面向“十二五”高等教育课程改革项目研究成果

经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

主编 徐 刚 常立成

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

面向"十二五"高等教育课程改革项目研究成果

经济数学基础

主　编　徐　刚　常立成
副主编　孟凡伟　吕　超

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础 / 徐刚，常立成主编. —北京:北京理工大学出版社，2013.3
ISBN 978-7-5640-7389-3

Ⅰ. ①经…　Ⅱ. ①徐…　②常…　Ⅲ. ①经济数学—高等学校—教材
Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 022648 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http: // www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京兆成印刷有限责任公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 13.5
字　　数 / 311 千字
版　　次 / 2013 年 3 月第 1 版　　2013 年 3 月第 1 次印刷　　责任编辑 / 张慧峰
印　　数 / 1～1500 册　　责任校对 / 杨　露
定　　价 / 38.00 元　　责任印制 / 吴皓云

前　言

随着高等教育的快速发展，相应的教材建设也不断推进。在对经济管理类各专业所需的数学知识进行深入调研的基础上，以服务为宗旨，以就业为导向，坚持教学内容充分体现“贴近实际、面向专业、服务专业”的思想，以及“应用为目的”“必需、够用”为度的原则，由多位多年从事经济数学教学的一线教师精心编写了本教材.

本书主要具有以下特点：

1. 面向专业，突出应用性

本书精选了一定数量的经济应用实例，将数学知识与经济案例充分融合，使学生能将所学的基本知识、基本理论应用到实际问题的解决中，从而使学生充分感受到数学的应用价值，为后续专业学习打下良好的基础.

2. 注重数学的思想方法，淡化理论证明

从现实、生动的实例出发引入数学概念，以简明通俗的语言阐述基本知识、基本理论，在保证数学概念准确性及基本理论完整性的原则下，减少抽象的理论证明，借助几何直观图形和实际意义来解释这些概念和定理，使抽象的概念形象化，从而降低难度，精简内容，以适应高等教育教学需要.

3. 便于巩固练习

本书每节后都配有大量精选习题，每章后配有复习题，在书末附有答案，便于学生进行巩固练习.

本书主编徐刚、常立成，副主编孟凡伟、吕超. 各章编写人员：徐刚(第 1、6 章)；常立成(第 4、5、7 章)；孟凡伟(第 2、8 章)；吕超(第 3 章). 全部教材的框架结构、统稿、定稿由徐刚承担.

由于我们的水平有限，时间也比较仓促，本教材必有不少缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正.

编　者

目录

第一章

函数、极限、连续

本章在中学数学的基础上对函数和函数的极限作必要的复习和补充，引进函数的连续概念，为后面的学习打好基础.

第一节　函数

一、集合

所谓**集合**是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**（简称**元**）. 例如，2012 年全国参加高考的学生就是一个集合，而每个学生就是这个集合的元素.

常用的数集包括：自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$ 和实数集$\mathbf{R}$.

常见区间的类型：

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集$\{x\in\mathbf{R}|a<x<b\}$称为**开区间**，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}|a<x<b\};$$

数集$\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\leqslant b\};$$

类似地，$[a,b)$，$(a,b]$称为**半开半闭区间**，即

$$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x\in\mathbf{R}|a<x\leqslant b\};$$

此外，$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$，$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}|a<x\}$，$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\}$，$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}|x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant b\}$，称为无穷区间.

此外，为了讨论函数在一点邻近的某些性态，引入点的**邻域**的概念.

定义 1　设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，实数集合$\{x\in\mathbf{R}||x-a|<\delta\}$，即在数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 **$\boldsymbol{\delta}$ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

点 a 称为这**邻域的中心**，δ 称为这**邻域的半径**（如图 1－1 所示）.

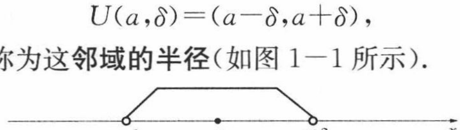

图 1－1

实数集合$\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$（如图 1－2 所示）.

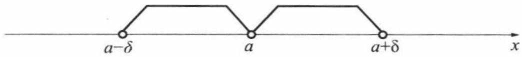

图 1－2

例如，以 1 为中心，1 为半径的邻域表示的区间是(0,2)；以 1 为中心，1 为半径的去心邻域表示的区间是$(0,1)\cup(1,2)$.

二、函数

1. 函数的概念

定义 2 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空数集，存在一个对应法则 f，对于任意 $x\in D$，都有唯一确定的 y 值与之对应，则称 y 是定义在 D 上的变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为函数的**定义域**，数集$\{f(x)\,|\,x\in D\}$为函数的**值域**.

f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则. 函数也可以用其他字母表示，如 $y=F(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，等等.

注意：定义域与对应法则是确定函数必不可少的两要素，它们与自变量和函数用什么字母表示无关. 只有定义域和对应法则都相同的两个函数才是相同的函数.

例 1 求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$；　　(2)$y=\arcsin(x^2-1)$.

解 (1)$x^2-2x-3>0$，定义域为 $x<-1$ 或 $x>3$，即 $D=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

(2)由$-1\leqslant x^2-1\leqslant 1$，可得 $0\leqslant x^2\leqslant 2$，定义域 $D=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

例 2 判断下列函数是否是相同函数：

(1)$f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$；　　(2)$f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$.

解 (1)不是相同的函数，因为对应的法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$.

(2)不是相同的函数，因为定义域不同，$g(x)$的定义域 $x\neq 0$.

例 3 （如图 1－3 所示）函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，这个函数称为**绝对值函数**.

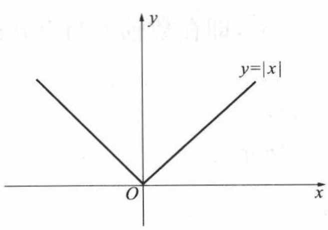

图 1－3

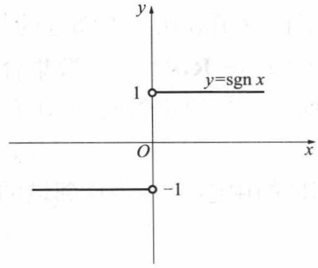

图 1－4

例 4　(如图 1—4 所示)函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**,它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$,值域是 $\{-1,0,1\}$.

像上面的两个例子,自变量在不同的变化范围内对应法则用不同式子来表示的函数称为**分段函数**.

2. **函数的表示法**

表示函数的常用方法有:表格法、图形法、解析法(公式法).

此外,若变量 x、y 之间的函数关系是由一个含 x、y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的,则称 y 是 x 的**隐函数**,比如 $x-y+2=0$. 相应地,把直接由自变量的式子表示的函数称为**显函数**,比如 $y=x+2$. 把隐函数转化为显函数的过程叫做**隐函数的显化**. 不是每个隐函数都可以显化的,比如 $e^{x+y}+xy-x+y=0$ 确定的隐函数是无法显化的. 因此,隐函数是表达函数的一种必不可少的形式.

三、函数的几种特性

1. **单调性**

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意的 x_1、$x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加(减少)**的,I 称为 $f(x)$ 的**单调增区间(减区间)**,单调增加或单调减少的函数称为**单调函数**.

例如,$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的.

2. **奇偶性**

设 $f(x)$ 的定义域为对称区间 D,若对任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若对任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形关于坐标原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称. 例如,$y=\sin x$ 是奇函数,$y=\cos x$ 是偶函数,$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

3. **周期性**

设 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对任意 $x\in D$ 有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**(把满足上式的最小正整数 T 称为**最小正周期**). 例如,$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

4. **有界性**

设 $f(x)$ 在区间 X 内有定义,如果存在常数 $M>0$,使得对于一切 $x\in X$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 X 内**有界**;若不存在这样的 $M>0$,则称 $f(x)$ 在区间 X 内**无界**.

注意:(1)如果 $f(x)$ 在定义域上有界,则称 $f(x)$ 为**有界函数**. 例如,$y=\sin x$ 是有界函数.

(2)有界或无界是相对某个区间而言的,例如,$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,而在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

四、基本初等函数及图像

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1)幂函数:$y=x^a$($a\in\mathbf{R}$). 常用的幂函数图像如图 1—5 所示.

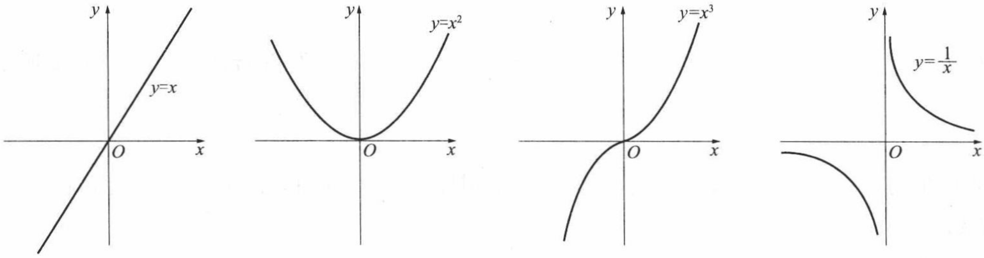

图 1—5

(2)指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq1)$. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$. 指数函数的图像如图 1—6 所示.

(3)对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$. 其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数(如图 1—7 所示).

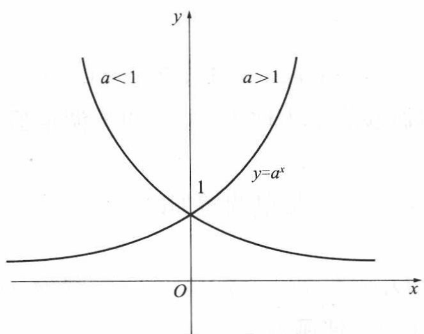

图 1—6

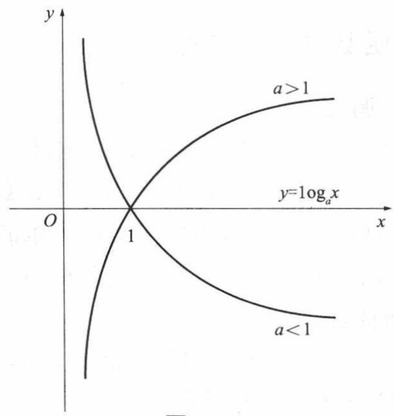

图 1—7

(4)三角函数：三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 其中正弦、余弦、正切和余切函数的图像如图 1—8 所示.

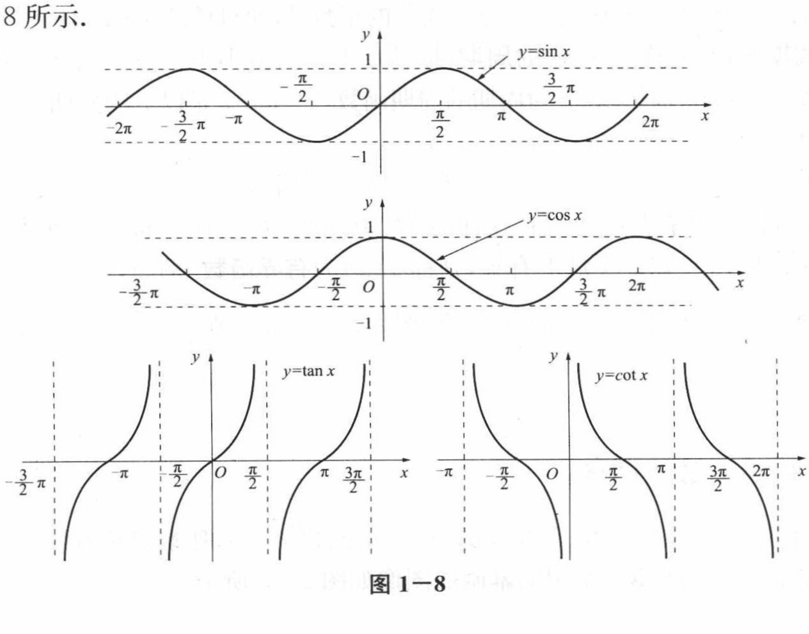

图 1—8

(5)反三角函数:反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 等. 它们的图像如图 1—9 所示.

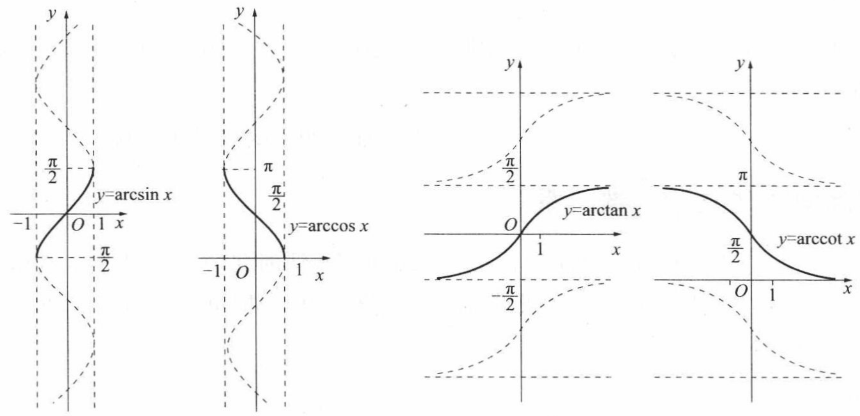

图 1—9

五、反函数和复合函数

1. 反函数

定义 4　设 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 Z,如果对于每一个 $y\in Z$ 总有一个确定的且满足于 $y=f(x)$的 $x\in D$ 与之对应,其对应规则记作 f^{-1},这个定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为$y=f(x)$的**反函数**,或称它们互为反函数.

习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,所以 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$习惯上写成 $y=f^{-1}(x)$.

例 5　求 $y=2x+3$ 的反函数.

解　由 $y=2x+3$ 求出 $x=\dfrac{y-3}{2}$,将上式中的 x 换成 y,将 y 换成 x,因此 $y=2x+3$ 的反函数是 $y=\dfrac{x-3}{2}$.

注意:一个函数如果存在反函数,那么它们必定是一一对应的函数关系.

2. 复合函数

定义 5　设 $y=f(u)$的定义域为 D,$u=\varphi(x)$的值域为 Z,若 $D\cap Z\neq\varnothing$,则称函数 $y=f(\varphi(x))$为 x 的**复合函数**,x 为自变量,y 为因变量,u 称为**中间变量**.

例 6　设函数 $f(x)=\sin x,\varphi(x)=x^2+5$,求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=\sin(x^2+5),\varphi[f(x)]=f^2(x)+5=\sin^2x+5$.

例 7　分别指出下列函数的复合过程.

(1)$y=\sqrt{3x+2}$;　　(2)$y=(1+\ln x)^2$;　　(3)$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$.

解　(1)$y=\sqrt{3x+2}$是由 $y=\sqrt{u},u=3x+2$ 复合而成的.

(2)$y=(1+\ln x)^2$是由 $y=u^2,u=1+\ln x$ 复合而成的.

(3)$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$是由 $y=e^u,u=\sin v,v=\dfrac{1}{x}$复合而成的.

注意:不是任何两个函数都可复合成一个复合函数. 如 $y=\arcsin u,u=3+x^2$ 就不能复

合，这是因为对于任意的 $x\in D, u=3+x^2$ 都不在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内.

六、初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算或函数复合所构成、可用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

例如 $y=\sqrt{2+x}, y=(1+\cos x)^3, y=\ln(x^2+2)$ 等都是初等函数，分段函数一般不是初等函数.

七、实际问题建立的函数关系

例 8 设一淘宝网店采用某快递公司进行邮寄货物，到河北境内为如下收费标准，首重 12 元/kg，续重 5 元/kg，试求某同学在河北省内网购此网店的货物重量 x(kg)与所需要快递收费 y(元)之间的关系.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=12$；

当 $x>1$ 时，$y=12+5(x-1)=5x+7$，

所以
$$y=\begin{cases}12, & x\leqslant 1\\ 5x+7, & x>1\end{cases}.$$

习题 1—1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x+4}{x^2+5x+6}$；　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$；

(3) $y=\sin(e^x+x)$；　(4) $y=\arcsin\left(\dfrac{3+x}{2}\right)$；

(5) $y=\log_3(2^x-4)$；　(6) $y=\dfrac{|x|}{x}$.

2. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x\tan x$；　(2) $y=\lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$；

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(4) $f(x)=g(x)+g(-x)$.

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$；　(2) $y=\ln(x-1)$；

(3) $y=e^{x-2}+3$；　(4) $y=\sin(2x-1)$；

4. 设 $f(x)=\sin 2x$，求 $f(f(x))$.

5. 设 $f(x)=e^x, \varphi(x)=x^2$，求 $f(\varphi(x)), \varphi(f(x)), \varphi(\varphi(x))$.

6. 下列函数可以看成是由哪些简单的函数复合而成的：

(1) $y=\cos(4x+1)$；　(2) $y=2^{x^2}-x$；

(3) $y=\arcsin(2x)$；　(4) $y=\lg(6x-2)$.

7. 长为 100cm 铁丝围成矩形，求矩形的面积 s 与长 x 之间的函数关系.

第二节　极限

本节先复习数列的极限，然后给出函数极限的定义及性质.

一、数列的极限

1. 数列的定义

定义 1　如果按某一法则，对于每个 $n\in\mathbf{N}^+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标从小到大得到一个序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 就叫**数列**，简记数列 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的**项**，第 n 项 x_n 叫做数列的**一般项**或**通项**.

例 1　(1)数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$，具体写出就是 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$；

(2)数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$，具体写出就是 $-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{(-1)^n}{n},\cdots$；

(3)数列 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，具体写出就是 $0,1,0,1,\cdots,\dfrac{1+(-1)^n}{2},\cdots$.

2. 数列的极限

定义 2　设 $\{x_n\}$ 为一数列，当项数 n 无限增大时，数列中对应的项 x_n(即通项)无限逼近于一个确定的常数 a，则称 $\{x_n\}$ 的极限存在，a 为 $\{x_n\}$ 的**极限**，记作：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\text{或 } x_n\to a(n\to\infty),$$

也称 $\{x_n\}$ **收敛于** a. 如果 $\{x_n\}$ 没有极限，则称 $\{x_n\}$ 是发散的.

数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a，即指数列的项数无限增大时，通项 x_n 与 a 之间的距离无限逼近于零.

例 2　讨论例 1 中的各数列的极限是否存在.

解　(1)该数列的通项 $\dfrac{1}{2^n}$，$\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|=\dfrac{1}{2^n}$，当项数无限增大时，$|x_n-0|$ 无限逼近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

(2)该数列的通项 $\dfrac{(-1)^n}{n}$，$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$，当项数无限增大时，$|x_n-0|$ 无限逼近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

(3)该数列的通项 $\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，当项数无限增大时，奇数项无限地逼近 0，偶数项无限逼近于 1，因此一般项不可能无限地逼近一个常数，所以此数列极限不存在.

由数列极限的定义，可得出常数列的极限就是常数本身.

数列极限的几何解释：

例 2 中，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$，任取 0 的一个邻域 $U\left(0,\dfrac{1}{10}\right)$，即数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 从第 11 项开始都落在 0 的 $\dfrac{1}{10}$ 邻域内.

一般地，对于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，将常数 a 和数列 $\{x_n\}$ 在数轴上同它们对应的点表示出来，对 a 任

意给定的 ε 邻域 $U(a,\varepsilon)$，n 无限增大时，数列的项 x_n 从某项以后的所有项都落在该邻域内（如图 1－10）.

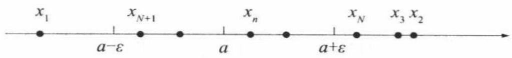

图 1－10

二、函数的极限

函数 $y=f(x)$ 的极限问题，主要考虑自变量 x 的两种变化形式：(1) $x\to\infty$，(2) $x\to x_0$（有限数），并且 x 不是离散变化，而是连续变化的.

1. $x\to\infty$ **时函数的极限**

观察 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像，发现当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 y 无限地逼近常数 0，这就是我们要讨论的当 $x\to\infty$，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 以零为极限.

定义 3　如果 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限地逼近于一个确定的常数 A，则 A 称为 **$f(x)$ 当 x 趋近于无穷大时的极限**，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

例 3　讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x}$.

解　由于 $\dfrac{3x-1}{x}=3-\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$3-\dfrac{1}{x}$ 无限逼近于 3，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x}=3$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何解释：

对任给的 $\varepsilon>0$，取点 A 的任一个邻域 $U(A,\varepsilon)$，作直线 $y=A\pm\varepsilon$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$y=f(x)$ 的函数图形都要落在两平行直线 $y=A\pm\varepsilon$ 夹成的带型区域内，如图 1－11 所示. 注意到 ε 可任意小，从而两平行线 $y=A\pm\varepsilon$ 所夹部分可任意窄.

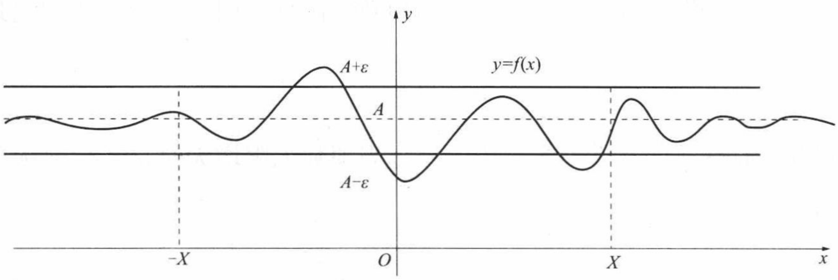

图 1－11

对于 $y=e^x$ 和 $y=e^{-x}$ 来说，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 只是单向与 x 轴无限接近，另一方向与 x 轴距离无限增大，为此我们需要定义 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时函数的极限.

定义 4　若当 $x>0(x<0)$ 且 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限逼近于一个确定的常数 A，则称 A 为 **$x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时函数的极限**，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$（$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$）.

由定义可知：$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

由定义 3 和定义 4，有

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例如，函数 $y=\arctan x$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 极限不存在.

2. $x\to x_0$ **时函数的极限**

定义 5　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当 x 无限逼近于 x_0 时，有 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 是 $\boldsymbol{f(x)}$ **当** $\boldsymbol{x\to x_0}$ **时的极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

当自变量 x 与 x_0 无限接近 $(x\neq x_0)$ 时，即 $|x-x_0|\to 0$，相应的函数值 $f(x)$ 无限逼近于 A，即 $f(x)$ 与常数 A 的差的绝对值 $|f(x)-A|$ 无限逼近于零.

由定义可知，任意 $x_0\in\mathbf{R}$，$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$，$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

例 4　讨论 $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)$.

解　当 $x\to 2$ 时，$f(x)=2x-1$ 无限地逼近 3，即 $|x-2|\to 0$ 时，有 $|f(x)-3|\to 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$.

例 5　讨论 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x\to 2$ 时是否存在极限.

解　当 $x=2$ 时，$f(x)$ 无定义. 当 $x\to 2$ 这个过程中，因为 $x\neq 2$，$\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$ 中消去因子 $(x-2)$，得到 $f(x)=x+2(x\neq 2)$，于是 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

上例说明虽然 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在 $x=2$ 处无定义，但它在该点的极限却存在.

在 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限概念中，自变量 x 从 x_0 的左右两侧需同时逼近 x_0，但有时需考虑 x 只从 x_0 的单侧逼近 x_0，这就是下面给出的左、右极限的定义.

定义 6　设 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$（或 $(x_0,x_0+\delta)$）内有定义，如果当 x 从 x_0 的左侧（右侧）无限逼近 x_0 时，有 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 是 $\boldsymbol{f(x)}$ **当** $\boldsymbol{x\to x_0}$ **时的左（右）极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$（记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$）.

由定义 5 和定义 6，有

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

即 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限都存在并且相等.

例 6　设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x<0\end{cases}$，讨论 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，因为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

三、极限的性质

数列极限与函数极限都具有唯一性、有界性、保号性等性质，下面我们以 $x\to x_0$ 时为例给

出函数极限的性质.

定理 3 (唯一性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则$A=B$.

定理 4 (局部有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在$x_0$的某一空心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$,在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内函数$f(x)$有界.

定理 5 (局部保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),则存在某个$\mathring{U}(x_0,\delta)$,在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内,有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

推论 如果在x_0的某个去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有$f(x)\geqslant 0$(或者$f(x)\leqslant 0$),而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

习题 1—2

1. 判断下列命题是否正确:

(1)收敛数列是有界的;

(2)发散数列是无界的;

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$一定存在;

(4)若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$一定存在.

2. 选择题.

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1$,以下结论正确的是( )

A. $f(x)$在$x=2$处有定义,且$f(2)=1$;

B. $f(x)$在2的某个邻域内有定义;

C. $f(x)$在2的某个右半邻域内有定义;

D. $f(x)$在2的某个左半邻域内有定义.

(2) $f(x_0^+)=f(x_0^-)=a$是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$的( )

A. 充要条件;　　B. 充分而非必要条件;

C. 必要而非充分条件;　　D. 非充分非必要条件.

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=a$是$\lim\limits_{x\to \infty}f(x)=a$的( )

A. 充要条件;

B. 充分而非必要条件;

C. 必要而非充分条件;

D. 非充分非必要条件.

3. 证明:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$的极限不存在.

4. 设$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant 1\\ \sin x, & x<1\end{cases}$,分别讨论$x\to 0$及$x\to 1$时$f(x)$的极限是否存在.

5. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x-4, & x\geqslant 0\\ x^2+a, & x<0\end{cases}$在$x=0$处极限存在,试确定$a$的值.

第三节　无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1　若 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 是该极限过程中的**无穷小量**.

其中省去 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 等极限过程的符号，"lim"表示任一极限过程.

例如，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，所以当 $n\to\infty$ 时，变量 $\frac{1}{n}$ 为无穷小量；因为 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，所以当 $x\to0$ 时，变量 x^2 是无穷小量；因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，变量 $\frac{1}{2^x}$ 是无穷小量.

注意：(1)无穷小是自变量变化过程中函数的变化趋势；

(2)要区分开无穷小量和绝对值很小的数，例如 0.000 001，当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）变化过程中，其极限仍是常数本身；

(3)数"0"是唯一一个可以看成无穷小的常数.

定理 1　$\lim f(x)=A$ 的充要条件是自变量在同一变化过程中存在一无穷小量 $\alpha(x)$，使得 $f(x)=\alpha(x)+A$，其中 A 为常数.

下面介绍无穷小的性质：

性质 1　有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 2　有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量.

性质 3　无穷小量与有界量之积仍为无穷小量.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，即 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数，根据性质 3，可知 $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}=0\right)$.

二、无穷大量

对于函数 $y=\frac{1}{x}$，当自变量 x 与零无限逼近时，相应函数值的绝对值 $\left|\frac{1}{x}\right|$ 无限增大，我们称当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x}$ 为**无穷大量**.

定义 2　在自变量某一变化过程中，如果相应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为该变化过程中的无穷大，记为 $\lim f(x)=\infty$. 如果相应的函数值 $f(x)$（$-f(x)$）无限增大，则称 $f(x)$ 为该变化过程中的正（负）无穷大，记作 $\lim f(x)=+\infty$（$\lim f(x)=-\infty$）.

由定义可知，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

注意：(1)无穷大量也是自变量变化过程中函数的变化趋势；

(2)要区分开无穷大量和绝对值很大的数；

(3)要区分无穷大量与无界量，无穷大量必是无界量，但无界量不一定是无穷大量.