职工高校教学参考讲义

射影几何基础

马 文 杰

常州市教育局工农教育科
戚墅堰机车车辆工厂职工大学

一九八二年八月

主 要 参 考 文 献

1、射影几何学　　H、ϕ、切特维鲁新著

2、画法几何学习题集　A·K·鲁达也夫著

3、轴测投影学　E·A·格拉祖诺夫、H·ϕ·切特维鲁新合著

4、射影几何讲义　哈尔滨建筑工程学院谢培青等编

5、射影变换　　中国矿业学院制图教研室编

6、仿射几何学　　焦作矿业学院制图教研室编

7、射影几何讲义　华东石油学院姚德惠编

8、仿射对影及其应用　　成都科技大学龚石钰

9、亲似对应及其在直角投影中的应用　　洛阳农机学院董成印

目　录

射影几何基础

前　言

众所周知，画法几何是工程图学的理论基础，而画法几何起源于射影几何，它是射影几何在工程图示图解应用方面发展变化的一个分支。根据科学技术的发展，计算机绘图的技能将要成为制图课程的基本技能。所以，如果仍把制图课的理论基础局限于正投影范围的研究和应用，显然是不符合现代科学技术对本门课程所提出的要求。

我们在解决空间几何问题时，为了解题方便和可能，常需要采用不同的射影方法，以改变形体的形状及其在空间的相对位置。而运用仿射几何、射影几何为解决画法几何中的某些问题，特别是对待画法几何中还难于解决的问题，提供了比较方便的解决方法。

在全国高等院校及铁道部、常州市等职工高校制订的“画法几何和机械制图”教学大纲中均将“亲似对应”等射影几何基本知识作为选修内容。为适应这一教学需要，受常州市教育局和市机电工程学会工程图学组的委托，特将本人学习心得体会整理编写成本讲义。

本讲义对所阐述的内容，力求做到名词统一，由浅入深通俗易懂便于自学。对基本概念、基本定理和基本作图方法作了重点介绍。同时，考虑到需要和可能，讲义中紧密结合画法几何部分，以使大家能掌握多种解题方法，进一步提高本门课程的教学质量。本讲义可供职工高校、中等专业学校师生教学参考。

在编写本讲义时，得到了华东石油学院姚德惠付教授的谆谆教诲，

上海同济大学钱可强老师的具体指导和常州市职业大学卞正国同志的认真校对！在此深表谢意。在付印过程中，得到了市教育局　等有关单位领导和同志们的大力支持，戚机厂职工大学机制8101班杨剑刚、高焜平、高怡娟、俞国平、方明为同学负责部分膳写和描图工作，在此一并致谢。

由于本人水平较低，加上时间仓促，错误缺点一定很多，恳切希望批评指正。

编　者

82。2

绪　　论

(一) 几何学研究的对象

几何学所研究的对象，就是研究图形的某些不变性质和不变量。

如我们大家熟知的初等几何（欧几里德几何）主要是研究图形在空间内任意搬动不变性质的几何学。

在欧氏几何里总是用距离、角度、面积、体积为度量或比较来表达和证明几何事实的。我们把研究度量关系和方法的几何叫作度量几何。所以初等几何是属于度量几何。

若把搬动看作是一种变换，则在此变换下距离和角度等不变。那末，是否还有其它变换呢？回答是肯定的。

例如，物体在太阳光照射下，在地面形成影象。这种由物体的图形到影象的变换是太阳光线的平行投影，它是一种仿射变换。

又如，把图形放在灯光的前面（放幻灯），投影到幕布上得到影象的变换是中心投影，它就是一种射影变换。

在仿射变换与射影变换下，研究图形的不变性和不变量，称为仿射几何学和射影几何学。

(二) 射影几何的基本内容

如果我们说，初等几何是研究图形在刚体运动（搬动）之下的不变性质，而射影几何研究的对象，则是图形在射影变换之下的不变性质。

我们不妨简单回顾一下历史，在十九世纪初，由于绘图和建筑上

的需要，产生了射影几何。举个通俗例子，当一个画家要把一个实物描绘在纸上他的眼睛好比灯光，把实物映射到纸上成为影象，然后再描绘成图画；又如在建筑上需要把设计的建筑物画在一个平百图纸上。图纸上的图样就是建筑物的平百投影。这种投影技术在实用方百的发巳就成为射影几何。

到了十九世纪末期，射影几何已逐渐渗透到各几何领域。

所以我们可以这样说，射影几何是几何学的一个组成部分，它是研究几何图形在射影变换下的射影性质——即它的不变性和不变量。

所谓射影变换，就是一种应用中心投影法，把几何图形改变成另一种新的几何图形。

图形经过这种变换后，有些性质已经改变，有些性质仍未改变，例如等边三角形ΔABC，经中心射影后所得的图形仍为三角形ΔA'B'C'（如图1）此性质未变，但等边的性质改变了。

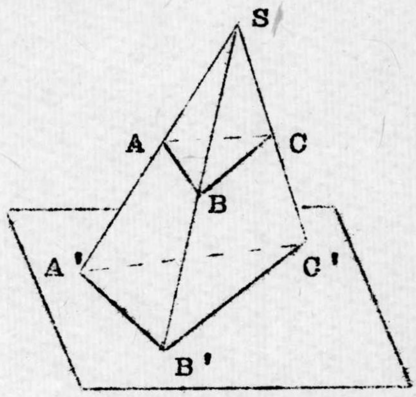

图1

射影几何学就是研究几何图形经过射影变换后，那些不变的性质和不变的量的一门科学。

一个比较复杂的问题，经过几何变换后，成为一个比较简单的问题进行解决。例如一般三角形的某些问题，经过变换后可以成为等边三角形问题；有关某些椭园问题，可以经过变换后变成园的有关问题，使问题得以解决或简化作图。

前百已述，欧氏几何是属于度量几何。而射影几何着眼于几何元素间的相对位置，所以射影几何又称为位置几何。

在射影几何观点下，任何三角形都是等价的，在射影变换下可以互相转化；而园、椭园、双曲线、抛物线也是等价的。例如图2所示，园AB经中心S射影W_1平百上为一椭园A_1B_1，而在W'平百上的射影为一双曲线$B'D'$，在W_1'平百上的射影成为一抛物线$B_1'D_1'$。反之，也可认为园AB为椭园、双曲线、抛物线的射影。所以在射影几何里，并不区分园、椭园、双曲线、抛物线等。而以二次曲线作为它们的代表。

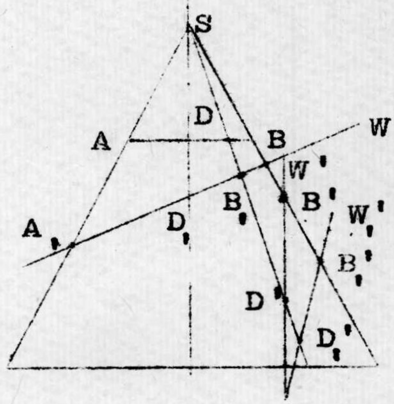

图2

而在解析几何里，园、椭园、双曲线、抛物线等是作为不同的曲线分别研究其几何性质的。

（三）几何变换间的关系。

关于几何变换，在初等几何中所遇到的相似变换，在画法几何中应用的投影变换等，都是常用的几何变换方法。

应用不同的变换方法来研究几何性质，可以得到不同的几何学。

1、在制图和画法几何中应用正投影方法所进行的几何变换是画法几何学。

2、应用平行投影法所进行的几何变换是仿射几何学。

3、应用中心投影法所进行的几何变换是射影几何学。

4、射影几何学是站在更高的角度来观察问题，它和欧氏几何和仿射几何之间有不同，又有联系（如图3）。

仿射几何包括在射影几何之中，平行投影法是中心投影的一种特

殊情况（即投影中心S变为无穷远点时）。而正投影法又是仿射几何的特殊情况。三者之间的联系是十分明显的。

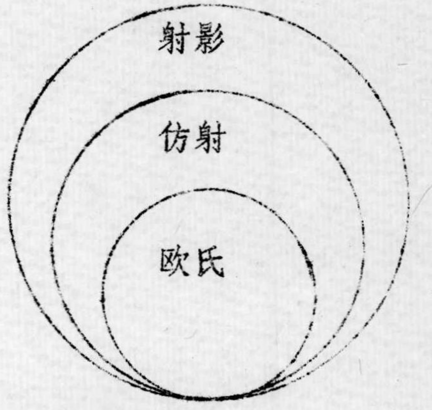

图3

大家知道，初等几何学是在欧几里德空间进行研究的，而射影几何学则是在非欧几里德空间，即射影空间进行研究的。仿射几何学虽属欧氏空间，但它具有射影几何的简单的基本概念，即在欧氏空间和非欧氏空间之间。仿射概念和仿射变换起着承上启下的构通作用。

我们的讲义定命为"射影几何基础"，也就是说重点将介绍亲似变换和仿射变换这两章。而射影变换的内容仅作一简介，特此说明。

(四) 学习的目的：

1、加深对欧氏几何的理解；

2、进一步理解画法几何作图法的内在联系；

3、运用仿射变换，射影变换的方法可简化和解决画法几何中难于解决的作图问题；

4、研究新的多种作图方法，充实了画法几何的内容；

5、研究多种几何变换方法有利于学习和掌握计算机绘图等。

第一章　亲似变换（亲似对应）

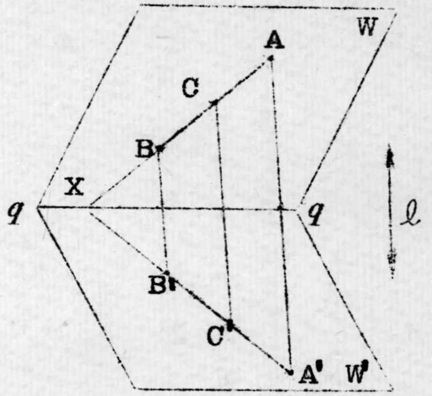

图1－1

§1-1、亲似对应的建立

(一)两个平百的透视仿射对应

设有两平百W和W'相交于qq直线，且已知直线ℓ与平百W和W'均相交（图1-1）。在W平百上任取一点A和线段AB，按ℓ方向向W'百作平行投影，在W'百上得到它们的投影A'和A'B'；反之，A和AB也是A'和A'B'按ℓ方向在W百上的投影，这样得到平百W和W'上的点、线是一一对应的。

这种利用平行投射所建立的平百W和W'之间的同素对应，就叫做透视仿射对应。

(二)透视仿射对应的基本性质

1、各对对应点的连线互相平行。因此，一对对应点的连线就决定了对应方向（即ℓ方向）。

2、两平百W和W'交线qq上的点或直线有二重性，即轴上的点或直线的对应点或直线与自身重合。

3、点。直线仍对应点、直线的性质称为同素性。而对应直线的交点X必交于对应轴上。

4、居于直线AB上的点C对应直线A'B'上一点C'，即C点的对应点C'必在AB直线的对应直线A'B'上。这一性质称为点与直线的从居性，在变换后该性质不改变。

5、一直线上三个点A、B、C简比不变（等简比）。简比定义如下：

直线上A、B二点为基础点，C点为分点，

则 $\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$ ，记作（ABC）=（A'B'C'）

图1－2

如图1－2所示，C点在AB线段外部，AC和BC同方向，则简比（ABC）为正；若C点在AB线之内，则简比（ABC）为负。

（三）平百内的透视仿射对应（又称亲似对应）

前百所述，在建立透视仿射对应中，W和W'平百是不重合的。

现假设在W和W'平百间已建立了一个透视仿射对应。（如图1－3）。其二重直线为 qq，当将一平百W固定不动，而将另一平百W'绕 qq 轴旋转至与W百重合，显然，这时空间两平百场（属于平百上点和直线的集合）的透视仿射对应关系不会破坏。

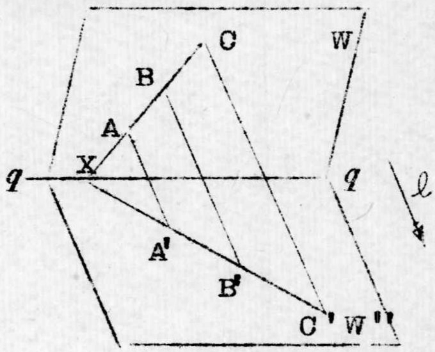

图1－3

图1－4为重合后的情况。这种在同一个平百场上透视仿射对应也称为亲似对应。

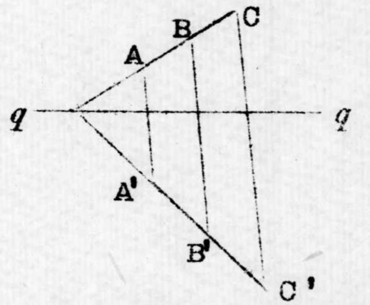

图1－4

此时，直线 qq 不再是W和W'二平百的交线，但仍保留其二重直线的性质，叫做亲似轴（或对应轴）。

点A和A'叫做一对亲似点；A和A'的连线就是亲似方向，且AA'∥BB'∥CC'；同时，（ABC）=（A'B'C'）简比不变。这样的变换也叫做亲似变换。（注：“对应”，“变换”是同义的两个名词。）

由于在亲似对应中两个平百重合，所以对应是在一个平百上进行的，故在平百上每个点可看作属于W平百上，也可看作属于W' 平百上，为了区别起见，对元素符号作如下规定：

在W百上的元素，点用A、B、C…… 表示，线用a、b、c……表示。

在W'百上的元素，则都在字母上加撇，如A'、B'、C'，a' b'、c'等。

§1－2确定亲似对应的条件

亲似对应是透视仿射对应当W和W'重合时的特定情况，因此，亲似对应具有透视仿射对应的所有性质。现分析确定亲似对应的条件。

定理：亲似对应由对应轴和一对对应点完全确定。

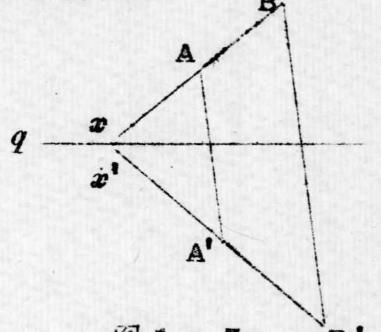

图1－5

证：假设已知对应轴q和一对对应点A、A'，（如图1－5）。现来证对于平百上任一点B，总可以求出唯一确定的对应点B'。

引直线AB使与q轴交于x点，因q轴上任一点均自身对应，即x点的对应点x与x重合，（$x'\equiv x$）。又因亲似对应保持同素性，Ax直线对应A'x'直线，连A'x'即为其对应直线；根据点、线从属性，B点在Ax线上，则B'也必在A'x'线上，亲似对应的对应点连线互相平行，作BB'平行AA'，B'点即为唯一确定的所求点，所以已知条件是充分的。

§1－3亲似对应的基本性质

亲似对应与透视仿射对应性质相同，即同素性、从属性、等简比

性。根据透视仿射对应的基本性质可导出亲似性质。

(一) 直线的平行性不变

设平百W上二直线 $a // b$，则对应直线 $a' // b'$，（如图1-6）。

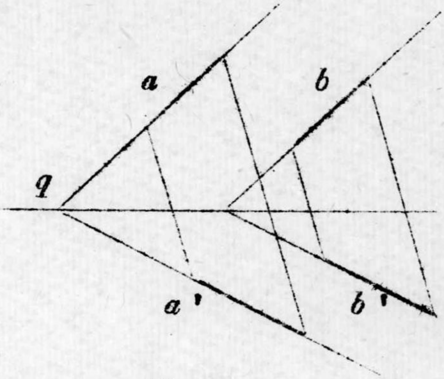

图1－6

证：采用反证法。

若 $a' \not\parallel b'$，则 a'、b' 必交于一点（图中来画出）。故交点在 a'，b' 二直线上，根据从属性，该交点的对应点必在对应直线 a，b 上，说明 a，b 必相交，此结论与已知条件 $a // b$ 矛盾，$\therefore a' // b'$。

(二) 平行线段之比不变

设平百W上有两平行线段 $AB // CD$，根据平行性它对应平百W'上的平行性 $A'B' // C'D'$，连直线BD，再过点C引直线 $CE // BD$，直线CE对应直线 $C'E'$，$C'E' // B'D'$ 由从属性E与E'相互对应。

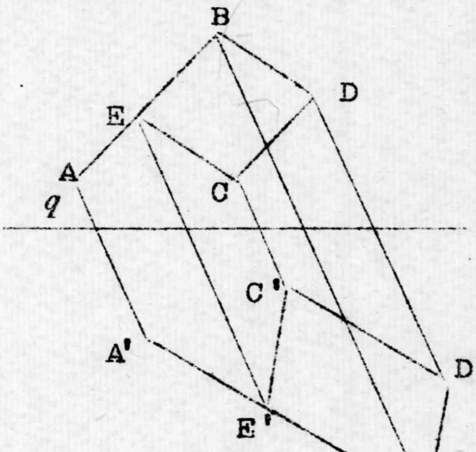

图1－7

根据直线上三个点的简单比不变可得出：$(AEB)=(A'E'B')$。

$$\frac{AB}{EB}=\frac{A'B'}{E'B'},\quad \frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$，即平行线段之比经亲似变换后不变。

(三) 对应点到对应轴的距离之比不变

如图1－8，A、A'；B、B'为对应点。B_0、B'_0、A_0、A'_0为相应点在 q 轴点的垂足。

从图中可看出：

$\triangle AA_0x \sim \triangle BB_0x$；$\triangle A'A_0'x \sim \triangle B'B_0'x$、

得：$\dfrac{AA_0}{BB_0}=\dfrac{Ax}{Bx}$，$\dfrac{A'A_0'}{B'B_0'}=\dfrac{A'x}{B'x}$

又根据 $AA' /\!/ BB'$ 得：

$$\frac{Ax}{Bx}=\frac{A'x}{B'x}$$

$\therefore \dfrac{AA_0}{BB_0}=\dfrac{Ax}{Bx}=\dfrac{A'x}{B'x}=\dfrac{A'A_0'}{B'B_0'}$

故 $\dfrac{AA_0}{BB_0}=\dfrac{A'A_0'}{B'B_0'}$

得 $\dfrac{AA_0}{A'A_0'}=\dfrac{BB_0}{BB_0'}=\lambda$（常数）

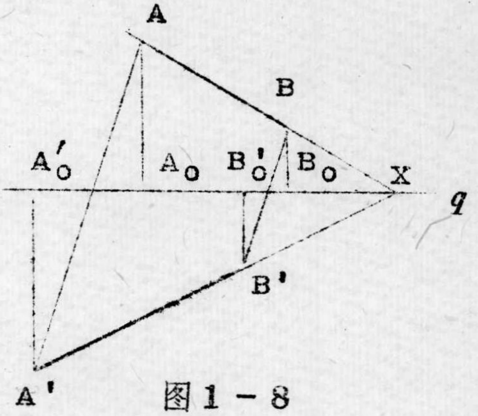

图1－8

λ——表示对应点到轴的距离比。

（四）任一对对应点连线被二重直线所截的两线段之比为一定值。

从图1－9中看出，A、A'为一对对应点，AA'被 q 轴截于O点

已知：$\dfrac{AA_0}{A'A_0'}=\lambda$，又 $\because \triangle OAA_0 \sim \triangle OA'A_0'$

$\therefore \dfrac{AO}{A'O}=\dfrac{AA_0}{A'A_0'}=\lambda$

故得证：$\dfrac{AO}{A'O}=\lambda$（常数）

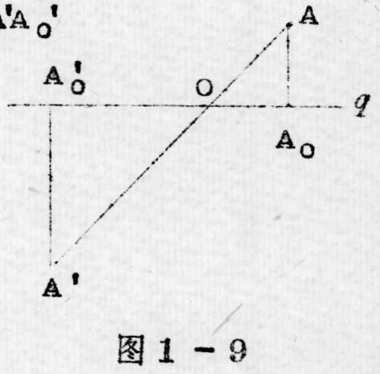

图1－9

λ——又称为仿射比。

（五）任意两个对应三角形百积之比一定，且等于λ。

定理的证明分为下百三种情况。

1、两三角形的公共边在q轴上（图1－10）

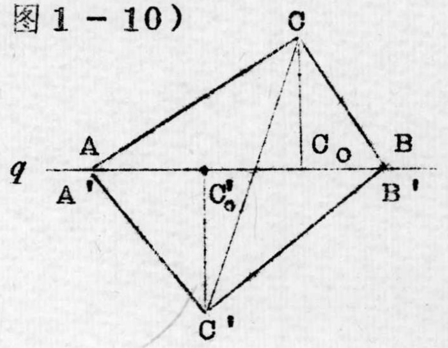

图1－10

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{CC_0}{C'C_0'}$$

又$\because AB\equiv A'B'$

$$\therefore\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{CC_0}{C'C_0'}=\lambda\text{（证毕）}$$

2、两三角形有一公共顶点在q轴上（图1－11）。

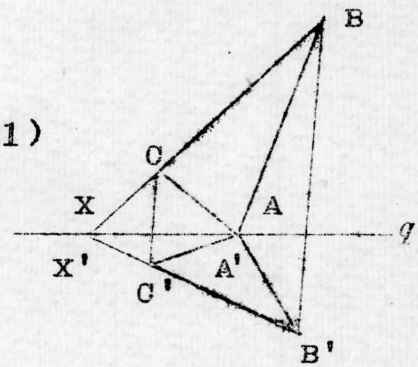

图1－11

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\Delta ABx-\Delta ACx}{\Delta A'B'x'-\Delta A'C'x'}\cdots(1)$$

但$\Delta ABx=\lambda\cdot\Delta A'B'x'$

$\Delta ACx=\lambda\cdot\Delta A'C'x'$

代入（1）得：

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\lambda(\Delta A'B'x'-\Delta A'C'x')}{\Delta A'B'x'-\Delta A'C'x'}=\lambda\text{（证毕）}$$

3、对应三角形为一般情况。

在图1－12中，ΔABC对应$\Delta A'B'C'$，求证：

两三角形百积之比为 $\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\lambda$

证：连yC，$y'C'$线，则$\Delta ABC=\Delta yBC-\Delta yAC$，

$\Delta A'B'C'=\Delta y'B'C'-\Delta y'A'C'$，

$$\left.\begin{aligned}&\text{已知：}\Delta yBC=\lambda\cdot\Delta y'B'C'\\&\Delta yAC=\lambda\cdot\Delta y'A'C'\end{aligned}\right\}\text{代入得}$$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\Delta yBC-\Delta yAC}{\Delta y'B'C'-\Delta y'A'C'}=\frac{\lambda(\Delta y'B'C'-\Delta y'A'C')}{\Delta y'B'C'-\Delta y'A'C'}$$

$=\lambda$ （证毕）

根据导出的两个对应三角形百积之比的性质可以推广到多边形百积之比。

设多边形百积为S，对应多边形百积为S'，则 $\frac{S}{S'}=\lambda$（常数）

最后，可把百积比的定理推广到任意形状的对应曲线围成的百积上。

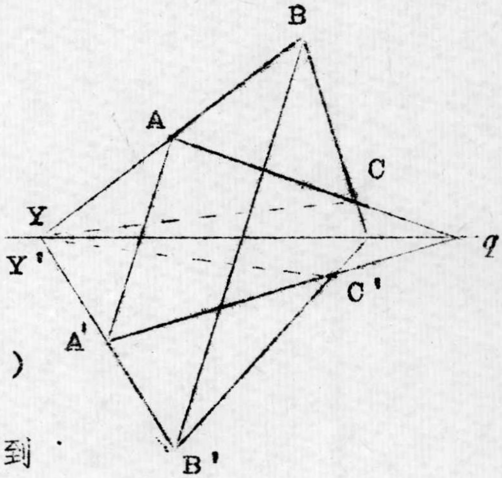

图1－12

用Δ和Δ'表示由两个对应曲线围成的百积，则 $\frac{\Delta}{\Delta'}=\lambda$。

根据此性质还可以推出：任意两个图形的百积比在亲似对应下不变。

如图1－13，所示，已知两对对应三角形。

求证：$\frac{\Delta ABC}{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta A_1'B_1'C_1'}$

证：$\because \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\lambda$，

$\frac{\Delta A_1B_1C_1}{\Delta A_1'B_1'C_1'}=\lambda$，

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta A_1'B_1'C_1'}$

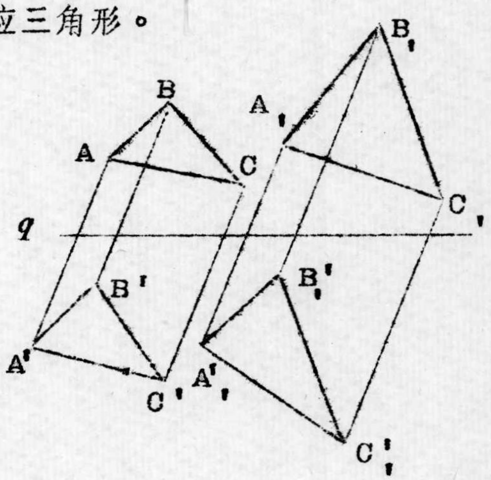

图1－13

〔例1〕已知亲似轴 q 和一对对应点A、A'及B'点。求B'的对应点B。