根据教育部最新颁布的《复习考试大纲》编写

专升本入学考试复习教材

高等数学(一)

含解题指导

GAO DENG SHU XUE YI

HAN JIE TI ZHI DAO

全国各类成人高校(专升本)入学考试复习教材编委会　组编

金　岷　主编

中国人事出版社

根据教育部最新颁布的《复习考试大纲》编写

全国各类成人高校(专升本)入学考试复习教材

(专科起点升本科)

高等数学(一)

【含解题指导】

全国各类成人高校(专升本)入学考试复习教材编

主编 金 岷

编者 常克敏

伍春兰

邓文虹

王建明

金 岷

中国人事出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.1/金岷主编.—北京:中国人事出版社,2000.9
全国各类成人高校(专升本)入学考试复习教材
ISBN7—80139—554—9

Ⅰ.高… Ⅱ.金… Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 69599 号

全国各类成人高校(专升本)入学考试复习教材
——高等数学(一)
金岷 主编
*
中国人事出版社出版
100101 北京朝阳区育慧里 5 号
新华书店经销
北京新丰印刷厂印刷
2000 年 9 月第 2 版 2000 年 9 月第 3 次印刷
开本:787×1092 毫米 1/16 印张:25
字数:500 千字 印数:11001—21000 册
定价:31.00 元

第二版前言

2000年6月,教育部组织专家根据2001年各类成人高等学校招生考试科目设置方案,重新制订并颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》(以下简称新《大纲》)。

比照旧《大纲》,新《大纲更注重对考生基础知识的把握及分析、解决问题的实际能力的要求,同时充分考虑了成人高等教育的特点。其作用是:指导考生系统复习文化知识、满足各类成人高等学校选拔新生的最基本要求、为统一考试命题提供依据。

本丛书正是在这种背景下进行修订或重新编写的。

本丛书自1998年出版以来,深得读者好评,1999年重印之际又重新进行了研读和审校,进一步提高质量。由于其独具的特点和风格,深得全国各地广大师生的好评和认可,各地教委、学校和辅导班纷纷将本书作为指定教材或首推教材,成为最畅销的专升本考试复习教材之一。

2000年8月,编委会组织原班作者严格按照新《大纲》的要求重新修订了本套丛书,以满足广大师生的需要。

修订后的本书具有如下特点:

1. 本书的编写紧扣高等数学(一)复习考试大纲。因此,它可以作为一本复习考试可信赖的教科书。

2. 在本书的每一章节中,作者既有对知识要点的系统性讲解,又有典型题的解题分析及解题指导,还设计编写了练习并附有提示和答案。这样,学习者在学习之后可立即通过做练习来检验自己掌握所学知识的情况。这本书的可操作性强。

3. 书后附有两套综合测试题及答案。

4. 在这本书里,还附有高等数学(一)复习考试大纲。

本书既可以作为专升本考试——高等数学(一)的教材,由教师对考生进行辅导,也可以作为考生自学的教材。

本书由金岷同志主编。本书的大部分作者参加了多年的专升本考前辅导工作,具有丰富的教学经验。

本书的修订工作仍由金岷同志主持。

为了把本书编得更好,敬请数学学科的专家和广大师生批评指正,待再版时进一步修订完善。

编　者

2000年8月

目　　录

第一章 函数、极限、连续

§1 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 设在所考察的某一过程中，有两个变量 x 和 y。如果当变量 x 在某变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，就叫 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量。

定义 使函数有定义的自变量 x 的变化范围叫函数的定义域。

关于函数的定义域，分两种情况：在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义确定。例如，圆的面积 s 与它的半径 r 之间的函数关系是 $s = \pi r^2$，函数的定义域为 $(0, +\infty)$，因为半径 r 可以取任何正数。在不考虑函数的实际意义时，约定函数的定义域是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的数集。例如，函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$，函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$。

对应规律和定义域是函数定义中的两个要素，对应规律是用记号 $f(\ )$ 表示的。记号 $f(\ )$ 具有广泛的涵义，它不只可以表示某一个数学表达式，也可以表示几个数学表达式，甚至可以表示一个图形或一张表格，总之，只要是对应规律，都可以用它来表示。

两个函数只有当它们的对应规律和定义域都相同时，才是两个相同的函数。

定义 当自变量 x 在定义域上取值时，相应的函数值全体称为函数 $y = f(x)$ 的值域。

自变量取定义域内的某一值时，函数的对应值叫做函数当自变量取该值时的函数值，如果函数由 $y = f(x)$ 表示，则当 x 取定义域内某一定值 x_0 时，对应的函数值用记号 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 表示。对于自变量 x 的每一个值，函数都只有一个确定值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。函数 $f(x) = c$（c 为某一常数）表示当 x 在定义域内取任何值时，函数值都是常数 c，这种函数叫做常量函数。例如，圆面积公式 $s = \pi r^2$ 是单值函数。又如，在直角坐标系中，半径为 r，圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$，当 x 在 $[-r, r]$ 上取定一个数值时，由上式可以确定 y 的一个值（当 $x = \pm r$ 时），或确定 y 的两个值（当 $-r < x < r$ 时），所以 y 是 x 的多值函数。

2. 函数的表示法

函数常用的表示方法有三种。

(1) 公式法 用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫做公式法，例如，$s = \dfrac{1}{2}gt^2$。公式法的优点是简明准确，便于理论分析。缺点是不够直观，有些实际问题很难甚至不能用公式法表示。

(2) 表格法　将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，用此表示函数的方法叫做表格法。例如，平方表、对数表、三角函数表等。表格法的优点是可以直观查到对应的函数值。缺点是表中所列数据往往不完全，同时不便于进行理论分析。表格法适用于实验数据的积累和数学用表。

(3) 图示法　函数也可由坐标平面上的曲线来表示，当自变量值等于曲线上点的横坐标时，对应的函数值等于该点的纵坐标，这样表示函数的方法叫做图示法。图示法的优点是鲜明直观，但不便于作理论分析。函数的图示法在物理及工程上是常用的。

3. 分段函数

定义　在定义域内的不同点集内由不同的数学表达式表示的函数称为分段函数。例如

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leqslant x <\leqslant 1; \\ 1 + x, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

是确定在区间$[0, \infty)$上的一个函数，当 x 取闭区间$[0,1]$上的数值时，对应的函数值 y 由公式 $y = 2\sqrt{x}$ 确定，当 x 取区间$(1, +\infty)$内的数值时，y 由公式 $y = 1 + x$ 确定。

又如
$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

是确定在区间$(-\infty, +\infty)$上的一个函数。

在物理、化学、热力学以及其他应用科学上，经常会遇到分段函数。例如在恒温下，气体压力 P 与体积 V 的函数关系，当 V 不太小时，适用波义耳—马利奥脱定律；当 V 相当小时，就要用房特瓦定律来表示，即

$$P = \begin{cases} \dfrac{k}{V}, & \text{当 } V \geqslant V_0; \\ \dfrac{\nu}{V - \beta} - \dfrac{\alpha}{V^2}, & V < V_0 \end{cases} \quad (k, \alpha, \beta, \nu \text{ 都是常量})。$$

对于分段函数，不论它分多少段，它总是表示一个函数，而不是几个函数。求分段函数的函数值时，必须用自变量所在的点集相应的数学表达式进行计算。

二、函数的简单性质

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，如果存在正数 M，使得对于一切 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内是有界的；如果这样的 M 不存在，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内是无界的。

在定义域内有界的函数称为有界函数。有界函数 $y = f(x)$ 在平面直角坐标系中的图形界于两条水平直线之间。

例如　$y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内都是有界函数，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x| \leqslant 1$ 和 $|\cos x| \leqslant 1$ 都成立，这里 $M = 1$。

又如　$y = \dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于$(0,1)$内的一切 x 值都成立；但 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间$(1,2)$内是有界的，可取 $M = 1$ 而使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对于区间$(1, 2)$内的一切 x 值都成立。

说明　函数的有界性是对某个特定区间来说的。

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subseteq D$,任给 $x_1, x_2 \in I$,且 $x_1 < x_2$,如果恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 内是单调增加的;如果恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 内是单调减少的。单调增加与单调减少统称为单调。

在定义域内单调增加(或单调减少)的函数称为单调增加(或单调减少)函数。单调增加(或单调减少)函数 $y = f(x)$ 在平面直角坐标系中的图形自左至右是上升(或下降)的曲线。

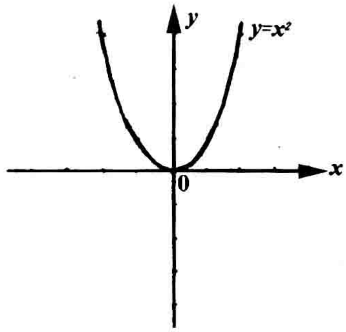

图 1-1

例如　$f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的,在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x) = x^2$ 不是单调函数。(图 1-1)

又如　$f(x) = x^3$ 是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加函数。(图 1-2)

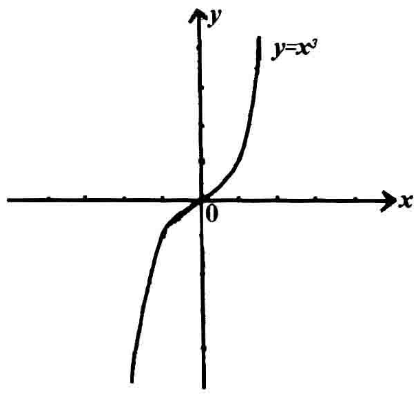

图 1-2

3. 奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = f(x)$,则 $f(x)$ 叫做偶函数。如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = -f(x)$,则 $f(x)$ 叫做奇函数。偶函数的图形是关于 y 轴对称的,奇函数的图形是关于原点对称的。

函数 $y = x^2$,$y = \cos x$ 是偶函数。函数 $y = x^3$,$y = \sin x$ 是奇函数。函数 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数,也非偶函数。

4. 周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个数 $l(l \neq 0)$,使得 $f(x + l) = f(x)$ 对于定义域内的任何 x 值都成立,则 $f(x)$ 叫做周期函数。l 是 $f(x)$ 的周期。通常,我们所说周期函数的周期是指最小正周期。

例如　函数 $\sin x$,$\cos x$ 的周期是 2π。函数 $\tan x$,$\cot x$ 的周期是 π。

周期函数在每一个周期内的图形是相同的。

三、反函数

1. 反函数的定义

设给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$。如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数,而 $f(x)$ 叫做直接函数。

说明　(1) 按习惯,多以 x 为自变量,y 为因变量,$y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$,可写为 $y = \varphi(x)$。

(2) 若直接函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 F,则反函数 $y = \varphi(x)$ 的定义域为 F,值域为 D。

2. 反函数的图形

反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y = f(x)$ 的图形对称于直线 $y = x$。例如

求直接函数 $y = 2x - 1$ 的反函数,并在同一直角坐标系中作出它们的图形。

由直接函数 $y = 2x - 1$ 解出 x,得到反函数为

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2},$$

或改写成 $$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}。$$

直接函数 $y = 2x - 1$ 的图形是通过点$(\frac{1}{2},0)$与点$(0, -1)$的直线,而其反函数 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 的图形是通过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$与点$(-1,0)$的直线。从图 1-3 可以看出,直接函数 $y = 2x - 1$ 的图形与反函数 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的。

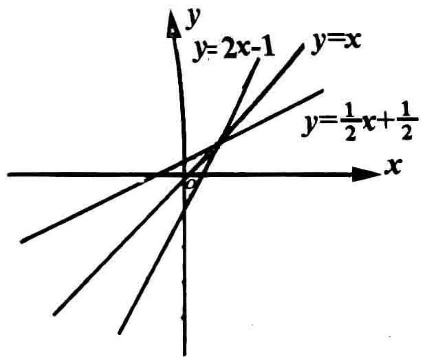

图 1-3

四、基本初等函数及其图形

1. 幂函数

函数 $y = x^{\mu}$(μ 为任意实数)叫做幂函数。它的定义域需根据 μ 的值而定。但不论 μ 取什么实数值,当 $x > 0$ 时,它总是有定义的。

例如,当 $\mu = 3$ 时,$y = x^3$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$;当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时,$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的定义域是$[0, +\infty)$;当 $\mu = -\frac{1}{2}$ 时,$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是$(0, +\infty)$。

幂函数 $y = x^{\mu}$ 的性质与图形,也要根据 μ 的值而定。当 $\mu > 0$ 时,函数在$(0, +\infty)$内是单调增加的,当 $\mu < 0$ 时,函数在$(0, +\infty)$内是单调减少的。

$y = x^{\mu}$ 中,$\mu = 1、2、3、\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、-1$ 时是最常见的幂函数。它们的图形如图 1-4,图 1-5,图 1-6 所示。

2. 指数函数

函数 $y = a^x$(a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$)叫做指数函数。它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,函数的值域为$(0, +\infty)$。

当 $a > 1$ 时,函数是单调增加的;当 $0 < a < 1$ 时,函数是单调减少的,指数函数的图形,总在 x 轴上方,且通过点$(0,1)$。由于 $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$,所以 $y = a^x$ 的图形与 $y = a^{-x}$ 的图形是关于 y 轴对称的(图 1-7)。

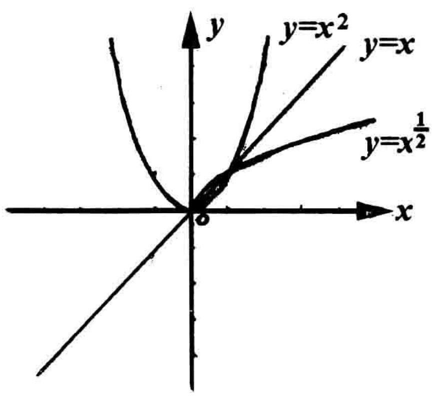

图 1-4

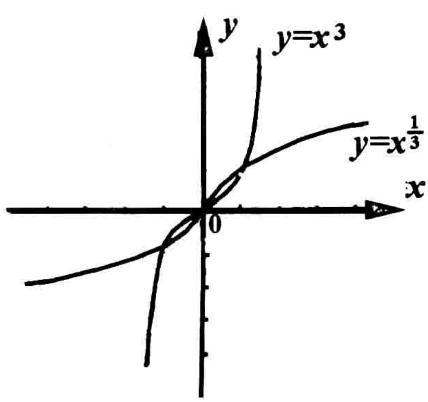

图 1-5

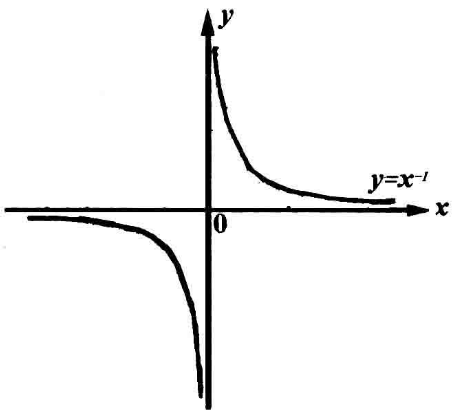

图 1-6

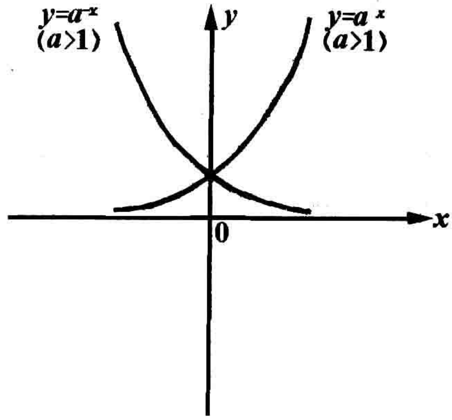

图 1-7

以常数 e = 2.7182818…… 为底的指数函数 $y = e^x$ 是科技中常用的指数函数。

3. 对数函数

指数函数 $y = a^x$ 的反函数，记作

$$y = \log_a x（a 是常数且 a > 0, a \neq 1），$$

叫做对数函数。它的定义域是区间$(0, +\infty)$，所以函数的图形位于 y 轴右方。函数值域是区间$(-\infty, +\infty)$。

对数函数的图形，可以从它对应的指数函数 $y = a^x$ 的图形按反函数作图法的一般规则作出，这就是：关于直线 $y = x$ 作 $y = a^x$ 图形的对称曲线，就得到 $y = \log_a x$ 的图形（图 1-8）。

当 $a > 1$ 时，函数是单调增加的，在区间$(0,1)$内函数值为负，在区间$(1, +\infty)$内函数值为正。

当 $0 < a < 1$ 时，函数是单调减少的，在区间$(0,1)$内函数值为正，在区间$(1, +\infty)$内函数值为负。

函数为 $y = \log_a x$ 的图形与函数 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ $(a > 1)$ 图形关于 x 轴对称，且都通过点$(1,0)$（图 1-9）。

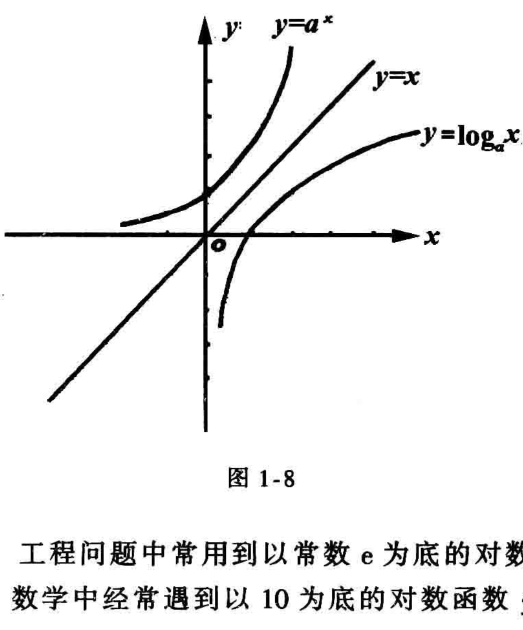

图 1-8

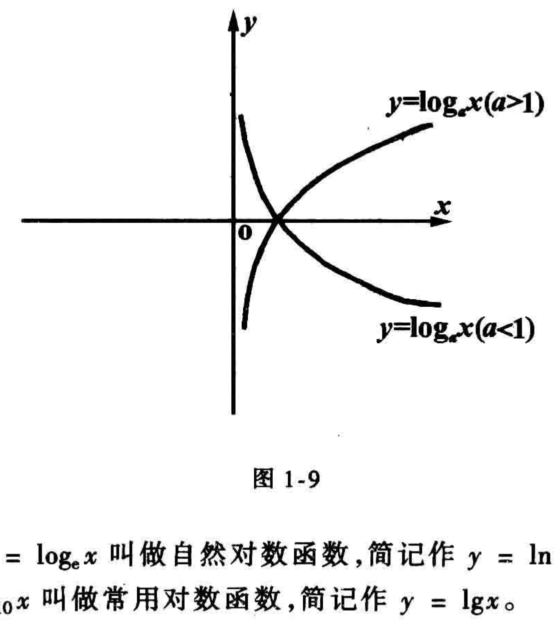

图 1-9

工程问题中常用到以常数 e 为底的对数函数 $y = \log_e x$ 叫做自然对数函数，简记作 $y = \ln x$。数学中经常遇到以 10 为底的对数函数 $y = log_{10} x$ 叫做常用对数函数，简记作 $y = \lg x$。

4. 三角函数

三角函数共有六个。

(1) 正弦函数

函数 $y = \sin x$ 称为正弦函数。它的定义域是区间$(-\infty, +\infty)$,值域是区间$[-1,1]$。它是有界函数、奇函数和以 2π 为周期的周期函数。它的图形界于直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间,且关于原点对称,并在每个周期内的图形相同(图 1-10)。

(2) 余弦函数

函数 $y = \cos x$ 称为余弦函数。它的定义域是区间$(-\infty, +\infty)$,值域是区间$[-1,1]$。它是有界函数、偶函数和以 2π 为周期的周期函数。它的图形界于直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间,且关于 y 轴对称,并在每个周期内的图形相同(图 1-11)。

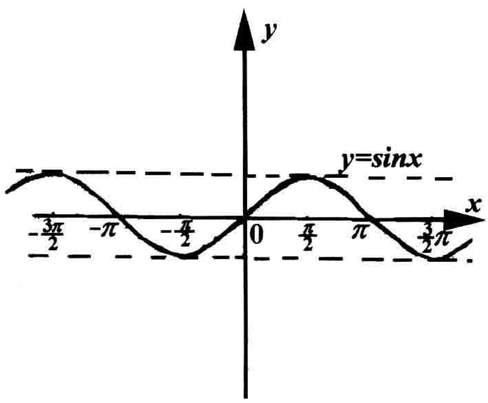

图 1-10

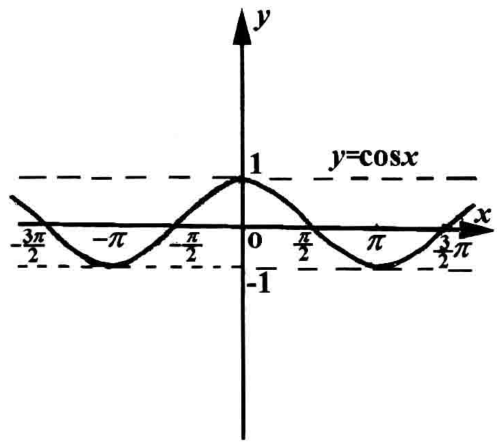

图 1-11

(3) 正切函数

函数 $y = \tan x$ 称为正切函数。它的定义域是区间$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域是区间$(-\infty, +\infty)$。它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数。图形如图 1-12 所示。

(4) 余切函数

函数 $y = \cot x$ 称为余切函数。它的定义域是区间$(k\pi - \pi, k\pi)$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域是区间$(-\infty, +\infty)$。这是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数。图形如图 1-13 所示。

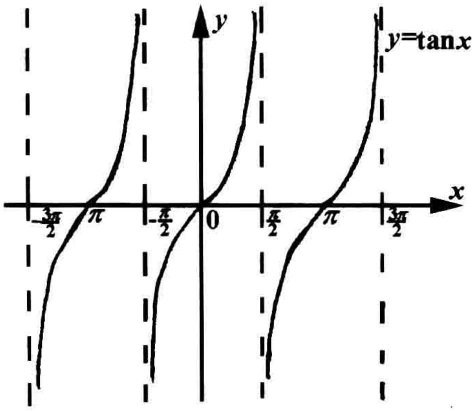

图 1-12

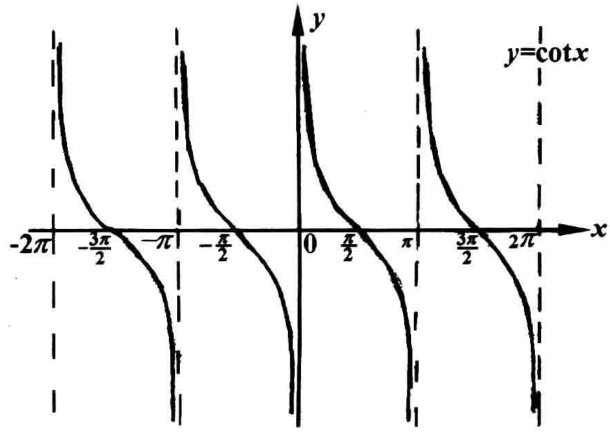

图 1-13

(5) 正割函数

函数 $y = \sec x$ 称为正割函数。它是余弦函数的倒数，即 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$，它的定义域是区间 $\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)，值域是区间 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$。它是偶函数，且是以 2π 为周期的周期函数。它在区域 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数。

(6) 余割函数

函数 $y = \csc x$ 称为余割函数。它是 正弦函数的倒数，即 $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$，它的定义域是区间 $(k\pi - \pi, k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)，值域是区间 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$。它是奇函数，且是以 2π 为周期的周期函数。它在区间 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数。

正割函数和余割函数图形很少用到，故从略。

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数。由于三角函数在它们的定义域内不是单调的，所以它们的反函数都是多值函数。为了避免多值性，通常限制它的值域，使其成为单值的。这样的单值分支仍称为反三角函数。

正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数为反正弦函数 $y = \arcsin x$。它的定义域是区间 $[-1,1]$，值域是区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$。它是有界函数、奇函数和单调增函数。图形如图 1-14 中实线部分所示。

余弦函数 $y = \cos x$ 的反函数为反余弦函数 $y = \arccos x$。它的定义域是区间 $[-1,1]$，值域是区间 $[0, \pi]$。它是有界函数和单调减函数。它既不是偶函数，也不是奇函数。图形如图 1-15 中实线部分所示。

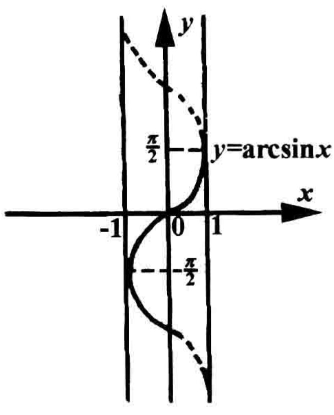

图 1-14

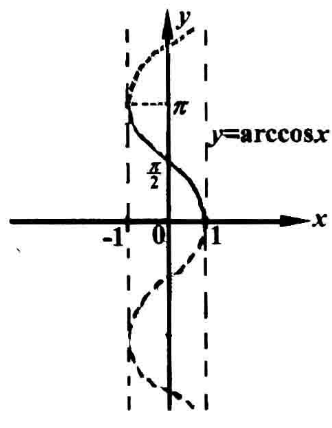

图 1-15

正切函数 $y = \tan x$ 的反函数为反正切函数 $y = \arctan x$。它的定义域是区间 $(-\infty, +\infty)$，值域是区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 它是有界函数、奇函数和单调增函数。图形如图 1-16 所示。

余切函数 $y = \cot x$ 的反函数为反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$。它的定义域是区间 $(-\infty, +\infty)$，值域是区间 $(0, \pi)$。它是有界函数和单调减函数。它既不是偶函数，也不是奇函数。图形如图 1-17 所示。

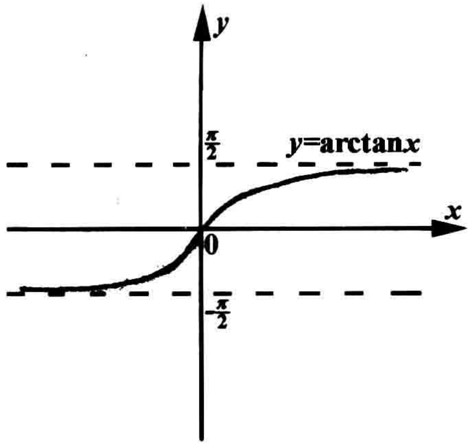

图 1-16

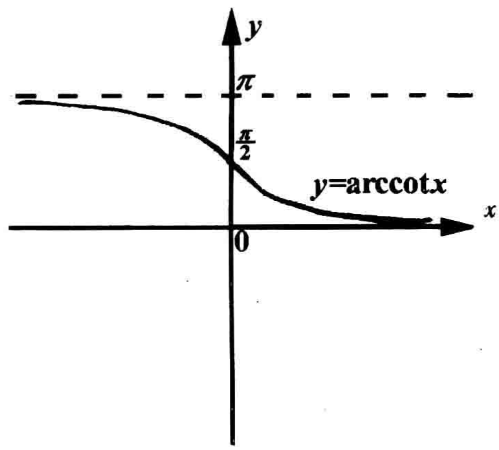

图 1-17

反正割函数与反余割函数一般不用。

上面五种函数统称为基本初等函数，是最常用、最基本的函数，它们的定义域、值域、性质和图形，务必牢记。

五、复合函数

如果 y 是 u 的函数：$y = f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们就称后一个函数是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量。

例如　$y = \sin^2 x$ 可以看成由 $y = u^2$，$u = \sin x$ 复合而成的。$y = \sin^2 x$ 的定义域是区间 $(-\infty, +\infty)$。

又如　$y = \sqrt{1 - x^2}$ 可以看成 $y = \sqrt{u}$，$u = 1 - x^2$ 复合而成的。$y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域是区间 $[-1,1]$，它只是 $u = 1 - x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的一部分，因为 $y = \sqrt{u}$ 要求 $u \geqslant 0$。

复合函数也可由两个以上的函数经过复合而成。例如，设 $y = \sqrt{u}$，$u = \cot v$，$v = \frac{x}{2}$，则 y 是 x 的函数 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$，这里 u 和 v 都是中间变量。

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如，$y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数。因为对于 $u = 2 + x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中任何 x 值所对应的 u 值（都大于或等于 2），使 $y = \arcsin u$ 都没有定义。

六、初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的且能用一个数学表达式表示的函数称为初等函数。

例如　$y = \sin^2 x$，$y = \sqrt{1 - X^2}$，$y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ 都是初等函数。

又如 $y = \lg(1 + \sqrt{1 + x^2})$，$y = \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{2 - \sqrt{x}}$，$y = \arctan\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ 也都是初等函数。

高等数学中所遇到的函数，大多数是初等函数。分段函数一般不是初等函数。

典型例题分析

一、求函数的定义域

例 1 求函数 $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域。

解 此函数是函数 $\lg\frac{1}{1-x}$ 与函数 $\sqrt{x+2}$ 的和。它的定义域是这两个函数的定义域的交集。对于函数 $\lg\frac{1}{1-x}$，由 $\frac{1}{1-x}>0$，得 $x<1$，由 $1-x\neq 0$ 得 $x\neq 1$，因此其定义域为 $(-\infty,1)$；对于函数 $\sqrt{x+2}$，由 $x+2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -2$，因此其定义域为 $[-2,+\infty)$。

故函数 $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域为

$$(-\infty,1)\cap[-2,+\infty)=[-2,1)。$$

例 2 求函数 $y=\sqrt{3-x^2}+\arccos\frac{x-2}{3}$ 的定义域。

解 此函数是函数 $\sqrt{3-x^2}$ 与函数 $\arccos\frac{x-2}{3}$ 的和。它的定义域是这两个函数的定义域的交集。对于函数 $\sqrt{3-x^2}$，由 $3-x^2\geqslant 0$ 得 $|x|\leqslant\sqrt{3}$，因此其定义域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$；

对于函数 $\arccos\frac{x-2}{3}$，由 $\left|\frac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 5$，因此其定义域为 $[-1,5]$。

故函数 $y=\sqrt{3-x^2}+\arccos\frac{x-2}{3}$ 的定义域为

$$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]\cap[-1,5]=[-1,\sqrt{3}]。$$

例 3 求函数 $y=\frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x^2-3x+2}$ 的定义域。

解 此函数可看作是函数 $\frac{1}{x^2-3x+2}$ 与函数 $\sqrt{\ln(2+x)}$ 的乘积。它的定义域是这两个函数定义域的交集。

函数 $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}$，它的定义域为 $x\neq 2$ 且 $x\neq 1$，即 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$；

对于函数 $\sqrt{\ln(2+x)}$，由 $\ln(2+x)\geqslant 0$ 得 $2+x\geqslant 1$，即定义域为 $[-1,+\infty)$。

故函数 $y=\frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x^2-3x+2}$ 的定义域为

$$((-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty))\cap[-1,+\infty)=[-1,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)。$$

例 4 求函数 $y=\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域。

解 此函数的定义域是函数 $\arcsin(1-x)$ 的定义域与函数 $\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$ 定义域的交集。

函数 $\arcsin(1-x)$ 的定义域为$[0,2]$;

对于函数$\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$,由$\frac{1+x}{1-x}>0$得$-1<x<1$,即定义域为$(-1,1)$。

故函数 $y=\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为

$$[0,2]\cap(-1,1)$$
$$=[0,1)。$$

例 5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1)$f(x^2)$;

(2)$f(\sin x)$;(3)$f(x+a)$,$(a>0)$;

(4)$f(x+\frac{1}{3})+f(x-\frac{1}{3})$。

解 (1) 由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 得 $f(x^2)$ 的定义域为$[-1,1]$;

(2) 由 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$ 得 $f(\sin x)$ 的定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi]$,$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(3) 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 得 $f(x+a)$ 的定义域为$[-a,1-a]$;

(4)$0\leqslant x+\frac{1}{3}\leqslant 1$ 得 $f(x+\frac{1}{3})$ 的定义域为$[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$,由 $0\leqslant x-\frac{1}{3}\leqslant 1$ 得 $f(x-\frac{1}{3})$ 的定义域为$[\frac{1}{3},\frac{4}{3}]$,故函数 $f(x+\frac{1}{3})+f(x-\frac{1}{3})$ 的定义域为$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$。

例 6 设 $f(u)=\sqrt{u^2-1}$,$u=g(x)=x-1$,求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域。

解 $f(u)$ 的定义域为 $|u|\geqslant 1$,即$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$;$g(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$。由 $|u|=|x-1|\geqslant 1$,得函数 $f[g(x)]$ 的定义域为$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$。

小结 求由分析表达式给出的函数的定义域,应注意以下几条原则:

(1) 若函数表达式是多项式,则函数的定义域为全体实数;

(2) 若函数表达式中含有分式,则分式的分母不能为零;

(3) 若函数表达式中含有偶次方根,则根号下的表达式必须大于等于零;

(4) 若函数表达式中含有对数,则真数必须大于零;

(5) 若函数表达式中含有反正弦函数或反余弦函数,则必须符合反正弦函数与反余弦函数的定义域,例如,对于 $\arccos\frac{x-2}{3}$,必须$\left|\frac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$;

(6) 若函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的定义域分别为数集 D_1 与 D_2,则函数 $f(x)\pm g(x)$ 或 $f(x)\cdot g(x)$ 的定义域都是 $D_1\cap D_2$;

(7) 求复合函数的定义域,可以先求各简单函数的定义域,再求复合函数的定义域;也可以先求出复合函数,直接讨论复合函数的定义域。

二、求函数值

这里只讨论直接给出 $f(x)$ 的表达式,求 $f(x)$ 在其定义域内某点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 的问题。对 $f(x)$ 的表达式未直接给出,而是涉及到其他方面的知识,如极限、导数、积分等,这样的求函数值的问题放到以后各有关章节讨论。

例 12 设

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0,\\ 1+\sin x, & 0<x\leqslant\pi,\\ \frac{\pi}{x}, & x>\pi,\end{cases}$$