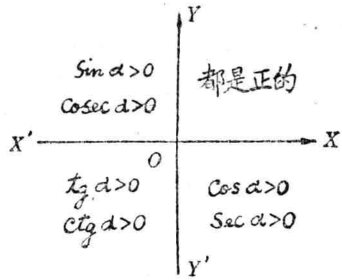
① 坐标法　如果一个角的頂点是原点 O，它的始边在 x 軸的正方向上，終边上任意一点的坐标是 $P(x,y)$，$r(=|OP|) = \sqrt{x^2+y^2}$；那末，不論終边在哪一个象限里，角 α 的六个三角函数是：



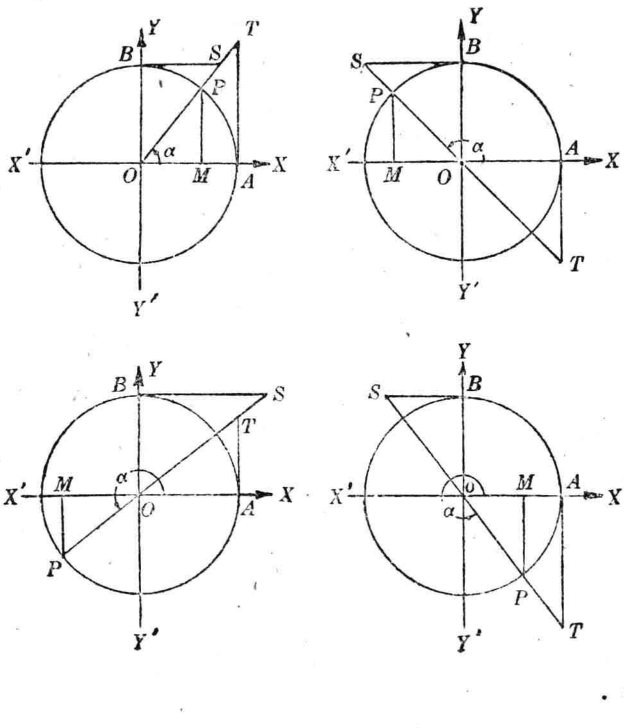
$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y},\qquad \sec\alpha = \frac{r}{x},\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

下图説明四个象限里角的各个三角函数的符号:



② 三角函数的綫段表示法　三角函数的値可以用单位圓中綫段的量数連同它們的符号来表示.



就是 $\sin\alpha=MP$, $\cos\alpha=OM$, $\operatorname{tg}\alpha=AT$,

$\operatorname{ctg}\alpha=BS$, $\sec\alpha=OT$, $\operatorname{cosec}\alpha=OS$.

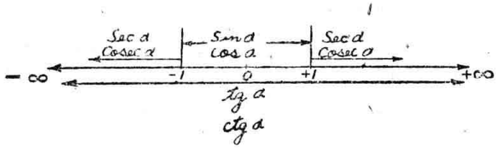
正弦綫 MP 和正切綫 AT 的符号规定和縱坐标的一样；余弦綫 OM 和余切綫 BS 的符号规定和横坐标的一样；正割綫 OT 和余割綫 OS 的符号规定是：和 OP 同向，就是正的；和 OP 反向，就是負的.

(2) 三角函数值的变化　从三角函数綫的消长，很容易看到角 α 从 0°—360° 的变化过程中各三角函数值的变化情况，就是：

α	$0^\circ \longrightarrow 90^\circ \longrightarrow 180^\circ \longrightarrow 270^\circ \longrightarrow 360^\circ$
$\sin\alpha$	$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0$
$\cos\alpha$	$1 \longrightarrow 0 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1$
$\operatorname{tg}\alpha$	$0 \longrightarrow +\infty$ 不存在 $-\infty \longrightarrow 0 \longrightarrow +\infty$ 不存在 $-\infty \longrightarrow 0$
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在 $+\infty \longrightarrow 0 \longrightarrow -\infty$ 不存在 $+\infty \longrightarrow 0 \longrightarrow -\infty$ 不存在
$\sec\alpha$	$1 \longrightarrow +\infty$ 不存在 $-\infty \longrightarrow -1 \longrightarrow -\infty$ 不存在 $+\infty \longrightarrow 1$
$\operatorname{cosec}\alpha$	不存在 $+\infty \longrightarrow 1 \longrightarrow +\infty$ 不存在 $-\infty \longrightarrow -1 \longrightarrow -\infty$ 不存在

从表中我們可以看到各三角函数值变化的范圍是：$|\sin\alpha|\leqslant 1$ 和 $|\cos\alpha|\leqslant 1$; $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 可以是任何实数；$|\sec\alpha|\geqslant 1$ 和 $|\operatorname{cosec}\alpha|\geqslant 1$.

各三角函数值的变化范圍，也可以用数軸来表示：



从表中，我們还可以看出各个三角函数自变量可以取的值的范圍是：

① 对于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 来說，α 可以取任何实数.

② 对于 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\sec\alpha$ 来說，α 可以取的值是除了 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 以外的任何实数（n 是任何整数）.

③ 对于 $\operatorname{ctg}\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 来說，α 可以取的值是除了 $\alpha=n\pi$ 以外的任何实数（n 是任何整数）.

3．同角的三角函数間的关系

（1）五个独立公式

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha&=1;\\\cos\alpha\cdot\sec\alpha&=1;\\\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha&=1.\end{aligned}\right\}\text{（倒数关系式）}\qquad\begin{aligned}&(1)\\&(2)\\&(3)\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\ \text{（商数关系式）}\tag{4}$$

$$\left(\text{从倒数关系式，可以得到 }\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\right)$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\ \text{（平方关系式）}\tag{5}$$

（从这个关系式，可以推出：

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha.）$$

（2）用已知角的一个三角函数表示其他各三角函数

这里只举一个用正弦函数表示其他各三角函数的例子：

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};\qquad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

从角 α 的一个三角函数的值，求其他各三角函数的值的时候，必須正确地选擇根号前的符号（它是根据 α 所在的象限决定的）.

例 已知 $\sin\alpha=m(|m|\leqslant 1)$，求 α 的其他各三角函数的值.

解 如果 $m>0$，那末 α 在第一或第二象限；如果 $m<0$，那末 α 在第三或第四象限.

現在分两組来解：

α 在第一、四象限时，

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{m};$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-m^2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

α 在第二、三象限时，

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{m};$$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-m^2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

α 的其余各三角函数可以由倒数关系求出.

当 $m=0$ 时，$\sin\alpha=0$；$\alpha=n\pi$，这时，$\operatorname{ctg}\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 不存在.

4. 誘导公式

我們学过的 9 組 54 个誘导公式可以归納成下表（表中的 α 是任意角）：

函数 \ 角	$-\alpha$	$90^\circ \mp \alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$	$180^\circ \mp \alpha$ $(\pi \mp \alpha)$	$270^\circ \mp \alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha\right)$	$360^\circ - \alpha$ $(2\pi - \alpha)$	$k\,360^\circ + \alpha$ $(2k\pi + \alpha)$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\pm\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\sec\alpha$
cosec	$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\sec\alpha$	$\pm\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\mathrm{cosec}\,\alpha$

为了帮助記忆，可以注意下面三点：

(1) 当角的值是 $n\pi \pm \alpha$ 的时候，它的三角函数一定可以化成角 α 的同函数；

(2) 当角的值是 $\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\pm\alpha$ 的时候，它的三角函数一定可以化成角 α 的相应的余函数；

(3) 符号就是角 α 为銳角时所在象限內原函数的符号.

利用誘导公式，可以把任意角的三角函数化成正銳角或小于 $\frac{\pi}{4}$ 的正角的三角函数. 例如：

$$\sin(-5678^\circ) = -\sin 5678^\circ = -\sin(15\times 360^\circ + 278^\circ)$$
$$= -\sin 278^\circ = -\sin(270^\circ + 8^\circ) = \cos 8^\circ.$$

5. 三角函数的周期与图象

(1) 三角函数的周期性　如果有一个常数 l，使得 $f(x+l)=f(x)$ 对于 x 的一切值都能够成立，那末函数 $f(x)$ 叫做周期函数. 对于 x 的一切可以取的值，能使 $f(x+l)=f(x)$ 成立的最小正数 l，叫做周期函数 $f(x)$ 的周期. 六个三角函数都是周期函数，其中 $\sin x$，$\cos x$，$\sec x$ 和 $\operatorname{cosec} x$ 的周期是 360°，就是 2π；$\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的周期是 180°，就是 π.

下面是几个求三角函数周期的例子.

例 1　$y=\sin ax=\sin(ax+2\pi)=\sin a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)$,

$$\therefore \quad l=\frac{2\pi}{a}.$$

例 2　$y=\sin\left(\frac{x}{a}+\phi\right)=\sin\left(\frac{x}{a}+\phi+2\pi\right)$

$$=\sin\left[\frac{1}{a}(x+2a\pi)+\phi\right],$$

$$\therefore \quad l=2a\pi.$$

例 3 $y=\operatorname{tg} ax=\operatorname{tg}(ax+\pi)=\operatorname{tg} a\left(x+\frac{\pi}{a}\right)$,

$$\therefore \qquad l=\frac{\pi}{a}.$$

掌握了求函数的周期的方法后，对于函数的討論和作图都很方便．在生产技术上的許多問題里常常会遇到周期函数，例如物理学上的簡諧振动就是周期函数的例子．

(2) 三角函数的图象 利用三角函数的图象，可以帮助我們理解和掌握函数的性質．例如，从图象上可以看到自变量可以取的值的范圍，函数值在各个象限內的增减情况，函数的极大和极小値等．在掌握基本三角函数图象的作法的基础上要能够作出下面几种函数的图象:

① $y=A\sin x$;

② $y=\sin ax$;

③ $y=\sin(x+\alpha)$;

④ $y=\sin x+k$;

⑤ $y=A\sin(ax+\alpha)+k$.

例 作 $y=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ 的图象.

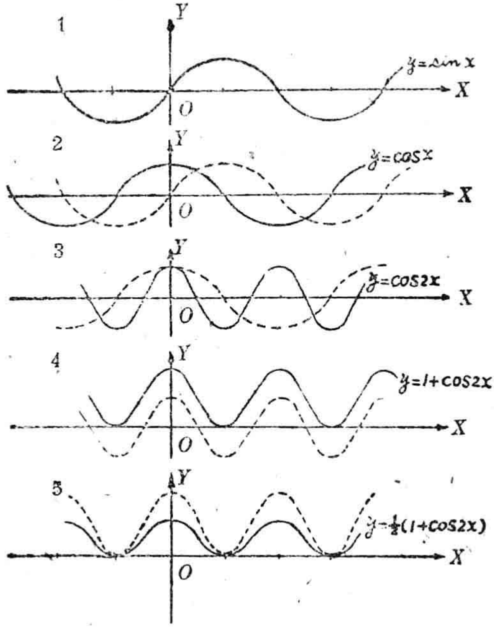
解 1．先作出正弦曲綫;

2．把正弦曲綫向左移动 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，得到余弦曲綫;

3．把余弦曲綫沿 x 軸的方向压縮 2 倍，得 $y=\cos 2x$ 的图象.

4．把 $y=\cos 2x$ 的图象順 y 軸的正方向平移 1 个单位，得 $y=1+\cos 2x$ 的图象.

5．把 $y=1+\cos 2x$ 的图象沿 y 軸的方向压縮 2 倍，得 $y=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ 的图象.



二　加法定理和它的推广

1．加法定理和它的推广

本单元的所有公式可以看作以两角和的正弦和余弦公式为基础而推导出来的．它們之間的关系如下一頁附表．

2．几点注意

(1) 一般說来，誘导公式可以看做是加法定理的特例．例如，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{2}\sin\theta=\cos\theta$；但当 α 或 β 是 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 的时候，$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$ 的公式沒有意义；又当 α 或 β 是 $n\pi$ 的时候，$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$ 的公式沒有意义，这时仍須应用誘导公

式.

(2) 在使用带有根号的半角公式时，正負符号的选擇取决于 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

(3) 表中用有理式表示的半角正切的公式是由 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, 用 $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\text{或者 } 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$去乘分子和分母推导出来的. 因此这两个公式沒有双重符号.

(4) 在进行和差化积的时候, 如果 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的系数不同, 可以引用輔助角.

例 把 $a\sin x+b\cos x$ 化成积的形式.

解 $a\sin x+b\cos x=m\left(\frac{a}{m}\sin x+\frac{b}{m}\cos x\right)$.

使 $\frac{a}{m}=\cos\phi,\qquad \frac{b}{m}=\sin\phi,$

那末 $\frac{a^2+b^2}{m^2}=\sin^2\phi+\cos^2\phi=1;$

$\therefore\qquad m=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$

取 $\qquad m=\sqrt{a^2+b^2},$

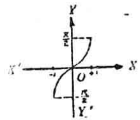
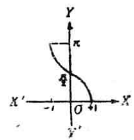
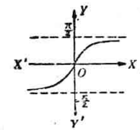
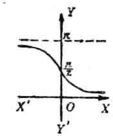
于是 $\qquad$ 原式 $=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\phi+\cos x\sin\phi)$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\phi).$$

这里, ϕ 的值可以由 $\operatorname{tg}\phi=\frac{b}{a}$ 求得.

三 反三角函数

1. 反三角函数的基本性质

	反 正 弦	反 余 弦	反 正 切	反 余 切
函　　数	$y=\operatorname{arc}\sin x$	$y=\operatorname{arc}\cos x$	$y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$
自变量x可以取的值	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\infty< x<\infty$	$-\infty< x<\infty$
函数值所在的区間	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	$-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}$	$0< y<\pi$
图　　象				
基 本 性 質	(1) 增函数 $-1 \xrightarrow{x} +1$ $-\frac{\pi}{2} \xrightarrow{y} \frac{\pi}{2}$ (2) $\operatorname{arc}\sin(-x)$ $=-\operatorname{arc}\sin x$	(1) 减函数 $-1 \xrightarrow{x} +1$ $\pi \xrightarrow{y} 0$ (2) $\operatorname{arc}\cos(-x)$ $=\pi-\operatorname{arc}\cos x$	(1) 增函数 $-\infty \xrightarrow{x} +\infty$ $-\frac{\pi}{2} \xrightarrow{y} \frac{\pi}{2}$ (2) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(-x)$ $=-\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$	(1) 减函数 $-\infty \xrightarrow{x} +\infty$ $\pi \xrightarrow{y} 0$ (2) $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-x)$ $=\pi-\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$

2. 反三角函数的三角运算

(1) 根据反三角函数的定义，在区間 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 內，

$$\sin(\operatorname{arc\,sin} x) = x, \quad \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x;$$

在区間 $-\infty < x < +\infty$ 內，

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x.$$

(2) 在运算过程中，要随时注意反三角函数主值的規定. 例如，在公式 $\cos \alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ 中，設 $\alpha = \operatorname{arc\,sin} x$，那末 $\cos \alpha = \pm\sqrt{1-[\sin(\operatorname{arc\,sin} x)]^2} = \pm\sqrt{1-x^2}$. 这里，根号前应取正号，因为 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$，$\cos \alpha$ 是正的.

例 1 求 $\sin\left(2 \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}\right)$ 的值.

解 $\sin\left(2 \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}\right) = 2 \sin\left(\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}\right) \cos\left(\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

例 2 求 $\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2}\right)$ 的值.

解 $\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

例 3 求 $\sin\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}\right) + \cos\left(\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{3}\right)$ 的值.

解 設 $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \alpha$，那末 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$；

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3}{5}.$$

設 $\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{3} = \beta$，那末 $\operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{3}$；

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

$$\therefore \quad 原式=\frac{1}{5}+\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{39+5\sqrt{13}}{65}.$$

3. 反三角函数間的关系

(1) 下面两个等式永远成立:

① $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$;

② $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}$.

証明 把①的原式写成

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x. \qquad (1)$$

$$\because \quad \sin(\arcsin x)=x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

所以 (1)的两边的角有相同的正弦值.

其次, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

又 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$,

$$\therefore \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

所以,(1)的两边的角都在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的范圍里，但是在这个范圍里,有相同的正弦值的角只有一个,所以等式(1)成立.因此,原来的等式也成立.

用同样的方法可以証明等式②.

(2) 証明反三角函数的恒等式时，往往先取等式两边角的某一相同三角函数值，然后再証明这等式两边的角同在某一个范圍里.