

國民中學

數學教師手冊

第四冊

國立編譯館主編



中華民國七十七年一月 正式本初版
中華民國八十年一月 改編本初版

國民中學 數學教師手冊 第四冊

定價：（由教育部核定後公告）

主編者 國立編譯館
編審者 國立編譯館國民中學數學科教科用書編審委員會

主任委員 陳昭地

委員 方炎明 方稚芳 呂溪木 李焯輝

李恭晴 李嘉淦 邱日盛 林秀珍

易新鼎 翁正明 翁俊雄 徐西楠

陳冒海 陳俊生 屠耀華 郭生玉

黃敏晃 黃登源 葉見登 蕭龍生

鄭再添 謝志雄 顏啟麟

編輯小組 李恭晴 林秀珍 陳昭地 陳冒海

屠耀華 黃敏晃 黃登源 鄭再添

顏啟麟

總訂正 陳昭地

插圖繪製 耿鴻達

出版者 國立編譯館

地址：106 臺北市大舟山路二四七號

印行者 九十二家書局（名稱詳見背面）

經銷者 臺灣書店

辦公地址：100 臺北市忠孝東路一段一七二號

電話：3922861 • 3922867

門市部：100 臺北市忠孝東路一段一七二號

電話：3928843

印刷者 內文：宏章印刷有限公司

封面：

編輯大意

- 一、本書是根據民國七十四年四月教育部修訂公布的國民中學數學課程標準，並配合七十八學年度起逐年改編之國民中學數學教科書編輯而成，供教師使用。
- 二、本書共分四冊，每學期一冊，供國民中學第一、二年級數學科教學參考之用。
- 三、本書各章包括教學目標與時數、教材摘要、教材地位分析、教學方法與注意事項、教學媒體舉例、教學活動舉例、評量應注意事項、充實教材、參考資料及習題簡答等項目，供教師教學參考之用。
- 四、各單元之教學除應注意本手冊中所列舉的認知目標外，尚應兼顧技能與情意之教學目標。
- 五、敬請全國國民中學教師就使用本書時所遭遇的實際問題，提出具體改進意見，隨時通知國立編譯館，以供修訂時之參考。

國民中學數學教師手冊 第四冊

目 次

第一章 因式分解	1
壹、教學目標與時數	1
貳、教材摘要	2
參、教材地位分析	3
肆、教學方法與注意事項	4
伍、教學媒體舉例	6
陸、教學活動舉例	11
柒、評量應注意事項	20
捌、充實教材	20
玖、參考資料	21
拾、習題簡答	23
第二章 一元二次方程式	26
壹、教學目標與時數	26
貳、教材摘要	27
參、教材地位分析	28
肆、教學方法與注意事項	29
伍、教學媒體舉例	32
陸、教學活動舉例	39
柒、評量應注意事項	45
捌、充實教材	46
玖、參考資料	46
拾、習題簡答	50

第三章 等差數列與等比數列	55
壹、教學目標與時數.....	55
貳、教材摘要.....	56
參、教材地位分析.....	57
肆、教學方法與注意事項.....	58
伍、教學媒體舉例.....	62
陸、教學活動舉例.....	65
柒、評量應注意事項.....	69
捌、充實教材.....	69
玖、參考資料.....	75
拾、習題簡答.....	77
第四章 資料的整理	82
壹、教學目標與時數.....	82
貳、教材摘要.....	83
參、教材地位分析.....	84
肆、教學方法與注意事項.....	84
伍、教學媒體舉例.....	87
陸、教學活動舉例.....	94
柒、評量應注意事項.....	98
捌、充實教材.....	99
玖、參考資料.....	102
拾、習題簡答.....	106

第一章 因式分解

壹、教學目標與時數

1-1 式子的代換（教學時數：3 節）

1. 能用數值取代一個恆等式中的文字，而得到此恆等式的數值特例。
2. 能用式子取代一個恆等式中的文字，而得到另一個恆等式。
3. 能由分配律把橫式的計算寫成直式計算，並由此得到一些基本的恆等式。
4. 能應用代換得到其他簡單的恆等式。

1-2 提出公因式（教學時數：3 節）

1. 能理解因式、倍式、公因式與因式分解的意義。
2. 能用多項式的除法驗證一個一次式是否為另一多項式的因式。
3. 能從一個多項式的各項中提出公因式，作因式分解。
4. 能用分組提出公因式的方法，把一個多項式作因式分解。

1-3 利用乘法公式作因式分解（教學時數：4～5 節）

1. 能熟記平方差、立方和、立方差以及兩個完全平方等五個基本的因式分解公式。
2. 能應用基本的因式分解公式作因式分解。

1-4 二次三項式的因式分解（教學時數：4～5 節）

1. 能知道二次三項式的實例。
2. 能用十字交乘法作首項係數為 1 的二次三項式的因式分解。
3. 能用十字交乘法作一般二次三項式的因式分解。

貳、教材摘要

本章教材的主要內容為簡易的因式分解，特別是一個文字的二次三項式之十字交乘法，以作為下章一元二次方程式的一種解法。

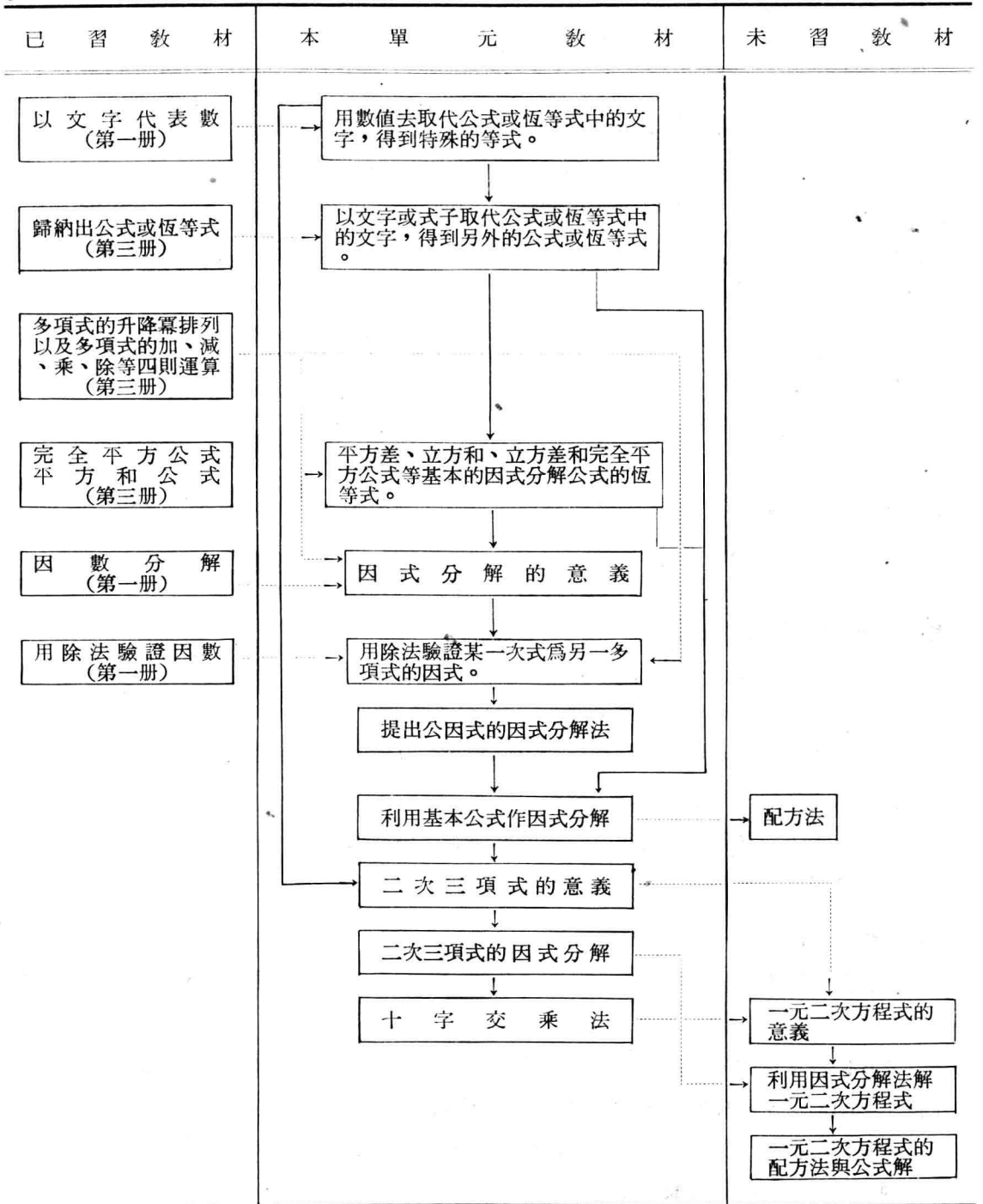
在第一節中，先回憶學過的乘法公式及一些恆等式，說明經由代換產生另一特殊形式的恆等式，作為學習本章教材的準備。一個附加的重點是，這些重要的乘法公式及恆等式都可以由分配律，利用代換的方式得到。

在第二節中，以實例介紹因式、倍式及因式分解的意義，用除法驗證某一次式為另一多項式的因式，進而介紹提出公因式的因式分解法，其中包含應用簡易的分組提出公因式的方式。

在第三節中，介紹利用乘法公式作因式分解的方法，分別用例題的方式，提出如何用平方差公式、立方和（差）公式及完全平方公式作因式分解。

在最後一節中，以面積的實例引出二次三項式，並以各類的二次三項式的例子，說明如何利用十字交乘法從事因式分解。

叁、教材地位分析



肆、教學方法與注意事項

1-1 式子的代換

1. 我們首先提出在第三冊中已經講過的三個乘法公式：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

並指明這三個式子是由面積的計算得到的，若用任意數值取代式子中的文字 a 與 b ，等式還是成立，像這樣的等式叫做恆等式。同時也提出以前學過的另外一些恆等式的例子，如加法、乘法的交換律、結合律以及分配律等。

2. 教師應說明恆等式的一些用處，如利用平方差公式得到整數相乘的簡便計算以及利用分配律來說明二位數相乘的直式乘法等。

3. 我們利用分配律得到

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

應用此式或這種乘法又可得到許多其他的恆等式，如令上式中之 $a = 4x$ ， $b = -1$ ， $c = -3x$ ， $d = 7$ ，則可得到

$$(4x - 1)(-3x + 7) = -12x^2 + 31x - 7$$

更進一步，也可由此得出以後會用到的立方和和立方差的乘法公式：

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

4. 本節的主要目的在說明若用數值或其他式子取代恆等式中的文字，仍然會得到等式，重要教材則為得到一些基本的因式分解公式。

5. 習題 1-1 中之第 1 大題第(9)小題的解題過程稍具技巧性，對中低程度的班級指定此題時宜給予適當的提示。

1-2 提出公因式

1. 我們仿照因數分解的方式來談因式分解，介紹因式和倍式的名詞，提到用除法檢驗因式的方法。

2. 我們在本章中只介紹提出公因式與利用乘法公式兩種因式分解的方法，而所舉的又是比較簡單的例子。比較難的公式或例子，應該屬於高中教材的範圍。

3. 我們可把提出公因式的方法分為兩類：一類是由各項中提出公因式，另一類是分組提出公因式。我們都採取用實例來說明方法的處理方式。

4. 本章總習題第 2 大題的第(4)小題涉及分組提出公因式的技巧，由於文字個數略多，因此難度較高，對中低程度的班級可等到教完整章後再依實際情形考慮是否點做。

1-3 利用乘法公式作因式分解

1. 我們在本節所用到的基本公式共有五個，都是把第 1-1 節與第 1-2 節中的乘法公式倒過來寫得到的：

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \cdots \cdots \cdots \text{平方差公式} \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \cdots \cdots \cdots \text{立方和公式} \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \cdots \cdots \cdots \text{立方差公式} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} a^2 - b^2 \\ a^3 + b^3 \\ a^3 - b^3 \\ a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}} \right\} \cdots \cdots \cdots \text{完全平方公式}$$

至於十字交乘公式則在第 1-4 節單獨應用到一個文字的二次三項式的因式分解。

2. 本節要點主要在於利用上述的五個基本公式，採用第 1-1 節中講過的式子代換的精神，把要作因式分解的式子化成基本型，再套公式作因式分解。所以，本節的教學要點是如何熟練把式子化成基本型的技巧。

3. 本節中也含有須要用到兩次基本公式的例子，我們覺得這類材料不宜放得太多，怕一般的學生不易消化。教師對於班上程度較好的學生則可加重這方面的材料，但也得在熟練了基本教材之後才行。

4. 習題 1-3 之第 13 題略具技巧，對中低程度的學生而言較為困難，點做時宜給予適當的輔導。

5. 總習題第 2 大題第 (5) 小題涉及分組提出公因式與利用乘法公式作因式分解雙重的概念，難度較高，教師點做時應特別留意。

1-4 二次三項式的因式分解

1. 我們在本節中首先介紹二次三項式的實質意義，作為下章第一節引進一元二次方程式的伏筆。

2. 本節中的教材分為兩個層次：第一層次是處理 x^2 的係數為 1 的情形，此時只要分解常數項，再看其和是否為 x 項的係數；第二層次是處理 x^2 的係數不為 1 的情形，此時要同時分解 x^2 項的係數與常數項，再看其交叉相乘的和是否為 x 項的係數，手續較為麻煩。

3. 看過六個例子及仿練幾個隨堂練習後，再引出十字交乘法的名詞。

4. 本節例子的說明，在開始的時候，採取把各種可能的分解情形都寫出來，從其中挑出正確的組合；然後再設法使學生能依其熟練程度及能力，減少一些不必要的組合。

5. 習題 1-4 中第 12、14 兩題稍難，教師點做這兩題時應特別注意。

伍、教學媒體舉例

一、本章需用教具表

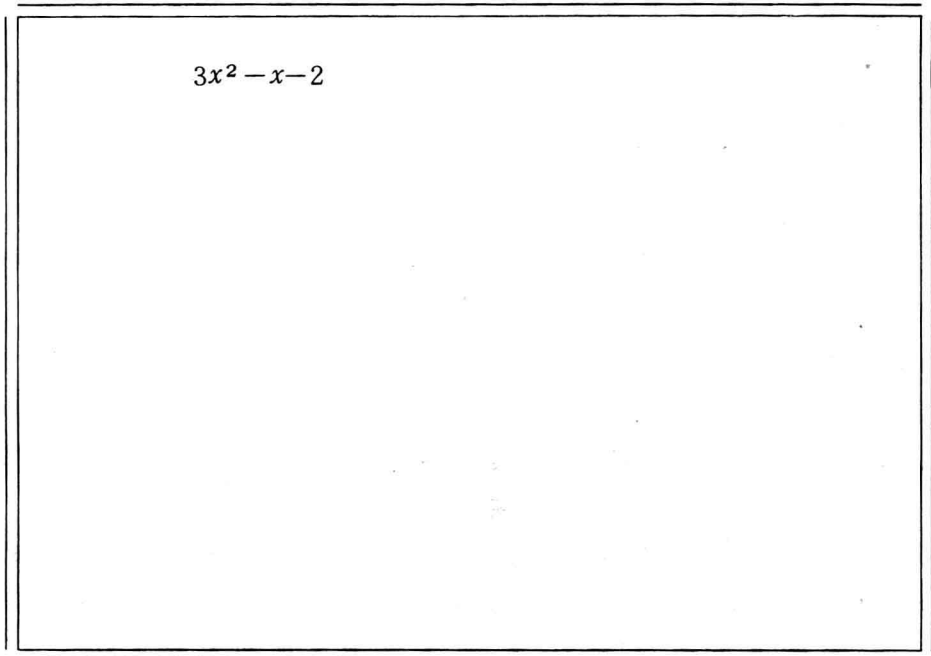
教 具	規 格	數 量	配合教材	備 注
乘法公式與因式分解 公式對照表		1	1-3	掛圖或投影片

二、本章適用之教學媒體舉例

(一)十字交乘法

1. 類別：投影片。
2. 規格：多層式。
3. 配合教材：1-4 二次三項式的因式分解。
4. 來源：自製
5. 內容簡介：以 $3x^2 - x - 2$ 的因式分解為例，說明用交叉相乘來檢驗因式的各種情形(例4)。
6. 製圖說明：

(1) 母片 0



(2) 疊片 1

$$3 = 3 \times 1 = (-3) \times (-1)$$
$$-2 = (-2) \times 1 = 2 \times (-1)$$

(3) 疊片 2

$$\begin{array}{r} 3 \quad -2 \quad -1 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \\ \\ -3 \\ -1 \end{array}$$

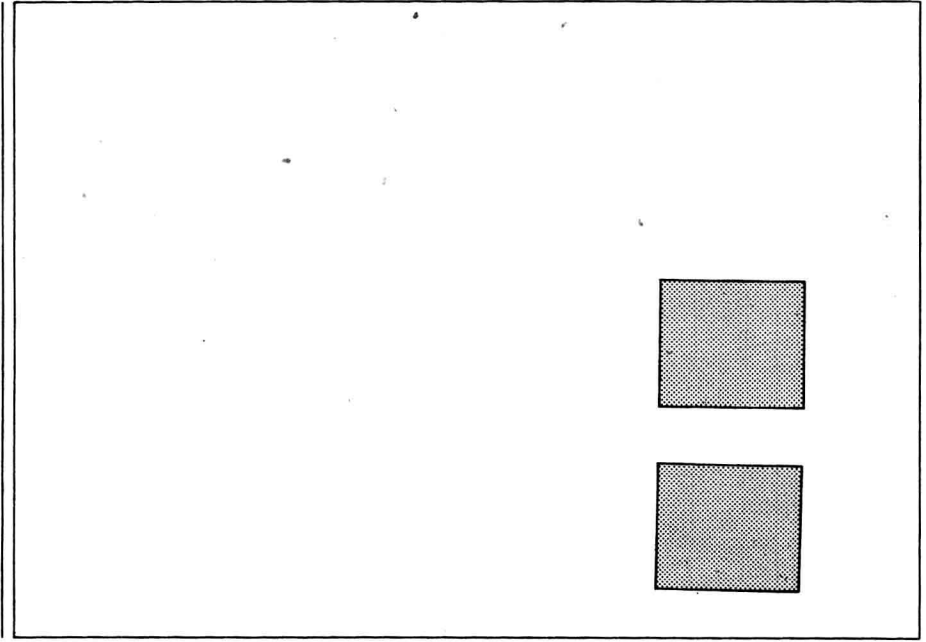
(4) 疊片 3

	3	1	3		3	2
	1	-2	1		1	-1
2	-3	-1	-3	1	-3	-2
-1	-1	2	-1	-2	-1	1

(5) 疊片 4

$\frac{\times}{-2+3=1}$	$\frac{\times}{1-6=-5}$	$\frac{\times}{-1+6=5}$	$\frac{\times}{2-3=-1}$
$\frac{\times}{-2+3=1}$	$\frac{\times}{1-6=-5}$	$\frac{\times}{-1+6=5}$	$\frac{\times}{2-3=-1}$

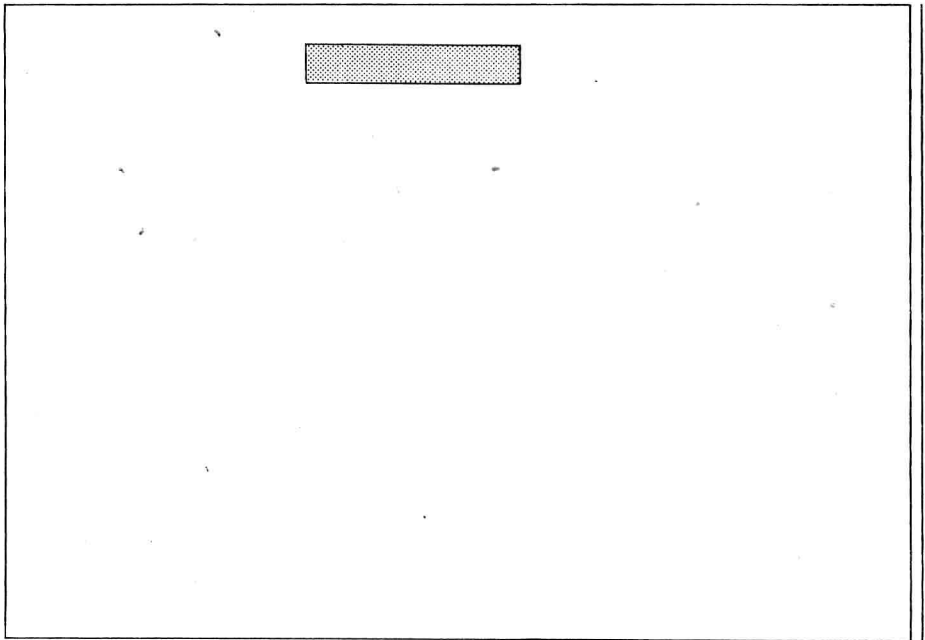
(6) 叠片 5



(7) 叠片 6

$$\begin{aligned} &= (3x+2)(x-1) \\ &= (-3x-2)(-x+1) \end{aligned}$$

(8) 疊片 7



7. 製作說明：

- (1) 黏貼方法從略。
- (2) 疊片 2 及 3 中 3 的因數分解與 -2 的因數分解兩組最好採取不同的顏色，而疊片 4 再用另一種顏色。
- (3) 疊片 5 與疊片 7 中塊狀區域所用的顏色要淺些。

8. 使用說明：

- (1) 母片 0，疊上疊片 1，說明 3 及 -2 的因數分解各有二種可能的情形。
- (2) 疊上疊片 2，再將疊片 1 抽掉。
- (3) 疊上疊片 3，說明配合起來一共有八種情形。
- (4) 疊上疊片 4，顯示八種情形所出現的結果。
- (5) 疊上疊片 5，說明有兩種情形合於題意。
- (6) 疊上疊片 6，得到 $3x^2 - x - 2$ 因式分解的兩種情形。如果疊片太多，透光度不佳，可將疊片 2 ~ 5 抽掉。
- (7) 疊上疊片 7，說明只要寫出這兩種情形中的一種即可。

陸、教學活動舉例

1-4 二次三項式的因式分解

教學時數：4~5節

教師活動	教學活動流程圖	學生活動	備註												
<p>一、準備活動：</p> <p>1. 研讀課本第四冊第 1-4 節及教師手冊相關部分。</p> <p>2. 蒐集本單元有關的資料。</p> <p>3. 準備教具：投影片。內容如下：</p> <p>投影片一</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $8=1 \times 8=2 \times 4$ $=(-1) \times (-8)=(-2) \times (-4)$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times 8 \\ \hline 1+8=9 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ 1 \times 4 \\ \hline 2+4=6 \end{array}$ </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times -8 \\ \hline (-1)+(-8)=-9 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times -2 \\ 1 \times -4 \\ \hline (-2)+(-4)=-6 \end{array}$ </td> </tr> </table> </div> <p>投影片二</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $15=1 \times 15=3 \times 5$ $=(-1) \times (-15)=(-3) \times (-5)$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times 15 \\ \hline 1+15=16 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times 3 \\ 1 \times 5 \\ \hline 3+5=8 \end{array}$ </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times -15 \\ \hline (-1)+(-15)=-16 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times -3 \\ 1 \times -5 \\ \hline (-3)+(-5)=-8 \end{array}$ </td> </tr> </table> </div> <p>投影片三</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $10=(-2) \times 5=2 \times (-5)$ $=(-1) \times 10=1 \times (-10)$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times -2 \\ 1 \times 5 \\ \hline (-2)+5=3 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ 1 \times -5 \\ \hline 2+(-5)=-3 \end{array}$ </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times 10 \\ \hline (-1)+10=9 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times -10 \\ \hline 1+(-10)=-9 \end{array}$ </td> </tr> </table> </div> <p>投影片四</p>	$\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times 8 \\ \hline 1+8=9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ 1 \times 4 \\ \hline 2+4=6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times -8 \\ \hline (-1)+(-8)=-9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -2 \\ 1 \times -4 \\ \hline (-2)+(-4)=-6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times 15 \\ \hline 1+15=16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 3 \\ 1 \times 5 \\ \hline 3+5=8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times -15 \\ \hline (-1)+(-15)=-16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -3 \\ 1 \times -5 \\ \hline (-3)+(-5)=-8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -2 \\ 1 \times 5 \\ \hline (-2)+5=3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ 1 \times -5 \\ \hline 2+(-5)=-3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times 10 \\ \hline (-1)+10=9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times -10 \\ \hline 1+(-10)=-9 \end{array}$	<p>▽</p> <p>↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">教學前的準備</div> <p>↓</p>	<p>1. 研讀課本第四冊第 1-4 節。</p> <p>2. 復習課本第三冊第 3-3 節及第 3-4 節和第一冊第 3-2 及 3-3 兩節。</p> <p>3. 準備用具：計算紙、平時測驗紙。</p>	
$\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times 8 \\ \hline 1+8=9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ 1 \times 4 \\ \hline 2+4=6 \end{array}$														
$\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times -8 \\ \hline (-1)+(-8)=-9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -2 \\ 1 \times -4 \\ \hline (-2)+(-4)=-6 \end{array}$														
$\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times 15 \\ \hline 1+15=16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 3 \\ 1 \times 5 \\ \hline 3+5=8 \end{array}$														
$\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times -15 \\ \hline (-1)+(-15)=-16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times -3 \\ 1 \times -5 \\ \hline (-3)+(-5)=-8 \end{array}$														
$\begin{array}{r} 1 \times -2 \\ 1 \times 5 \\ \hline (-2)+5=3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ 1 \times -5 \\ \hline 2+(-5)=-3 \end{array}$														
$\begin{array}{r} 1 \times -1 \\ 1 \times 10 \\ \hline (-1)+10=9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 1 \\ 1 \times -10 \\ \hline 1+(-10)=-9 \end{array}$														

$3=3 \times 1$ $=(-3) \times (-1)$ $\begin{array}{r} 3 \times -2 \\ 1 \times 1 \\ \hline -2+3=1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -1 \\ 1 \times 2 \\ \hline -1+6=5 \end{array}$ $\begin{array}{r} -3 \times 2 \\ -1 \times -1 \\ \hline -2+3=1 \end{array}$ $\begin{array}{r} -3 \times 1 \\ -1 \times -2 \\ \hline -1+6=5 \end{array}$	$-2=(-2) \times 1$ $=2 \times (-1)$ $\begin{array}{r} 3 \times 1 \\ 1 \times -2 \\ \hline 1-6=-5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times 2 \\ 1 \times -1 \\ \hline 2-3=-1 \end{array}$ $\begin{array}{r} -3 \times -1 \\ -1 \times 2 \\ \hline 1-6=-5 \end{array}$ $\begin{array}{r} -3 \times -2 \\ -1 \times 1 \\ \hline 2-3=-1 \end{array}$
--	---

投影片五

$6=1 \times 6$ $=2 \times 3$ $\begin{array}{r} 6 \times 5 \\ 1 \times 3 \\ \hline 5+18=23 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times 15 \\ 3 \times 1 \\ \hline 45+2=47 \end{array}$	$15=1 \times 15$ $=3 \times 5$ $\begin{array}{r} 6 \times 1 \\ 1 \times 15 \\ \hline 1+90=91 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times 3 \\ 3 \times 5 \\ \hline 9+10=19 \end{array}$
---	---

投影片六

$12=12 \times 1=2 \times 6=4 \times 3$	
$3=(-1) \times (-3)$	
$\begin{array}{r} 12 \times -1 \\ 1 \times -3 \\ \hline -1-36=-37 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 \\ 6 \times -3 \\ \hline -6-6=-12 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \times -1 \\ 3 \times -3 \\ \hline -3-12=-15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \times -3 \\ 1 \times -1 \\ \hline -3-12=-15 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -3 \\ 6 \times -1 \\ \hline -18-2=-20 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \times -3 \\ 3 \times -1 \\ \hline -9-4=-13 \end{array}$

4. 準備本單元各層次的練習題。

5. 可將學生分組，方便討論。

二、發展活動：

1. 復習二次三項式：

- (1) 以一個長為 $(3x-5)$ 公分，寬為 $(x+2)$ 公分的矩形為例，求它的面積。

復 習

提供問題