

棘手又迷人的数学

你亦可以造幻方

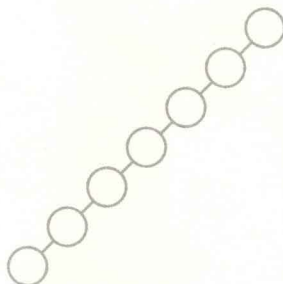
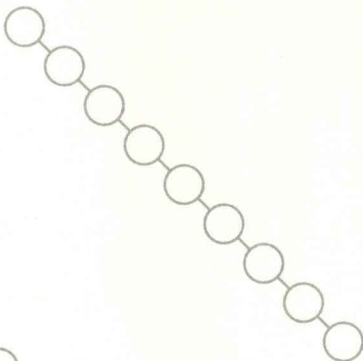
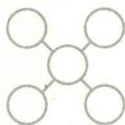
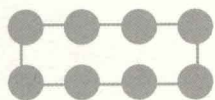
幻方，从学者的殿堂返回寻常百姓家。

两步法乃解密幻方的一把钥匙！

即使你还没有完全理解其中的道理，

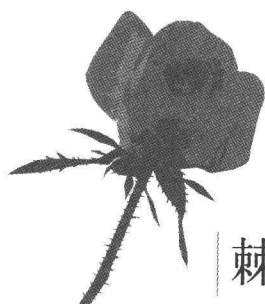
也能造出许多各有特色的幻方。

詹森／著



科学出版社





| 棘手又迷人 的数学 |

你亦可以造幻方

詹 森 / 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

幻方除了给人以美的感受外,还会给人带来灵感,每一个接触到幻方的人都会强烈地感受到蕴涵在其中的和谐美,惊叹怎么会有如此美妙的事物.幻方既有趣又神秘、既古老而又年轻,幻方中有解不完的谜.但构造幻方的经典方法不易为一般人所掌握,致使大众无缘享受这一美妙事物.本书要解决的问题就是提供构造幻方的简易方法,让大众都能成为这一美妙领域的“主人”!本书内容包括三个部分,前两部分以浅显的图示法,讲述如何用两步法或三步法构造五类幻方;第三部分讲述构造高阶幻方的加法与代码法.

本书可启迪读者的思维,开阅读者的视野,集科学性、创新性、应用性于一体,特别可为幻方爱好者和研究者提供一些帮助.

图书在版编目(CIP)数据

你亦可以造幻方 / 詹森著. —北京: 科学出版社, 2012

(棘手又迷人的数学)

ISBN 978-7-03-033180-9

I. 你… II. 詹… III. 幻方 - 普及读物 IV. O157-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 275632 号

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2012 年 3 月第一次印刷 印张: 15 3/4

字数: 320 000

定价: 38.00 元

如有印装质量问题, 我社负责调换

总 序

数学如一束玫瑰，棘手，但很迷人。

数学的美是迷人的。然而很多漂亮有趣的数学题，开始常常叫人产生无从下手之感，所以数学又常常是棘手的。其中组合数学的问题更是五花八门，几乎每个题目都要有独特的思路，使你在解题的思考过程中得以充分享受“从山重水复走向柳暗花明”的乐趣，体验在百思不解后豁然开朗的快乐。

擅长组合数学的柳柏濂先生，从他多年研究成果和数学教学的思考中撷取精华，写成十几篇数学小品与读者共同分享，其书名取为《数学，棘手但很迷人》，是非常贴切的。

这本书是本丛书的第一册，丛书其他分册内容形式多有不同而各具特色。编者用《棘手又迷人的数学》作为丛书的书名，想来主要是希望读者从多个角度领略数学的迷人和棘手之处。

柳先生的这些短文，引领我们走进一个颇有深度的数学世界。他不满足于浮光掠影或眼前一亮，而是与读者一同思考和探索。在脍炙人口的“阿凡提传奇”中，他选取了一个巧拆金环的故事，让我们在惊叹中，欣赏数论的完备分拆和有关的新结果。接着，作者带领我们从动物园的栏栅前和每天上下往返的楼梯中，走向组合数学的前沿观光；又从法国著名数学家傅里叶的经典提问，谈到中国古代的数学泰斗祖暅的数学原



理；从生命科学“克隆”羊的伟大成就谈起，把现代图论的知识和思维奉献给读者。其他如从有机化合物谈到红楼梦的族谱，再引出信息科学技术中的密码、树结构和有相当难度的机器证明；从宋代词人的名句将我们引向他的研究专题“组合矩阵论”中寻寻觅觅；又在绞肉机旁，把函数的迭代引向“混沌”的动力系统理论；在眼花缭乱的应用中，我们领会了数学模型的真谛，尝到了数学的美味……“棘手但很迷人”，也就成为作者与读者的共同体验了。作者用几乎是文学而不是数学的笔触，给我们娓娓道出现代数学的“故事”。这不是东采西摘的材料堆砌，而是一个二十多年来承担国家自然科学基金任务的教授在研究之余的思想札记。

“棘手但很迷人”，这是数学学习甘苦的内心独白，也是数学探索“无限风光在险峰”的壮志豪言。

古老的幻方，是棘手但却迷人的数学主题之一。吴鹤龄先生为《好玩的数学》丛书写了一本《幻方及其他——娱乐数学经典名题》（第二版），引得许多读者对幻方入迷而且跃跃欲试，詹森先生就是其中之一。詹先生玩幻方玩得熟能生巧，玩出了创新，把“棘手”玩成了顺手。于是他为本丛书写了一本《你亦可以造幻方》，与读者分享成功的快乐。书中提供了构造奇数阶的幻方、完美幻方、对称幻方、对称完美幻方、奇偶数分开的对称幻方等多种构造幻方的方法。构造一个这样的幻方，只需两步或三步，这两三步小学生都可以做到。即使你还没有完全理解其中的道理，也能造出许多个有各种特色的幻方。

具有不确定性的事件叫随机事件。随机事件的数学问题常常是迷人而棘手的。在《好玩的数学》丛书中《趣味随机问

题》一书的作者孙荣恒教授，这次又为我们带来了一串新的故事。他的新作《概率统计拾遗》，从平凡中发掘惊奇，给读者一个又一个意外。比如打麻将要掷骰子定庄的问题。有人认为自己掷骰子对自己坐庄有利，想自己坐庄者常抢着掷；有的人认为谁掷都一样，4家坐庄机会均等，都是 $1/4$ 。两种看法哪一种正确？意外的答案是都错了。由此引出的纸上作业法，有各种各样的应用。又如由鞋子配对引出的S矩阵给出四同、五同等问题的简单算法。孙先生通过简单、严谨的分析计算，得出的结论令人口服心服，其方法平凡而又有启发性。像这样来自生活的看似平凡其实暗藏玄机的问题书中不少，有的例子涉及考生的成绩，有的例子涉及法官的判决，要想真正想明白，真是要有不怕棘手的精神。

如果在棘手的辛劳之余想轻松一下，就翻翻本丛书中的另一本《邮票王国中的迷人数学》吧。作者之一是大家熟悉的易南轩老师，他的《数学美拾趣》（第二版）深受读者欢迎，也是《好玩的数学》丛书中的一册。另一位作者王芝平老师也是作品颇丰的数学教育专家。两位先生花费了三年多的光阴和心血，收集整理了1300多枚与数学有关的邮票，按图索骥，向我们一一道来。邮票的轮廓联系着各种几何形体，邮票的主题或涉及数学史上的事件，或纪念数学家的丰功伟绩，或展示数学的应用，琳琅满目，美不胜收。联系着这上千余枚邮票，作者纵横畅叙，笔墨酣畅，谈古论今，说天看海，大至卫星飞船，小至象棋游戏，都和数学的美妙关联起来。不论是数学爱好者、集邮爱好者或一般的读者，都能在阅读此书时享受人类文明之雅趣。不过这并不棘手，棘手的工作作者已经代我们辛劳了。



棘手又迷人的数学

你亦可以造幻方

本丛书的读者可能有男女老少，可能术业各有专攻，对数学的理解和鉴赏的角度与能力各不相同。有人认为棘手的问题，也有人能够驾轻就熟地手到擒来。但编者希望并且相信，每位翻阅过丛书的朋友都能从中看到几点迷人的星光；果真如此，那将是作者和编者最大的快乐。

2011年11月9日

前言

河图、洛书是中华传统文化的源头，幻方文化是中华民族的传统文 化。可惜的是，几千年来只有数学工作者和狂热的幻方爱好者才能涉足幻方这一既有趣又神秘的领域，原因之一是构造幻方的经典方法不易为一般平民百姓所掌握；其中最简单的经典的阶梯法，两步就可构造出一个幻方，但就此一个幻方而已，且阶梯法对构造更高阶的幻方不具有可操作性。本书在奇数阶幻方构造方法方面返璞归真，无论男女老少，只要你多少懂点数学，就可以造幻方，甚至可以造出千千万万不同的高阶对称完美幻方。本书还给出构造高阶幻方的加法，构造奇偶数分居的双对称镶边幻方的代码法……帮助你进入这个神秘、有趣的领域。

本书分三个部分，共 15 章：第一部分讲述如何用两步法构造奇数阶的幻方、完美幻方、对称幻方、对称完美幻方，用三步法构造奇偶数分开的对称幻方。第二部分讲述两步法或三步法进一步一般化可构造出更多的奇数阶的幻方、完美幻方、对称幻方、对称完美幻方、奇偶数分开的对称幻方。第三部分讲述构造高阶幻方的加法，构造 k^2 ($k=3, 4, \dots$) 阶完美幻方、对称完美幻方的加法以及构造奇偶数分居的双对称镶边幻方的代码法。

本书是科普读物，其最大的特点和贡献是，在世界上首次



系统给出一种构造奇数阶上述五类幻方的简易方法，这种方法大众很易掌握并发挥。

(1) 第一部分中的两步法针对只有小学文化程度的读者；第一部分中的三步法、第二部分中两步法的一般化针对初中文化程度的读者；第二部分三步法的一般化和第三部分，需要高中文化程度。

(2) 本书以一种小学及小学文化程度以上的读者可以掌握的方式，给出一种构造各个类型的奇数阶幻方（一次幻方）的系统性方法，对于每一个给定的奇数阶数 n ，可生成与阶数 n 有关的大量不同的 n 阶该类幻方。

(3) 生成完美幻方的两步法与生成幻方的两步法第一步是完全相同的，仅是第二步顺移方式不同而已。

生成对称幻方的两步法与生成幻方的两步法第二步是完全相同的，仅是第一步增加了关于对称的限制。

生成对称完美幻方的两步法与生成对称幻方的两步法第一步是完全相同的，仅是第二步顺移方式不同而已。

以上的特点使本书得以显示一步之差就可以得出不同类型的幻方。

(4) 由于第一部分、第二部分讲述的是构造 5 类任意奇数阶幻方的方法，在讲述方法时无可避免地会涉及一些数学概念和名词，一些读者可能会感到不习惯，其实直接阅读实例就已经可以轻松掌握该类幻方的构造方法，所以在内容安排上，作者反常道而行之，把一般方法的讲述放在每一章的最后，看完实例之后再读一般方法，就容易看懂。在这两部分，实例是构造指定阶数的该类幻方，用小学文化程度读者都易接受的图示法给出。某个阶数的该类幻方先把两步法分解为六步，用

图示方式给出生成该类幻方的全过程，用黑方格标出方法的结构要点，得出一个该类幻方，再给出另一个由两步法直接生成的该类幻方。

前两部分给出的每一种方法都可以构造出大量该类幻方，方法鲜明简单且两个方法之间只是一步之差，这就赋予了各种年龄、各种文化层次读者足够的玩幻方的能力及发挥与联想的空间。除了读者自身的发挥与联想外，第12章（你有更大的创意空间）通过实例告诉读者，其创意空间可能在哪里。

中、小学生通过玩幻方可以增强对数学的兴趣，增强对学习数学和学好数学的信心，有助于解决学生中较普遍存在的“恐数病”。学生中的数学爱好者玩幻方有可能玩出成年人预料不到的可喜成果，这种情况在世界上并不鲜见。

成年人的工作压力和生活压力使身心疲劳，玩幻方特别是与儿女一起玩，即使是三五分钟，会对舒缓身心疲劳起到很好作用。它既是一种很好的亲子休闲活动，又是一种益智活动。

老年人玩幻方既是一种休闲活动亦是一种养生。

对于使用幻方的各个领域的行家，本书亦应对他们有所裨益。

可以构造出多少幻方？数量是非常巨大的，在每章的末尾将会向你指出，这个数目究竟有多大。

关于第三部分的一些事实

这里要指出的是：南宋杨辉九九图是构造高阶幻方的加法的一个最简单的实例。

构造奇偶数分居的双对称镶边幻方的代码法，破解了10世纪古阿拉伯数学家 Alib Ahmad Al-Antaki 发明的奇偶数分居的双对称镶边11阶幻方，并给出构造 $n=4m+3$ ($m=1, 2, \dots$) 阶



同类幻方的方法。该类幻方除了构思十分精巧外，很适宜镶入你想镶入的有某种特定意义的日子或数字。

阶数为3的倍数的奇数阶对称完美幻方的构造一直是个难题，在构造 k^2 ($k=3, 4, \dots$) 阶完美幻方、对称完美幻方的加法中得到了部分解决。这个方法是作者受“数海星空——神奇的九阶完美幻方”一图的启发得出的成果，该图可在互联网上找到，是合肥市珠算心算协会方有昆、何昌荣为庆祝2009年教师节的原创成果，作者在此对两位先生表示谢意。

在这里，作者要强调的是，本书讲述的方法虽然可造出一个人终生都无法造完的那么大量的各种幻方，但显然并不代表全部，可能只是沧海一粟，期望读者另辟蹊径找到方法构造出更多、更奇妙的幻方，且期望在与同道者的共同努力下，使传统的幻方文化首先在中华大地上得到普及和推广，进而发扬光大，实现其应有的价值。

詹 森

2011年春

目 录

总序

前言

第1章 幻方历史源流的简单回眸	1
1.1 河图与洛书	1
1.2 最早系统研究幻方第一人	4
1.3 历史上几个有名的幻方	5
1.4 幻方与我们	9

第一部分 构造五类奇数阶幻方的两步法或三步法

第2章 构造奇数阶幻方的两步法	15
2.1 经典的阶梯法	15
2.2 构造5阶幻方的两步法	16
2.3 7阶幻方	18
2.4 9阶幻方	21
2.5 奇数阶幻方	25
第3章 改一步：奇数阶完美幻方	27
3.1 构造5阶完美幻方的两步法	28
3.2 7阶完美幻方	31
3.3 11阶完美幻方	34
3.4 奇数阶完美幻方	38



第4章 添加对称的限制：奇数阶对称幻方	40
4.1 构造5阶对称幻方的两步法	40
4.2 7阶对称幻方	43
4.3 9阶对称幻方	45
4.4 奇数阶对称幻方	49
第5章 还是改一步：奇数阶对称完美幻方	51
5.1 构造5阶对称完美幻方的两步法	51
5.2 7阶对称完美幻方	53
5.3 11阶对称完美幻方	56
5.4 奇数阶对称完美幻方	61
第6章 构造奇数阶奇偶数分开的对称幻方的三步法	62
6.1 构造5阶奇偶数分开的对称幻方的三步法	62
6.2 7阶奇偶数分开的对称幻方	65
6.3 9阶奇偶数分开的对称幻方	69
6.4 11阶奇偶数分开的对称幻方	74
6.5 奇数阶奇偶数分开的对称幻方	77

第二部分 构造五类奇数阶幻方的 两步法或三步法的进一步一般化

第7章 构造奇数阶幻方的两步法的一般化	83
7.1 构造5阶幻方的两步法的一般化	83
7.2 7阶幻方	86
7.3 11阶幻方	89
7.4 奇数阶幻方	95
第8章 同样是改一步：奇数阶完美幻方	97
8.1 构造5阶完美幻方的两步法的一般化	97
8.2 7阶完美幻方	100

8.3	11 阶完美幻方	103
8.4	奇数阶完美幻方	109
第 9 章	同样是添加对称的限制：奇数阶对称幻方	110
9.1	构造 5 阶对称幻方的两步法的一般化	110
9.2	7 阶对称幻方	113
9.3	11 阶对称幻方	117
9.4	奇数阶对称幻方	123
第 10 章	同样还是改一步：奇数阶对称完美幻方	125
10.1	构造 5 阶对称完美幻方的两步法的一般化	125
10.2	7 阶对称完美幻方	128
10.3	11 阶对称完美幻方	131
10.4	奇数阶对称完美幻方	137
第 11 章	三步法的一般化	139
11.1	构造 5 阶奇偶数分开的对称幻方的三步法的一般化	139
11.2	7 阶奇偶数分开的对称幻方	143
11.3	9 阶奇偶数分开的对称幻方	147
11.4	11 阶奇偶数分开的对称幻方	152
11.5	奇数阶奇偶数分开的对称幻方	159
第 12 章	你有更大的创意空间	162
12.1	创意空间	162
12.2	T 形幻方	164
12.3	党的生日	164
12.4	辛亥革命纪念	165

第三部分 构造高阶幻方的加法与代码法

第 13 章	构造高阶幻方的加法	169
13.1	杨辉的九九图	169



13.2	对称的亲子幻方	171
13.3	完美的亲子幻方	177
13.4	对称完美的亲子幻方	186
13.5	两个幻方之和	198
13.6	k 次幻方	198
第 14 章	构造 k^2 ($k=3,4,\dots$) 阶完美幻方, 对称完美幻方的加法	209
14.1	准幻方之和	209
14.2	对称幻方之和	213
14.3	构造 k^2 ($k=3,4,\dots$) 阶完美幻方, 对称完美幻方的加法	220
第 15 章	双对称奇偶镶边幻方	221
15.1	定义与一个史上有名的幻方	221
15.2	构造奇偶镶边幻方的代码法	222
15.3	一个 7 阶奇偶镶边幻方的生成全过程	225
15.4	两个有趣的奇偶镶边幻方	228
参考文献		232
后记		233

第 1 章 幻方历史源流的简单回眸

1.1 河图与洛书

幻方源自新石器时代早期的河图和 4300 年前中国大禹治水时代的洛书,这是中国人的骄傲.在最早的文化意义上,幻方代表吉祥、和谐.

在新石器时代早期,中华民族人文始祖伏羲,据河图发明创造了八卦,八卦可以推演出许多事物的变化,预卜事物的发展.相传,上古时期,今河南洛阳东北三十余公里孟津县会盟镇雷河村有一条图河与黄河相接,龙马负图出于此河,献给伏羲.伏羲氏依龙马之图画出了乾、兑、离、震、巽、坎、艮、坤为内容的卦图,后人称为伏羲八卦图,为《周易》之来源.伏羲氏仰观象于天,俯察法于地,用阴阳八卦来解释天地万物的演化规律和人伦秩序.伏羲氏造书契、正婚姻、教渔猎,结束了人们茹毛饮血、结绳记事的蒙昧历史,开创了中华文明.伏羲氏被奉为中华民族的“人根之祖”、“人文之祖”.其功之高,其道之大,实为炎黄二帝所不能,尧舜禹汤所难比.

《汉书·孔安国传》曰:“龙马者,天地之精,其为形也,马身而龙鳞,故谓之龙马,龙马赤纹绿色,高八尺五寸,类骆有翼,蹈水不没,圣人在位,负图出于孟河之中焉.”所负之图就叫做“河图”.河图与洛书是中国古代流传下来的两幅神秘图案,是中华文化之重要渊源.图 1.1 是古河图,图 1.2 是河图.

今孟津县会盟镇雷河村的龙马负图寺,始建于晋穆帝永和四年(公元 348 年),是为感念“人文之祖”伏羲的功绩,在图河故道上建起的一座祭礼



场所.它是河洛文化中“河图”出现地,也是中华易学的发源地,距今已有一千六百余年.龙马负图寺是“人文之祖”——伏羲氏的祭祀地,也是中华文明的发祥地.《尚书·顾命》伪孔安国传谓:“伏羲王天下,龙马出河,遂则其文以画八卦.”负图寺遂成为“河图”之源.

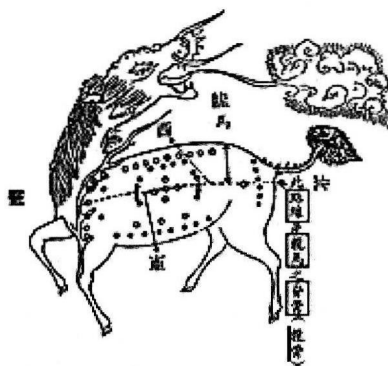


图 1.1

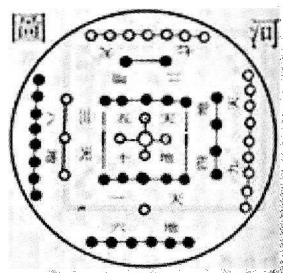


图 1.2

图 1.3 是龙马负图寺的龙马负图处石碑的照片.



图 1.3

又相传,大禹时,今洛阳西洛宁县洛河中浮出神龟,背驮“洛书”,献给大禹.大禹依此治水成功,遂划天下为九州.又依此定九章大法,治理社