高級中學
甲組用

高中幾何學

陳建功 酈福綿 編

編 輯 大 意

1. 本書係依照二十一年十一月教育部所頒布之高級中學算學課程標準編輯,供高級中學幾何學教學之用.

2. 本書分平面幾何學及立體幾何學兩部.平面幾何學共二十四章,足供一學期每週三小時之教學;立體幾何學共十一章,足供一學期每週二小時之教學.

3. 高級中學學生,雖曾習平面幾何學,而於幾何學之基礎智識,往往未能鞏固,本書不嫌重複,仍從基本公理,定義,定理等發端,循序漸進,以求深入,使教學者兩得其便.

4. 本書卷首緒論,略述幾何學原理及定理之證法,使學者對於幾何學先得一明確之概念.

5. 本書術語西文原名不一一散附,卷末附列幾何學名詞中西對照表,以便檢查,且爲學生涉獵西文原書之準備.

6. 本書說理力求簡潔,證法前後保持一律,俾學者易得要領.

7. 本書每章之末,附有習題多則,俾學者得隨時練習.

8. 本書如有誤漏之處,尚望識者有以教正,俾得隨時改正.

編者識

目　錄

立體幾何學

緒論

1. 幾何學 幾何學者研究物体之形狀,大小,位置之科學也.有物於此,由觀察者着眼點之不同,得種種之結果,吾人可問此物之顏色若何,亦可問此物爲何種物質所構成,然幾何學所研究物之性質乃異乎是.上述諸問題不關幾何學之事,幾何學僅就物之形狀,大小,位置而研究之.譬如有二球於此,幾何學,不問此二球爲何種物質所構成,或輕重若何;但問此球是否同爲圓球形,大小若何,二球在若何之位置,物體所塡充之空間,爲幾何學重要之研究對象,故幾何學亦可謂爲研究空間性質之科學.

幾何學恆取若干事項爲基礎,以純正之推論逐漸進行而成一體系.

2. 空間 物體存在之處稱曰空間,空間無止境,無形亦無色,僅有地位而已.物體在無限空間中占有之地位,稱曰幾何學上之立體,例如有一物體,不問其爲木,爲石,就其所占領之空間而言,謂之立體,體之界爲面,面之界爲線,線之界爲點;點,線,面雖均有形無質,然當吾人研究之時,恆畫圖以表示之,吾人所畫之圖,僅爲便於吾人想像之記號,所畫之點,線,面,並非幾何學上之點,線,面也,例如幾何學上之點乃無大小長短而僅有位置者,縱令吾人所畫之點極

細,亦僅足供想像其位置之用,將此點用顯微鏡放大之,倘能測量其大小也.總之,幾何學研究之對象,並非物體自身,乃物體之外形,此種外形乃用點,線,面集合而成,名之曰幾何圖形,由是吾人又得幾何學之定義曰:幾何學者研究圖形之性質之科學也.

3. **命題** 就一事物而敍述之,其意完全者曰命題,例如'南京,中國之首都也'爲一命題,如僅言'中國之首都',其意不完全,則不能稱之爲命題.

幾何學上命題有六種,分述如下:

一.定義 凡命題敍述一事物之特有性質者,曰定義.定義僅判別此事物與別種事物不同之處,故其限界只及於確定此事物之性質而不及其他.

二.公理 吾人由經驗認爲眞確,而不易用更簡單之事項以論證之事項曰公理.

幾何學以公理作爲推論之基礎,但幾何學中究應選取何者作爲公理,此問題非初等幾何學所能回答.西曆紀元前三百年許,希臘學者歐幾里得(Euclid)首定若干事項爲公理,著幾何原本,普通所謂初等幾何學,亦可稱爲歐氏幾何學,現在初等幾何學中之公理與幾何原本中之公理相彷故也.

三.定理 由已知之事項,因推理而得其他之事項,敍述此新事項之命題曰定理.定理由二部分而成,即假設與

終結是也,前者爲假定之事項,後者爲由假定導出之事項.

四.系　由其一命題直接可推知之定理,特稱之曰此命題之系.

五.公法　不經推理之作圖基本方法,稱爲公法.公法與公理相仿,均屬無待證明者.

六.作圖題　由已知之關係或圖形以推求未知之關係或圖形者,曰問題.用幾何學上之方法,作一圖形,令其合於所設之條件,此類問題特稱之爲**作圖題**.

4　公理　公理分二種,一曰普通公理,其適用範圍不限於幾何學.

普通公理之重要者如下:

(*a*)等於同量或等量之二量相等.

即若　$a = b$,　$c = b$,　則$a = c$.

又若　$a = b$,　$c = d$,　而$b = d$,則$a = c$.

(*b*)等量加等量,其和相等.

即若　$a = b$,　$c = d$,　則$a + c = b + d$.

(*c*)等量減等量,其差相等.

即若　$a = b$,　$c = d$,　則$a - c = b - d$.

(*d*)不等量加等量不等,原大者其和亦大.

即若　$a > b$,　$c = d$,　則$a + c > b + d$.

(*e*)不等量減等量,其差不等,原大者其差亦大.

即若　$a > b$,　$c = d$,　則$a - c > b - d$.

(*f*)自等量減去不等量,則所減大者其差小,所減小者其差大.

即若　$a=b$,　$c>d$,　則$a-c<b-d$.

(*g*)等量乘等量,其積仍等.

即若　$a=b$,　$c=d$,　則$a\times c=b\times d$.

(*h*)等量除等量,其商仍等.

即若　$a=b$,　$c=d$,　則$a\div c=b\div d$.

(*i*)若三量之中,第一量大於第二量,第二量大於第三量,則第一量大於第三量.

即若　$a>b$,　$b>c$,　則$a>c$.

(*j*)全量等於其各部分之和.

即若b, c, d爲a之各部分,則$a=b+c+d$.

(*k*)全量大於其各部分.

即若　$a=b+c$,　則$a>b$, $a>c$.

凡上述各量均指正者,蓋初等幾何學中各量,多不計其正負也.

5.　定理之四種形式　定理之一般的形式如下:

'若A爲B,則C爲D'.　(i)*

此稱爲定理之範式.其中寫作A, B, C, D之處以言語

* 定理亦有簡單而僅成'A爲B'之形式者,但此式僅爲範式之省略,如'三角形三角之和(A)等於一平角(B)',雖僅具'A爲B'之形式,實則此乃下列一定理之省略,仍可寫作定理之範式也,'若三角爲三角形之三內角,則其和等於二直角'.

分別代入之可也,如三角形中之一定理:

$$\text{'}\underbrace{\text{若三角形之二邊}}_{A}\underbrace{\text{相等}}_{B}\text{,則}\underbrace{\text{其所對之角}}_{C}\underbrace{\text{亦等}}_{D}\text{'};$$

上定理'三角形之二邊'爲 A,'相等'爲 B;'其所對之角'爲 C,'亦等'爲 D. 其間二'爲'字,則因語法上的關係已省去矣.上範式中之'A 爲 B'爲假設,'C 爲 D'爲終結,意謂若 A 爲 B,則 C 必爲 D 也.

如上範式之定理爲眞確,則下列式樣之定理亦必眞確:

'若 C 不爲 D,則 A 不爲 B'; (ii)

何則?因 A 爲 B 之時,C 必爲 D,則 C 不爲 D 之時,A 不爲 B 也明甚.例如'凡砂糖,其味甘'乃如(i)形式之定理,如吾人認其爲眞確,則具(ii)形式之'其味不甘者決非砂糖'一定理易知其亦眞確也.又同理(ii)眞確,則(i)亦必眞確.

定理(i)與(ii)互稱曰**對偶定理**,已知其一爲眞確,則他一定理無須證明,即可斷定其爲眞確.

又將範式(i)之假設與終結顚倒之,得如下述之命題.

'若 C 爲 D,則 A 爲 B'; (iii)

命題(iii)所述者,若爲眞理,則成定理,此定理與定理(i)互稱曰**逆定理**.一定理之逆,未必眞確,如上例'凡砂糖,其味甘'之逆爲'其味甘者爲砂糖',但味甘者,固不限於砂糖,故定理之逆,須經過論證,始能斷定其是否成爲定理.

(iii)之對偶如下:

'若 A 不爲 B, 則 C 不爲 D'; (iv)

將(i)之肯定語,改爲否定語,卽得(iv). 如是(i)與(iv)互稱曰否定命題. 一定理之否定命題,未必眞確,例如'不爲砂糖,其味不甘'固未能遽斷其爲眞確也.

以上四種形式之相互關係,概括之如下:

(i)、(ii) 對偶	(i)、(iii) 逆	(i)、(iv) 否定
(iii)、(iv) 對偶	(ii)、(iv) 逆	(ii)、(iii) 否定

定理有具二個以上之假設者,則以其一假設與一終結交換,卽得一逆命題. 如有定理:

'若 A 爲 B, C 爲 D, 而 E 爲 F, 則 X 爲 Y',

則如下之諸命題,均爲其逆,眞確與否,固又當別論:——

'若 A 爲 B, C 爲 D, 而 X 爲 Y, 則 E 爲 F',

'若 A 爲 B, X 爲 Y, 而 E 爲 F, 則 C 爲 D',

'若 X 爲 Y, C 爲 D, 而 E 爲 F, 則 A 爲 B'.

此等逆命題之討論,在軌跡與作圖題中,最爲緊要.

6. 定理證明法　定理之終結,爲由所與之事件,而用公理或已知之定理所推求而得之事實,故定理之得到,必有此推求之步驟,此推求之步驟,名曰證明. 玆述證明之方法如下:

一.直接證明法　直接證明法者,證明定理之正面也.此法大別有三:(a)重合法,(b)綜合法,(c)解析法.普通之定理大都用此種方法證明,當於以後證明定理時隨時詳述之.

二.間接證明法　間接證明法者,不證明定理之正面而證明其對偶定理或詳論其逆命題之法也.此法通用者有三:

(*a*)歸謬法　歸謬法者,證明一定理之對偶定理之法也.先設終結之反面爲眞,逐漸推論,至得其結果與假設相背謬之時,則定理卽得證明矣.

(*b*)窮舉證法　一定理之假設,盡其可發生之種種變化,若其終結均各各不同,則此定理之逆,亦必眞確,關於此種定理在幾何學上最普通者如下例:

$$\left.\begin{array}{l}A\text{大於}B,\text{則}C\text{大於}D\\A\text{等於}B,\text{則}C\text{等於}D\\A\text{小於}B,\text{則}C\text{小於}D\end{array}\right\};$$

因A與B之關係,僅此三種,而其終結C與D之關係,因A, B之關係而各各不同,故其中之一如'A大於B,則C大於D'眞確之時,此定理之反定理,卽'A不大於B,則C不大於D'亦必眞確,因A不大於B時,卽爲等於B或小於B,但等於B及小於B之時,已知C決不大於D也.今'A不大於B,則C不大於D'既眞確,則其對偶'若C大於D,則A大於B'亦必眞確.

但此定理卽'A大於B,則C大於D'之逆定理也.

同理知下列二逆命題,亦均眞確:

'若C等於D,則A等於B',

'若C小於D,則A小於B'.

上述之命題稱曰**離接命題**.故凡一定理爲一離接命題時,則其逆命題可無待證明而知其爲眞確,故若一定理不易證明時,可將此定理之逆命題列舉而推論其結果,如是,則本定理卽可證明,此種證明方法,稱曰**窮舉證法**.

關於此種命題尙有如下之一例:

$$\left.\begin{array}{l}A\text{在}B\text{之外,則}C\text{大於}D\\ A\text{在}B\text{之上,則}C\text{等於}D\\ A\text{在}B\text{之內,則}C\text{小於}D\end{array}\right\},$$

上列命題如爲眞確,則以下各逆命題亦必眞確:

$$\left.\begin{array}{l}C\text{大於}D\text{,則}A\text{在}B\text{之外}\\ C\text{等於}D\text{,則}A\text{在}B\text{之上}\\ C\text{小於}D\text{,則}A\text{在}B\text{之內}\end{array}\right\}.$$

(c)同一法　若'A爲B'之A及B在此定理中,均僅有一個存在,則'B爲A'亦成定理,此法名曰**同一法**.如~~'孫中山先生爲中國國民黨之總理',因孫中山先生及國民黨總理均僅有一個,故'中國國民黨之總理爲孫中山先生'一語必眞確無疑也,又~~如下列定理:

'自二等邊三角形之頂點作底邊之垂線,得

頂角之平分線';

因二等邊三角形頂角之平分線僅有一個,而自頂點所作底邊之垂線亦僅有一個。故逆定理:

'二等邊三角形頂角之二等分線,即自頂點至底邊之垂線',

亦同時得推定其爲眞確也.

第 一 部

平 面 幾 何 學

第一章　幾何圖形

7.　**定義 1.**　僅有位置,而無大小,長短,厚薄者爲點.

8.　**定義 2.**　僅有位置,長短而無寬狹,厚薄者爲線.

9.　**定義 3.**　有位置,長闊而無厚薄者曰面.

10.　**定義 4.**　點,線面爲幾何學圖形上之三要素,有此三者之一,或數個集合而成之圖形,曰幾何圖形.

11.　**定義 5.**　物體占有空間之一部分爲立體,立體有位置,長短,廣狹,厚薄.

12　**定義 6.**　線之交爲點.

如右圖 X, Y 二線相交之處爲 A, B, C;則 A, B, C 均爲點.

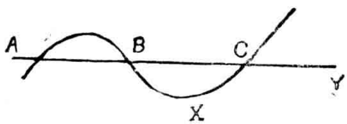

圖 1.

13.　**定義 7.**　線上任意二點間之一部分,以任意之方法置於他部分上,能與他部分密密相合者,謂之直線.

14.　**公理 1.**　過二點得作一直線,且以一直線爲限*.

由此公理得直接推知下列二事:

系 1.　二直線不能相交於二點,如有二點相合,則全相合.

---

*此公理爲聯合公理之一,因幾何圖形中之點,線,面,均爲獨立的存在物,須有公理爲之聯合也.