俄罗斯初等数学问题集

The Collection of Elementary Mathematical Problem from Russia

◎ 马菊红　康沛嘉　高思博　编译

尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采撷其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯初等数学问题集

马菊红等　编译

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书精选了俄罗斯罗蒙诺索夫国立莫斯科大学入学考试试题、奥林匹克竞赛试题等资料进行编译,全书包含大量的经典初等数学问题及相关题型.读者不仅可以学到初等数学知识,同时还可以感受俄罗斯的数学教育.

本书适合中学师生及对初等数学问题感兴趣的爱好者收藏.

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯初等数学问题集/马菊红,康沛嘉,高思博编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.5

ISBN 978-7-5603-3565-0

Ⅰ.①俄… Ⅱ.①马…②康…③高… Ⅲ.①初等数学-俄罗斯-习题集 Ⅳ.①O12-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 071403 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王 慧
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 20.5 字数 355 千字
版 次 2012 年 5 月第 1 版 2012 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3565-0
定 价 38.00 元

目　录

1

罗蒙诺索夫国立莫斯科大学入学考试试题

力学数学系

笔试试题：

1. 依格尔和瓦洛加解了一道题：求某个三位数以 2 为底的对数，从所得到的数中减去某个给出的自然数，然后把差除以同一个自然数. 依格尔弄错了，在第一次运算中求了以 3 为底的对数，而瓦洛加算对了. 当他们核对自己的结果时，发现他们所得到的数互为相反数. 求初始的三位数.

2. 求解等式

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\geqslant\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}$$

3. 两个球相外切，一个球的半径是另一个球半径的 3 倍. 相互交错的直线 a 和 b 平行于穿过两球中心的某一平面. 两条直线 a 和 b 中的每一条都与两球相切，这两条直线之间的距离等于小球的直径. 求两条直线 a 和 b 之间的夹角.

4. 求解方程

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x$$

5. 线段 KB 是三角形 KLM 的平分线. 半径为 5 的圆周通过顶点 K，与 LM 边相切于点 B，与 KL 边相交于点 A. 求角 LKM 和三角形 KLM 的面积. ($ML=9\sqrt{3}$，$KA:LB=5:6$)

6. 求下列表达式的最小值

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|$$

这里 x 和 y 是任意数.

口试试题：

7. 函数 $f(x)=2|x-3|-2|x|+3x-3$ 的曲线和函数 $g(x)$ 的曲线对于点 $(2,-2)$ 对称. 求使方程 $f(x-a)=g(x+a)$ 有无穷多解的参数 a 的所有值.

8. 等差级数的第一项小于零，第一百项不小于 74，第二百项小于 200. 该级数在区间(0.5,5) 上的项数正好是在区间段[20,24.5] 上的项数的二分之一. 求该等差级数的第一项和级数的公差.

9. 求方程组 $\begin{cases}2xy-ax-2ay+a^2-2=0\\4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0\end{cases}$ 正好有两个不同解时，每一个参数 a 的所有值.

化学系，材料科学系，物理化学系

10. 求解不等式 $\sqrt{1-|x|}\geqslant x-2$.

11. 求解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)>2$.

12. 求解方程 $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=-\sqrt{6}\cos x$.

13. 平行四边形 $ABCD$ 的内角平分线构成四边形 $EFGH$，它的每一个顶点都是两个平分线的交点. 求：四边形 $EFGH$ 中所有边的平方和.（假设 $AB=BC+\frac{3}{2}$）

14. 在直立圆锥中有一个内切球. 圆锥整个表面的面积与球的表面的面积比等于 49 : 12. 求：球的两倍体积与圆锥体积之比.

15. 求方程 $\sqrt{(x^2+|x|)(x^2+5|x|+6)+1}=3|x|-3ax-a^2-a+1$ 的最大根和最小根均为 -3 时参数 a 的所有值.

生物系，生物工程与生物信息技术系，基础医学系

16. 求解不等式 $\sqrt{x+1}(x^2+3x-4)\geqslant 0$.

17. 求方程 $3\cos 2x+11\sin x=7$ 的解.

18. 边长为 $AB=4,BC=3,CD=2,AD=1$ 的凸四边形 $ABCD$ 内接于圆中. 求该圆的半径.

19. 求解方程

$$9^{\arcsin(2x+1)}+\log_3(2\arcsin(2x+1))-3^{\arccos(6x+3)}+\log_{\frac{1}{3}}\arccos(6x+3)=0$$

20. 一个木筏和一个小船分别同时从距离为 2 km 的 A 和 B 两点顺河流而下开始运动. 同时一个快艇从点 B 迎着木筏开始运动. 小船本身的速度等于水流速度，快艇本身的速度是水流速度的 2 倍. 遇到木筏后，快艇顺时返回，直到与小船相遇，之后重新返回并往木筏方向运动，直至与其相遇，然后再驶向小船，以此类推. 在木筏穿越 1 000 km 距离的时间内快艇遇到木筏多少次?

21. 在立方体 $ABCDA'B'C'D'$ 中（棱长为 8）作对角线 AC'，并在上面标出

点 E,使 $AE=5$. 过点 E 作垂直于 AC' 的平面. 求所形成立方体截面的面积.

土壤学系

22. 若已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,求 $\sin(\frac{5\pi}{6}+2\alpha)$ 的值.

23. 求方程 $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x^3}$ 的解.

24. 求解不等式 $(3\sqrt{x})^{\log_2 x}\geqslant 1$.

25. 从村里往同一方向走出三个行人:第一个人出去后过 2 min 第二个人出去,第二个人出去后过 3 min 第三个人出去. 第三个行人出村后过了 5 min 赶上了第二个行人,又过了 2 min 他赶上了第一个行人. 第二个行人出村后过了多长时间能赶上第一个行人?

26. α 度的正弦等于 α 弧度的余弦,求最小的正数 α.

27. 在三角形 ABC 中已知边 $AB=9$,$BC=8$,$AC=7$,AD 是角 BAC 的平分线. 圆周通过点 A,与 BC 边相切于点 D,与 AB 边和 AC 边分别相交于点 E 和点 F. 求线段 EF 的长度.

28. 参数 a 为任何值的情况下方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-5x+6y+4=0\\ y+ax+ab=0\end{cases}$$

都正好有两个不同解 (x,y),求:参数 b 的值.

地理系

29. 求方程 $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=3(x-1)$ 的解.

30. 数列 $1,\sqrt{y},\sqrt{z}$ 和 $1,y-1,z-y$ 均为等差数列,求第二个等差数列的公差.

31. 求方程 $2\sin x-\frac{1}{\cos x}+\tan x-1=0$ 的解.

32. 联结两个居民点的道路的长度等于 280 km. 小轿车通过道路用 4 h,卡车通过道路用 5 h. 两辆汽车沿道路匀速运动,根据限制,有一些路段,它们的速度等于 40 km/h. 在没有速度限制的情况下小轿车驶过道路要比卡车快 1 h 10 min. 求:

(1) 速度受限制地段的总长度;

(2) 小轿车和卡车的速度.

33. 梯形 $ABCD$ 的周长等于 44. 圆周与底 AB 交于点 K 和 L,与边 BC 交于

点 M 和 N，与底 CD 交于点 P 和 R，与边 AD 交于点 S 和 T，且 $AK < AL$，$CN < CM$，$CP < CR$，$AT < AS$. 已知：$KL = MN = 1$，$PR = ST = 7$，$AK = 5$，$CP = \frac{1}{2}$. 求梯形底的长度.

34. 在参数 c 为何值的情况下方程 $2x \cdot \arcsin(\sin x) = c \cdot 3^{\log_3 x} + 3$ 的解的个数有限？

心理学系

35. 求方程 $|7^x - 3| = 7^x + 1$ 的解.

36. 求不等式 $\sqrt{\log_{(x-1)}(x-2)} < \sqrt{2}$ 的解.

37. 求方程 $\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0$ 的解.

38. 通过点 A 的直线交圆周于点 B 和 C（点 B 位于点 A 和点 C 之间）. 另一条通过点 A 的直线交圆周于点 D 和 E（点 D 位于点 A 和点 E 之间）. 已知：线段 BD 往点 D 以外的延长线和线段 CE 往点 E 以外的延长线交于点 F. 除此之外，$FE = 1$，$AC = 2AE$，求 FD.

39. 在所有 a 的情况下求解方程组

$$\begin{cases} |2x + 2a| > |x| + a \\ ax < 0 \end{cases}$$

40. 求解方程

$$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x\cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x\sin 2x - 162$$

语文系，社会学系

41. 求解不等式 $\frac{5 - kx}{|x - 2|} \leqslant |2 - x|$.

42. 半径为 7 和 3 的圆相内切. 在大圆中恰好有三条不同的弦，它们长度相等，并与小圆相切. 求这三条弦被切点分割的线段的长度.

43. 求方程

$$x^2 - 2x\sin \pi y - \cos 2x + 2\cos^2 x + \sqrt{-4xz - z^2 - 3} = (1 + 2xz)\log_2^2 \frac{2y}{z}$$

的所有解 (x, y, z).

44. 考试前丽扎和她的同学在麻雀山上寻找了四叶饰，按照民间说法，四叶饰可以带来成功. 第一天同学比丽扎找到的四叶饰多 20%，第二天，相反，同学找到的四叶饰比丽扎的少 30%. 两天时间丽扎找到的四叶饰总共比同学多 10%. 这两个学生在这种条件下能找到的四叶饰最少数量是多少？

45. 往正三棱锥中内接一个体积为 8 的立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$，它的面

$A_1B_1C_1D_1$ 在三棱锥的底面(边长为 6 的三角形)上,与底面相对的棱 CD 在三棱锥的侧面上,顶点 A 和 B 属于另外的侧面.求三棱锥的高.

46. 对于参数 k 的每一个自然数值,求由条件 $\begin{cases}\sin x \geqslant 0 \\ \sin y \leqslant 0 \\ -\pi k \leqslant x \leqslant \pi k \\ -\pi k \leqslant y \leqslant \pi k\end{cases}$ 在平面 (xOy) 上给出的图形的面积.

答案与题解

1. 答案:216.

解 设 x 是给出的三位数,y 是第二次运算中被减去的自然数,那么

$$\frac{\log_3 x - y}{y} \cdot \frac{\log_2 x - y}{y} = 1 \Rightarrow \log_3 x \log_2 x - y(\log_2 x \log_3 x) + y^2 = y^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{\log_3 x \log_2 x}{\log_2 x + \log_3 x} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{\log_x 3 \log_x 2}}{\dfrac{1}{\log_x 2} + \dfrac{1}{\log_x 3}} = \frac{1}{\log_x 3 + \log_x 2} = \log_6 x$$

由此可得:$x = 6^y \in \{6, 36, 216, 1\,296, \cdots\}$. 在此集合中只有一个是三位数即 216.

2. 答案:$(0, \infty)$.

解 我们用 $t = 3^{-x}(t > 0)$ 表示

$$\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}} - \frac{t-1}{\sqrt{1-t^2} + t - 1} \geqslant \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}} + \frac{1-t}{\sqrt{1-t}(\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t})} \geqslant \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \\ \sqrt{1-t} \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t})^2}{(1+t) - (1-t)} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \\ t \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{2+2\sqrt{1-t^2}}{2t} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \Leftrightarrow t<1 \\ t \neq 1\end{cases}$$

这样，$3^{-x}<1 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow x>0$.

3. 答案：$90°$.

解　设 π 是平行于直线 a 和 b，并通过两球中心的平面，π_a 和 π_b 是与其平行的平面，并分别包含直线 a 和直线 b. 平面 π_a 和 π_b 与小球有公共点，因为直线 a 和 b 与该球相切. 直线 a 和 b 之间的距离(按照条件等于小球的直径)，也等于平面 π_a 和 π_b 之间的距离. 这就意味着，平面 π_a 和 π_b 在径向相反的点上与球相切，$A \in a$，$B \in b$(图 1).

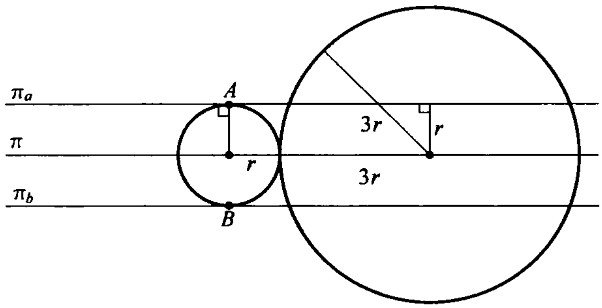

图 1

由于平面 π_a 和 π_b 都平行于平面 π，并与其距离相等，那么，大球被它们所截的截面是半径相同的圆 S_a 和 S_b，那么 $\sqrt{(3r)^2-r^2}=2\sqrt{2}r$.

直线 a 和 b 与圆 S_a 和 S_b 分别相切.

在把平面 π_b 平行移动向量 $\overrightarrow{BA}$ 的情况下，它变为平面 π_a，把直线 b 平行移动向量 $\overrightarrow{BA}$ 的情况下，它会变为与其平行的直线 b'，b' 通过点 A，与圆 S_a 相切，但与直线 a 不重合(图 2).

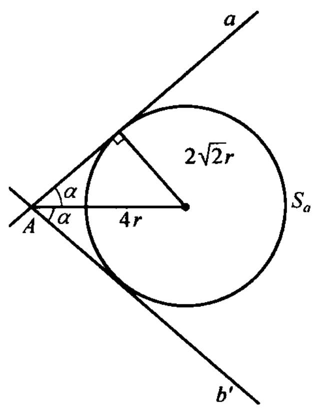

图 2

直线 a 和 b 之间的夹角等于直线 a 和 b' 之间的夹角，它的计算方法如下(参见图 2)

$$2\alpha=2\arcsin\frac{2\sqrt{2}r}{4r}=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

4. 答案：$\pi+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

解 可得

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x\Leftrightarrow$$
$$|1-2\sin x+\cos x|=-2\sin^2 x-2\sin x$$

由最后一个方程我们有

$$-2\sin x(\sin x+1)\geqslant 0\Rightarrow -1\leqslant \sin x\leqslant 0\Rightarrow 1-2\sin x+\cos x\geqslant 0$$

因此,它等价于下列方程组

$$\begin{cases}1-2\sin x+\cos x=-2\sin^2 x-2\sin x\\1-2\sin x+\cos x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}(1+\cos x)+2\sin^2 x=0\\1-2\sin x+\cos x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}1+\cos x=0\\\sin^2 x=0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2\pi n\quad(n\in\mathbf{Z})$$

5. 答案:$60^\circ,\dfrac{405\sqrt{3}}{16}$.

解 通过点 A 作平行于边 LM 的直线. 该直线交圆周于点 C(图 3). 弧 AB 和弧 BC 相等,因此角 BKC 等于角 BKA. 就是说,也等于角 BKM(KB 是平分线). 因此,点 C 在 KM 边上.

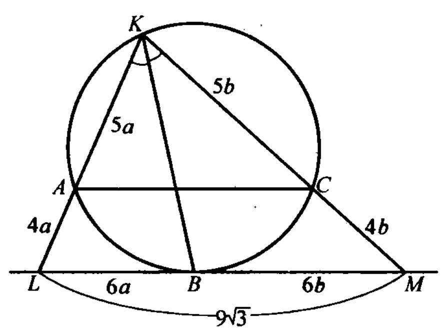

图 3

根据切割线定理有

$$LB^2=LA\cdot LK\Rightarrow 6a^2=LA(LA+5a)\Rightarrow LA=4a$$

由此可得

$$LK=9a,AC=\frac{AK}{LK}\cdot LM=\frac{5a}{9a}\cdot 9\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

$$\sin\angle LKM=\frac{AC}{2R}=\frac{5\sqrt{3}}{2\times 5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

即角 K 可能等于 $60°$ 或 $120°$.

如果角 K 等于 $120°$,那么弧 AB 就会等于 $120°$,圆的中心就会在直线 AC 和 LM 之间. 那么从直线 AC 到点 K 的距离就会小于到直线 LM 的距离,而实际这两个距离的比是 $5:4$.

因此,$\angle K=60°$.

根据泰勒斯定理有:$KC=5b$,$CM=4b$,由此根据切线平方定理可得:$BM=\sqrt{4b(4b+5b)}=6b$.

对于三角形 KLM 写出余弦定理

$$(9a)^2+(9b)^2-2\cdot 9a\cdot 9b\cdot\cos 60°=(6a+6b)^2\Rightarrow$$

$$\frac{9}{4}(6a+6b)^2-\frac{9}{4}\cdot 2\cdot 36ab-81ab=(6a+6b)^2\Rightarrow$$

$$3\cdot 81\cdot ab=\frac{5}{4}(6a+6b)^2$$

代入 $6a+6b=LM=9\sqrt{3}$,可得

$$3\cdot 81ab=\frac{5}{4}\cdot 81\cdot 3\Rightarrow 81ab=\frac{405}{4}\Rightarrow$$

$$S_{KLM}=\frac{1}{2}\cdot 9a\cdot 9b\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 81\cdot ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{405\sqrt{3}}{16}$$

6. 答案:$\frac{1}{3}$.

解 在 x 固定的情况下,表达式

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|=$$

$$|y-(2x-1)|+|y-(-x)|+|y-0|\geqslant$$

$$|y-y_3|+|y-y_1|\geqslant(y_3-y)+(y-y_1)=y_3-y_1$$

这里 y_3 是 $2x-1,-x,0$ 三个数中的最大值,y_1 是 $2x-1,-x,0$ 三个数中的最小数. 因此,在 y 等于 y_2 即这三个数的中间数时它具有最小值 $m(x)$,且 $m(x)$ 本身等于差值 y_3-y_1. 同样,该差值在 $x=\frac{1}{3}$(图 4) 时为最小,等于$\frac{1}{3}$.

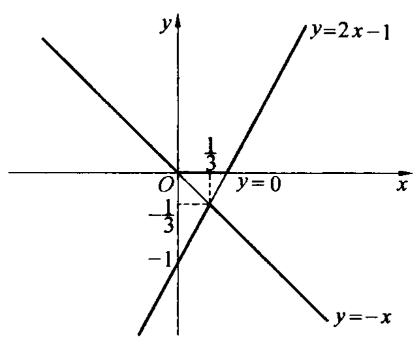

图 4

7. 答案:$-\frac{5}{3},\frac{1}{3},1,\frac{7}{3}$.

解 函数 $y=f(x-a)$ 的曲线是由

函数 $y=f(x)$ 的曲线向右移动 a 得到的，而函数 $y=g(x+a)$ 的曲线是由函数 $y=g(x)$ 的曲线向左移动 a 得到的. 因此，函数 $y=f(x-a)$ 和 $y=g(x+a)$ 的曲线在任何 a 的情况下对于点(2,2)对称. 所求问题等价于以下问题：在 a 为何值时，函数 $f(x)$ 向右移动 a 的曲线在对于点(2,2)对称的情况下本身有无穷多个点重合？

函数 $f(x)$ 的曲线由两条平行射线和与其不平行的线段组成(图5)，在移动和对称的情况下，它们会分别变为其平行的射线和线段. 因此，所求的 a 是下列点中之一向右移动到点(2,2)得到的：A_1，A_4($a=\frac{7}{3}$，$-\frac{5}{3}$；在对称情况下，所移动的射线部分重合)，A_2($a=1$；在对称的情况下所移动的线段部分重合)或 A_3($a=\frac{1}{3}$；在对称情况下所移动的射线部分相互重合).

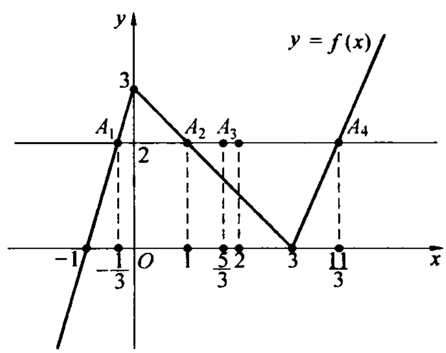

图 5

8. 答案：$a_1=-\frac{1}{4}$，$d=\frac{3}{4}$.

解　如果在区间(0.5,5)上恰好有 n 项公差为 d 的等差级数，那么 $5-0.5=4.5\leqslant(n+1)d$(否则从这 n 项的最左边或最右边到相应的区端头的距离会大于 d，并且至少还要有一项“进入”区间). 如果在区间[20,24.5]上恰好有该数列的 $n+2$ 项，那么 $24.5-20=4.5\geqslant(n+1)d$. 因此，$4.5=(n+1)d$，区间的两端 0.5 和 5 是数列的项(否则在上面就有 $n+1$ 项)，且区间的两端 20 和 24.5 也是数列的项(否则在它上面就会有 $n+1$ 项数列).

因此，数 d 是数 4.5 和 $20-5=15$ 的约数(因子)(即每个中都放入的是它们的整数倍)，就是说，是数的因子，最大公因子$(4.5,15)=1.5$.

由条件 $a_1<0$，$a_{100}\geqslant 74$ 有

$$99d > 74 \Rightarrow d > \frac{74}{99} > \frac{1}{2}$$

由条件 $a_{100} \geqslant 74, a_{200} < 200$,可得

$$99d \leqslant 126 \Rightarrow d \leqslant \frac{126}{99} < \frac{3}{2}$$

在区间$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$中只有一个数是 1.5 的因子,即数$\frac{3}{4}$,所以 $d=\frac{3}{4}$.

由于 $a_1 < 0$,那么 $a_1 \leqslant 0.5-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$,另一方面

$$a_1 = a_{100} - 99 \times \frac{3}{4} \geqslant 74 - 74\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

因此,$a_1=-\frac{1}{4}$.

9. 答案:$\frac{1}{3}, -2$.

解 可得

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2y-a)(x-a) = 2 \\ 4(x-a)^2 + (2y-a)^2 = 12a^2 + 20a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y-\frac{a}{2})(x-a) = 1 \\ (x-a)^2 + (y-\frac{a}{2})^2 = 3a^2 + 5a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'y' = 1 \\ x'^2 + y'^2 = 3a^2 + 5a \end{cases}$$

这里 $x'=x-a, y'=y-\frac{a}{2}$. 后一个方程组(也就是初始方程组)恰好有 2 个不同解的充要条件是圆周 $x'^2+y'^2=3a^2+5a$ 与双曲线 $x'y'=1$ 在点 $(1,1)$ 和点 $(-1,-1)$ 相切(图 6),即

$$3a^2 + 5a = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

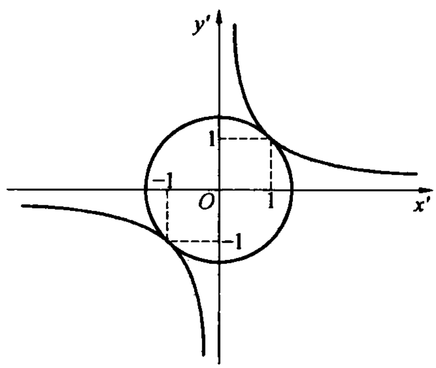

图 6

10. 答案：$-1\leqslant x\leqslant 1$.

解　可得

$$\sqrt{1-|x|}\geqslant x-2\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 1(\Rightarrow x-2<0)\\ \sqrt{1-|x|}\geqslant x-2\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$$

11. 答案：$-\dfrac{14}{3}<x<-3$.

解　可得

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+3}{x-2}>2\Leftrightarrow 0<\frac{x-2+5}{x-2}<\frac{1}{4}\Leftrightarrow -1<\frac{5}{x-2}<-\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{4}{3}<\frac{x-2}{5}<-1\Leftrightarrow -\frac{14}{3}<x<-3$$

12. 答案：$\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\dfrac{\pi}{8}\pm\dfrac{5\pi}{12}+\pi k$，这里 $n,k\in\mathbf{Z}$.

解　可得

$$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=-\sqrt{6}\cos x\Leftrightarrow$$

$$(\cos 3x+\cos x)+(\sin 3x+\sin x)+\sqrt{6}\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\cos x(2\cos 2x+2\sin 2x+\sqrt{6})=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\cos x=0\\ \cos(2x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi n\quad(n\in\mathbf{Z})\\ x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{5\pi}{12}+\pi k\quad(k\in\mathbf{Z})\end{cases}$$

13. 答案：$\dfrac{9}{2}$.

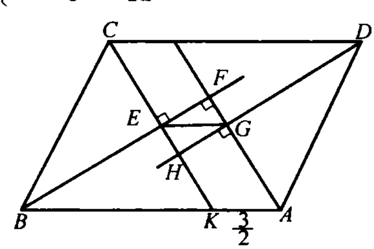

图 7

解　三角形 BCK（图 7）是等腰三角形，因为 $\angle BKC=\angle DCK=\angle BCK$，因此 $BK=BC$，且平分线 BE 是高. 因此，四边形 $EFGH$ 的角 E 是直角，与它的其他所有角一样（类似地）. 点 E 距边 CD 和 BC 等距离（因为在角平分线 CE 上），距边 BC 和 AB 的距离也相等（因为在平分线 BE 上），因此，它距直线 AB 和 CD 等距离，像点 G 一样（类似地），就是说，$EG\parallel AB$. 但 $CK\parallel AF$，因此 $AKEG$ 是平行四边形，且

$$EF^2+FG^2+GH^2+EH^2=2(EF^2+FG^2)=2EG^2=$$

$$2KA^2=2(AB-BC)^2=2\times(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{2}$$

14. 答案:24 : 49.

解 作圆锥的轴截面(图 8),我们有:$r=a\tan\alpha, l=\dfrac{a}{\cos 2\alpha}$,而圆锥与球的表面面积的比等于

$$49:12=(\pi a^2+\pi la):(4\pi r^2)$$

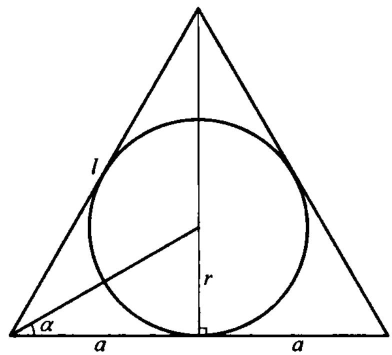

图 8

因此,我们可得

$$49\tan^2\alpha=3(1+\frac{1}{\cos 2\alpha})\Rightarrow 49t=3(1+\frac{1+t}{1-t})$$

这里 $t=\tan^2\alpha\Rightarrow t(1-t)=\dfrac{6}{49}$,由此所求的比等于

$$\frac{2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi a^2\cdot a\tan 2\alpha}=8\tan^3\alpha\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=4t(1-t)=4\cdot\frac{6}{49}$$

说明 可以证明,像表面面积一样,球与在它周围所画出的圆锥(或圆柱,或多面体)的体积总是成比例.

15. 答案:$4-\sqrt{7}<a<4+\sqrt{7}$.

解 根式

$$(x^2+|x|)(x^2+5|x|+6)+1=$$
$$|x|(|x|+3)(|x|+1)(|x|+2)+1=$$
$$(x^2+3|x|)(x^2+3|x|+2)+1=$$
$$(y-1)(y+1)+1=y^2$$

是正数 $y=x^2+3|x|+1$ 的平方.

因此,方程可变换为如下形式

$$y=3|x|-3ax-a^2-a+1 \Leftrightarrow x^2+3ax+a^2+a=0$$

且所得到方程的左边部分是带正最高项系数的二次三项式 $f(x)$. 它的根不在数 -3 的同一面的条件是:当且只有当

$$\begin{aligned} f(-3)<0 &\Leftrightarrow 9-9a+a^2+a<0 \Leftrightarrow \\ & a^2-8a+9<0 \Leftrightarrow \\ & 4-\sqrt{7}<a<4+\sqrt{7} \end{aligned}$$

16. 答案:$x=-1, x\geqslant 1$.

解 可得

$$\sqrt{x+1}(x^2+3x-4)\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x+4)(x-1)\geqslant 0\\ x+1\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ x\geqslant 1\end{cases}$$

17. 答案:$(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in \mathbf{Z}$.

解 设 $s=\sin x$ 则

$$3\cos 2x+11\sin x=7 \Leftrightarrow 3(1-2s^2)+11s=7 \Leftrightarrow$$

$$6s^2-11s+4=0 \Leftrightarrow \left(s-\frac{4}{3}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$

18. 答案:$\dfrac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$.

解 由于 $\angle B+\angle D=\pi$(图 9),那么对于三角形 ABC 和 ADC,根据余弦定理有

$$\frac{4^2+3^2-x^2}{2\times 4\times 3}+\frac{2^2+1^2-x^2}{2\times 2\times 1}=0 \Rightarrow$$

$$25-x^2+6(5-x^2)=0 \Rightarrow x^2=\frac{55}{7} \Rightarrow$$

$$\cos\angle D=\frac{2^2+1^2-\frac{55}{7}}{2\times 2\times 1}=-\frac{5}{7} \Rightarrow$$

$$\sin\angle D=\sqrt{1-\frac{5^2}{7^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

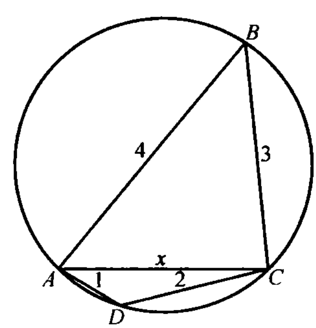

图 9

由此,根据正弦定理,圆的半径等于