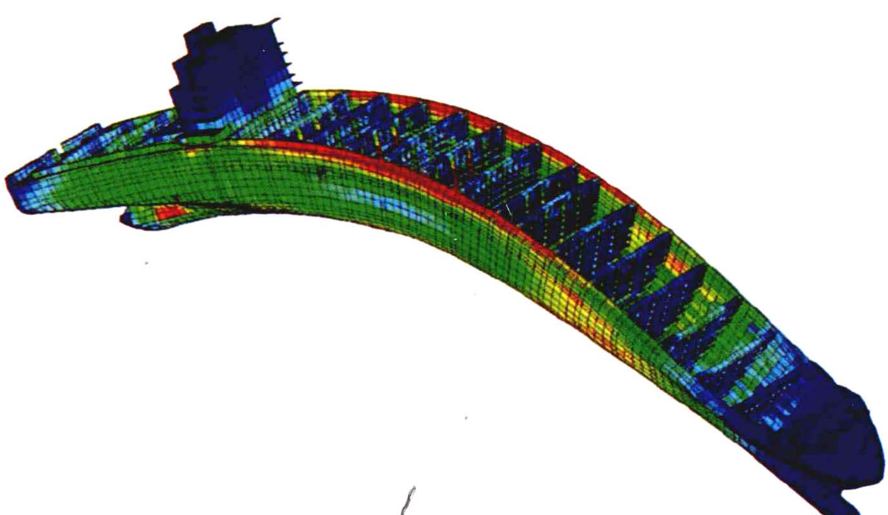
"十二五"国家重点图书出版规划项目
黑龙江省精品图书出版工程

船舶结构有限元分析

孙丽萍　主编

CHUANBO JIEGOU
YOUXIANYUAN FENXI



哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

“十二五”国家重点图书出版规划项目
黑龙江省精品图书出版工程

船舶结构有限元分析

主　编　孙丽萍
副主编　李力波

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书主要介绍有限元法的基本原理、船舶结构的模型化及大型结构通用分析软件的应用。对有限元分析的一般过程、平面问题有限元法、等参数单元、薄板弯曲做了简明介绍，重点介绍了船舶结构有限元分析中常用的单元及构件的模型化知识，并结合大型结构通用分析软件 ANSYS 介绍了结构的建模、分析及后处理技术，给出了许多应用实例。

本书可作为高等院校船舶与海洋工程学科本科生的专业教材，也可供有关专业工程技术人员和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

船舶结构有限元分析/孙丽萍主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2013. 1
ISBN 978 - 7 - 5661 - 0529 - 5

Ⅰ. ①船… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①船体结构 - 有限元分析 - 高等职业教育 - 教材 Ⅳ. ①U661. 42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 019871 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451 - 82519328
传　　真 0451 - 82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm × 1 092mm 1/16
印　　张 14. 75
字　　数 369 千字
版　　次 2013 年 1 月第 1 版
印　　次 2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 32. 00 元
http://www. hrbeupress. com
E-mail：heupress@ hrbeu. edu. cn

前　　言

随着电子计算机的出现而迅速发展起来的有限元方法,已成为解决工程实际问题的强有力的数值分析工具。它的应用范围从固体力学和结构分析领域扩展到热传导、电磁场、流体及声学等领域。

目前在船舶领域,舱段及全船有限元分析已越来越普遍被船东及船级社在设计中所采用,尤其是由新材料建造的船舶及新型结构的船舶设计,有限元分析更是设计者的重要依据之一,因此加强船舶与海洋工程专业的本科生在这方面的素养是十分必要的。但目前出版的有限元方面的书籍,大都是关于通用有限元分析的,根据课程的需要,作者深感有必要编写一本有关船舶结构有限元分析的书籍。

由于本书主要以船舶与海洋工程专业高年级学生为对象,在他们已初步具有有限元浅显知识的前提下,本书简要介绍了有限元法分析的一般过程及平面问题有限元法,并深入介绍等参数单元和薄板弯曲问题。在此基础上,重点介绍船舶结构的模型化及载荷和边界条件的处理等问题,并附有一定数量的计算实例。结合大型通用结构分析软件 ANSYS,详细介绍了结构的几何建模、网络划分、加载与求解及后处理等技术,并附有分析实例,使读者通过实践环节能在短时间内掌握软件的使用。

本书第 1 章至第 4 章由孙丽萍编写,第 5 章由孙丽萍、李力波编写,第 6 章由李力波编写,全书由孙丽萍统稿和修改。在本书的编写过程中,得到了聂武教授的很多帮助,并对书稿进行了初审,同时评审专家给本书提出了宝贵的修改意见,在此对他们表示衷心的感谢。

本书通俗易懂,易于自学,读者完成所附习题有助于对书中内容的理解。本书既可作为船舶与海洋工程专业本科生的教材,也可供有关专业工程技术人员和教师参考。

由于编者的水平有限,书中难免有不当之处,恳请读者给予批评和指正。

编　者

2012 年 8 月

目　　录

第 1 章　有限元法概述

有限单元法又称有限元素法(Finite Element Method,FEM),是 20 世纪 50 年代末 60 年代初兴起的应用数学、力学及计算机科学相互渗透、综合利用的边缘科学,是现代科学和工程计算方面最令人鼓舞的重大成就之一。其物理实质是用有限个单元体的组合代替连续体,化无限自由度的问题为有限自由度的问题,而数学实质是用有限子域的组合代替一个连续域,化连续场函数的微分方程求解问题为有限个参数的代数方程组的求解问题。有限元方法可以求解许多过去用解析方法无法求解的问题,对于边界条件和结构形状都不规则的复杂问题,有限元方法是一种行之有效的现代分析方法。五十多年来,有限元经历了产生、发展和完善的三个历史时期,有限元理论与计算机科学的完美结合成为现代力学的重要标志。

1.1　有限元法的发展概况

有限元思想并非现代的产物,早在公元 3 世纪,我国古代数学家刘徽就提出用割圆术求圆周长的方法,即用有限个正多边形逼近圆周,边数越多,周长与直径的比值就越接近一个常数。例如图 1－1 中分别用边数 $n=4,6,8$ 和 20 的正多边形逼近半径为 R 的圆周,周长与直径比分别为 2.828,3.01,3.06 和 3.13,向 $\pi=3.141\ 592\ 6$ 逼近,这就是有限元思想的萌芽。

经典结构力学计算中采用的刚架位移,将原本是连续体的刚架看成是仅仅在刚架的有限个节点处连接的杆件组合体,将复杂的杆系结构的计算问题转变为简单杆件的分析和综合问题,这种化整为零,集零为整的方法就是有限元方法的基本思路。

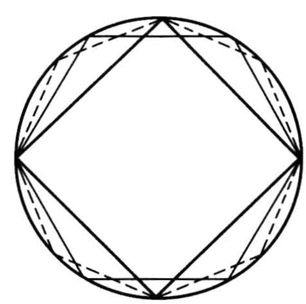


图 1－1　用正多边形逼近圆周

20 世纪 30 至 50 年代,在进行复杂的飞机结构计算时,对于复杂的刚架、蒙皮、骨架的计算引入了矩阵表达方法,使刚架位移法的计算更加规范。矩阵代数是有限元方法的数学工具。

现代有限元方法的发展始于 20 世纪 40 年代,这依赖于电子计算机的发展。1946 年第一台计算机在美国投入运行,人们惊喜地发现结构力学的矩阵表达方法特别适用于电子计算机编写的程序,能轻而易举地解决以往人们不敢问津的复杂结构的计算问题。计算机的出现为力学科学带来了巨大的变革,也改变了力学家思考问题的方法。因为,如果没有计算机,矩阵方法和有限元方法产生的大量代数方程的解决仍然是十分困难和实际不可能的。因此,可以说计算机的出现是有限元方法得以发展的物质基础。

1956 年,美国波音公司 Turner 等人在美国宇航局的年会上宣布,他们将求解杆件结构的方法推广到求解连续体力学问题,将连续的弹性平面区域离散为有限个几何形状简单的

三角形或四边形单元,这些单元仅在有限个节点连接,并在数学上采用了矩阵表达法。这是有限元方法的第一次成功尝试。1960 年美国加州大学伯克利分校的 R W Clough 第一次使用了“有限元”这一名词。从此,有限元方法以其无比的优越性迅速占领了弹性静力学领域,将弹性结构静力学的理论研究和应用水平推向新的高度。1964 年包括美籍华裔科学家卞学璜在内的一批科学家,发现了有限元方法的实质是弹性力学变分原理中瑞利 - 里兹方法的变种,奠定了有限元方法的数学基础。有限元方法因此又称为现代变分方法,因为变分方法是一种普遍的数学方法,并不涉及变分问题的物理背景和工程实质,因此很快冲出了弹性静力学的范畴而扩展到固体力学的其他领域。到 20 世纪 60 年代中期以后,有限元方法已经从小应变、小位移、弹性材料和静力分析发展向大变形、热分析、材料非线性和杆件屈曲问题,以及粘弹性问题、动力学问题的研究,继而又渗透到热传导、电磁场等非力学领域、生物力学领域的许多研究,如脊柱、颅骨、关节、镶牙、心脏起搏等方面的应力分析越来越多地成为当前有限元法的新课题。

有限元法借助于结构力学的刚架位移法,但是比刚架位移法有更深刻的数学和物理基础,就杆系结构来说,每一个杆件就是一个单元,杆件的两个端点就是单元的节点;而一个复杂的弹性体是由无限个质点组成的连续体,具有无限个自由度。有限单元法是将连续体人为地划分为有限数量的单元的集合体,这些单元仅仅在有限个公共点、交线或公共表面连接,载荷都作用在节点上,因而仅有有限个自由度。这个由无限自由度转化为有限自由度的过程称为离散化。离散化是有限元方法的核心,也是连续体的有限元方法与传统的结构矩阵分析方法的区别之一。有限单元法与矩阵位移法的另一个重要区别是在矩阵位移法中每个杆件的力与变形关系都是明确的,由杆端力和杆端位移都能通过材料力学计算公式推导出杆件内部的力和位移,而有限单元法需要在一个单元的局部范围内用简单函数描述单元内部各点的位移变化,最后形成节点位移和单元内部各点位移关系的单元位移形态函数,这是有限元方法的精华。形态函数的研究是有限元理论研究方面的重要课题。

1.2 有限元法分类

有限元法可分为两大类,即线弹性有限元法和非线性有限元法。其中线弹性有限元法是非线性有限元法的基础,二者不但在分析方法和研究步骤上有类似之处,而且后者常常要引用前者的某些结果。

1.2.1 线弹性有限元法

线弹性有限元以理想弹性体为研究对象,所考虑的变形建立在小变形假设的基础上。在这类问题中,材料的应力与应变呈线性关系,满足广义胡克定律;应变与位移也是线性关系。线弹性有限元问题归结为求解线性方程组问题,所以只需较少的计算时间。如果采用高效的代数方程组求解方法,也有助于降低有限元分析的时间。

线弹性有限元一般包括线弹性静力分析与线弹性动力分析两个主要内容。学习这些内容需具备材料力学、弹性力学、结构力学、数值方法、矩阵代数、算法语言、振动力学、弹性动力学等多方面的知识。

1.2.2　非线性有限元法

非线性有限元问题与线弹性有限元问题有很大不同，主要表现在以下三个方面：

(1)非线性问题的方程是非线性的，因此一般需要迭代求解；

(2)非线性问题不能采用叠加原理；

(3)非线性问题不总有一致解，有时甚至没有解。

以上三个方面的因素使非线性问题的求解过程比线弹性问题更加复杂、费用更高和更具有不可预知性。有限元法所解的非线性问题可以分为以下三类。

1. 材料非线性问题

材料的应力与应变是非线性关系，但应变与位移却很微小，此时应变与位移呈线性关系，这类问题属于材料非线性问题。由于从理论上还不能提供能普遍接受的本构关系，所以一般来说，材料的应力与应变之间的非线性关系要基于试验数据，有时非线性材料特性可用数学模型进行模拟，尽管这些模型总是有它们的局限性。

在工程实际中较为重要的材料非线性问题：非线性弹性(包括分段线弹性)、弹塑性、粘塑性及蠕变等。

2. 几何非线性问题

几何非线性是由于位移之间存在非线性关系引起的。当物体的位移较大时，应变与位移的关系是非线性关系，这意味着结构本身会产生大位移或大转动，而单元中的应变却可大可小。研究这类问题时一般都假定材料的应力与应变呈线性关系。这类问题包括大位移大应变问题及大位移小应变问题。如结构的弹性屈曲问题属于大位移小应变问题；橡胶部件形成过程为大应变问题。

3. 非线性边界(接触问题)

在加工、塑封、撞击等问题中，接触和摩擦的作用不可忽视，接触边界属于高度非线性边界。平时遇到一些接触问题，如齿轮传动、冲压成型、轧制成型、橡胶减振器、紧配合装配等，当一个结构与另一个结构或外部边界相接触时，通常要考虑非线性边界条件。

实际的非线性可能同时出现上述两种或三种非线性问题。

1.3　有限元法分析过程及其收敛性

1.3.1　有限元法分析过程

有限元法分析过程大体分为前处理、分析和后处理三大步骤。

对实际的连续体经过离散化后就建立了有限元分析模型，这一过程是有限元的前处理过程。在这一阶段，要构造计算对象的几何模型，划分有限元网格，生成有限元分析的输入数据。这一步是有限元分析的关键。

有限元分析过程主要包括单元分析、整体分析、载荷移置、引入约束、求解约束方程等过程。这一过程是有限元分析的核心部分，有限元理论主要体现在这一过程中。有限元法包括三类，即有限元位移法、有限元力法、有限元混合法。在有限元位移法中，选节点位移作为基本未知量；在有限元力法中，选节点力作为基本未知量；在有限元混合法中，选一部分基本未知量为节点位移，另一部分基本未知量为节点力。有限元位移法计算过程的系统

性、规律性较强,特别适宜于编程求解。一般除板壳问题的有限元法应用一定量的混合法外,其余全部采用有限元位移法。所以本书如不作特别声明,有限元法指的是有限元位移法。

有限元分析的后处理主要包括对计算结果的加工处理、编辑组织和图形表示三个方面。它可以把有限元分析得到的数据,进一步转换为设计人员直接需要的信息,如应力分布状况、结构变形状态等,并且绘成直观的图形,从而帮助设计人员迅速地评价和校核设计方案。

1.3.2 选择位移函数的一般原则

有限元法的分析过程都依赖于假定的单元位移函数或位移模式,因此为了得到满意的解答,必须使假定的位移场尽可能逼近弹性体的真实位移形态。如果假定的单元位移场与弹性体的真实位移场完全一致,有限元解便是精确解。如桁架和刚架的单元位移场与弹性杆件的变形是一样的,因而桁架和刚架的有限元解答是精确的。在连续体弹性力学有限元法中,一般找不到真实位移场,所以只能得到近似解答。

单元的位移函数一般以包含若干待定参数的多项式作为近似函数,称为位移多项式。有限项多项式选取的原则应考虑以下几点。

(1)待定参数是由节点场变量确定的,因此待定参数的个数应与单元的自由度数相同。

(2)对于应变由位移的一阶导数确定的场问题,选取多项式时,常数项和坐标的一次项必须完备。位移函数中常数项和坐标的一次项分别反映了单元刚体位移和常应变的特性,当划分的单元数趋于无穷时,单元趋于无穷小,此时单元应变趋于常应变。而当节点位移是由某个刚体位移引起的,弹性体内不应该有应变,这些特性必须在选择的位移多项式中予以体现。同理,对于应变由位移的二阶导数定义的场问题,常数项、一次项和二次项必须完备。

(3)多项式的选取应由低阶到高阶,尽量选取完整性阶数高的多项式,以提高单元精度(称为单元的完备性)。若由于项数限制不能选取完整多项式,选取的多项式应尽可能具有坐标的对称性(称为几何不变性)。

1.3.3 收敛性

有限元法是一种数值方法,因此应考虑该方法的收敛性问题。

有限元方法的收敛性是指当网格逐渐加密时,有限元解答的序列收敛到精确解;或者当单元尺寸固定时,单元的自由度数越多,有限元的解答就越趋近于精确解。

有限元法的收敛条件包括以下四个方面。

(1)在单元内,位移函数必须连续。多项式是单值连续函数,因此选择多项式作为位移函数,在单元内的连续性能够保证。

(2)在单元内,位移函数必须包括常应变项。每个单元的应变状态总可以分解为不依赖于单元内各点位置的常应变和由各点位置决定的变量应变。当单元的尺寸足够小时,单元中各点的应变趋于相等,单元的变形比较均匀,因而常应变就成为应变的主要部分。为反映单元的应变状态,单元位移函数必须包括常应变项。

(3)在单元内,位移函数必须包括刚体位移项。一般情况下,单元内任一点的位移包括形变位移和刚体位移两部分。形变位移与物体形状及体积的改变相联系,因而产生应变;

刚体位移只改变物体位置,不改变物体的形状和体积,即刚体位移是不产生变形的位移。空间一个物体包括三个平动位移和三个转动位移,共有六个刚体位移分量。由于一个单元牵连另一些单元,其他单元发生变形时必将带动该单元做刚体位移。

(4)位移函数在相邻单元的公共边界上必须协调。对一般单元而言,协调性是指相邻单元在公共节点处有相同的位移,而且沿单元边界也有相同的位移,也就是说,要保证不发生单元的相互脱离、开裂和相互侵入重叠。要做到这一点,就要求位移函数在公共边界上能由公共节点的函数值唯一确定。对一般单元,协调性保证了相邻单元边界位移的连续性。但是,在板壳的相邻单元之间,还要求位移的一阶导数连续,只有这样才能保证结构的应变能是有界量。

总的来说,协调性是指在相邻单元的公共边界上满足连续性条件。

前三个条件又叫做完备性条件,满足完备性条件的单元叫做完备单元;第四个条件是协调性要求,满足协调性的单元叫做协调单元,否则称为非协调单元。完备性要求是收敛的必要条件,四个条件全部满足,构成收敛的充分必要条件。

在实际应用中,要使选择的位移函数全部满足完备性和协调性要求是比较困难的,在某些情况下可以放松对协调性的要求。

需要指出的是,有时非协调单元比与它对应的协调单元还要好,其原因在于近似解的性质。假定位移函数就相当于给单元施加了约束条件,使单元变形服从所加的约束,这样的替代结构比真实结构更刚一些。但是,这种近似结构由于允许单元分离、重叠,使单元的刚度变软了,或者形成了铰,例如板单元在单元之间挠度连续,而转角不连续时,刚节点变为铰接点。对于非协调单元,上述两种影响有误差相抵消的可能,因此利用非协调单元有时也会得到很好的结果。在工程实践中,非协调元必须通过"分片试验"后才可使用。

1.3.4　有限元位移解的下限性质

在用有限元位移法解弹性力学问题时,要应用最小势能原理。根据最小势能原理求得的位移近似解,其值将小于精确解。这种位移近似解称为下限解。

位移解的下限性质可以解释为单元原是连续体的一部分,具有无限多个自由度。在假定了单元的位移函数后,自由度限制为只有以节点位移表示的有限自由度,即位移函数对单元的变形进行了约束的限制,使单元的刚度较实际连续体加大了,因此连续体的整体刚度随之增加,离散后的刚度比实际刚度大,求得的位移近似解总体上(而不是每一点)将小于精确解。

1.4　有限元法的优缺点

1.4.1　有限元法的优点

综合来说,有限元法的优点是显而易见的。

(1)整个系统离散为有限个单元,并将整个系统的方程转换成一组线性联立方程,从而可以用多种方法对其求解。

(2)边界条件不进入单个有限单元的方程,而是在得到整体代数方程后再引入边界条件。这样,内部和边界上的单元都能够采用相同的场变量模型,而且当边界条件改变时,内

部场变量模型不需要改变。

(3)有限元法考虑了物体的多维连续性,不仅在离散过程中把物体看成是连续的,而且不需要用分别的插值过程把近似解推广到连续体中的每一点。

(4)有限元法不需要适用于整个物体的插值函数,而只需要对每个子域或单元采用各自的插值函数,这就使得其对复杂形状的物体也能适用。

(5)该方法能够很容易求解非均匀连续介质,而其他方法处理非均匀性则很困难。

(6)适用于线性或者非线性场合。

(7)该方法能够在不同层面上得到阐释或理解。对有较深数学知识的人来说,完全可以用数学语言来描述,并获得严格推理。而对一般工科学生来说,可以只从物理层面上得到理解,正如上面阐释的那样。

1.4.2 有限元法的缺点

有限元法也有其不足,最主要体现在应用上。

(1)有限元计算,尤其是在对复杂问题的分析上,所耗费的计算资源是相当惊人的,计算资源包括计算时间、内存和磁盘空间。

(2)对无限区域问题,有限元法较难处理。

(3)尽管现在的有限元软件提供了自动划分网格的技术,但到底采用什么样的单元、网格的密度多大才合适等问题完全依赖于经验。

(4)有限元分析所得结果并不是计算机辅助工程的全部,而且一个完整的机械设计不能单独使用有限元分析完成,必须结合其他分析和工程实践才能完成整个工程设计。

第 2 章　平面问题有限元法

2.1 概　　述

严格地说,任何一个实际的弹性体的求解都是空间问题。弹性体在载荷作用下,体内任一点的应力状态可由六个应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$ 来表示;弹性体在载荷作用下,还将产生位移和变形,弹性体内任一点的位移可由沿直角坐标轴方向的三个位移分量 u,v,w 表示,弹性体内任一点的应变可由六个应变分量 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$ 来表示。但是,如果所考虑的弹性体具有某种特殊的形状,并且承受的是某种特殊的外力,就可以把空间问题简化为平面问题。这样处理后,分析和计算的工作量将大大地减少,而所得的结果仍能满足工程上对精度的要求。弹性力学平面问题是空间问题的简化,它分为平面应力问题和平面应变问题。

2.1.1　平面应力问题

满足以下条件的问题可视为平面应力问题。

(1) 弹性体在一个坐标方向的几何尺寸远小于其他两个坐标方向的几何尺寸,例如等厚度薄板。

(2) 作用于边缘的表面力平行于板面,且沿板厚 t 均匀分布。

(3) 顶面和底面上没有载荷作用。

(4) 体积力平行于板面,且沿板厚均匀分布。

研究这种薄板时,坐标面总是取在平分板厚的中间面内,z 轴垂直于板面,如图 2-1 所示。由于薄板两侧面是自由表面,故在 $z=\pm t/2$ 的上下表面上,$\sigma_z=0,\tau_{zx}=0,\tau_{yz}=0$。因为板很薄,外力又不沿板的厚度变化,所以可以近似认为在整个薄板上的所有各点都有 $\sigma_z=0,\tau_{zx}=0,\tau_{yz}=0$。考虑到剪应力互等定理,六个应力分量中就只剩下 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 三个应力分量,这三个应力分量都平行于 xy 平面。同样也因为板很薄,外力不沿板厚变化,可以认为这三个应力分量沿板厚 t 不变,即与点的 z 坐标无关,只是坐标 x,y 的函数,由此可见,平面应力问题的应力列阵为

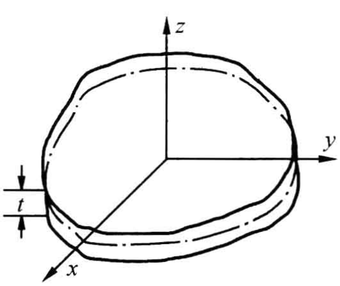


图 2-1　平面应力问题

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[\sigma_x\quad\sigma_y\quad\tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{2-1}$$

将 $\tau_{zx}=\tau_{yz}=\sigma_z=0$ 代入弹性力学空间问题的物理方程中可得

$$\gamma_{zx}=0,\quad \gamma_{yz}=0,\quad \varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \tag{2-2}$$

即 ε_z 一般不为零,但它不是独立的,只取决于 σ_x,σ_y,因此在平面应力问题中需考虑的应变

分量只有 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$。同理,与 ε_z 直接相关的 z 方向的位移 w 也不独立。将上述各量代入弹性体空间问题的几何方程得

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \tag{2-3}$$

式(2 - 3) 为平面应力问题的几何方程。

将 $\sigma_z = 0$ 代入弹性体空间问题的物理方程得

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases} \tag{2-4}$$

式(2 - 4) 称为平面应力问题的物理方程,写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{2-5}$$

简记为 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon}$,$\boldsymbol{D}$ 称为平面应力问题的弹性矩阵。于是

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{2-6}$$

根据上述特点,对平面应力问题,只要取中面分析即可。

2.1.2 平面应变问题

满足以下条件的问题可视为平面应变问题。

(1) 弹性体沿一个坐标轴(例如 z 轴) 方向的尺寸很长,且所有垂直于 z 轴的横截面都相同,位移约束条件或支承条件沿 z 方向也是相同的,例如很长的等直柱体。

(2) 柱体侧表面承受的表面力均垂直于 z 轴,且分布规律不随 z 坐标变化。

(3) 体积力垂直于 z 轴,且分布规律不随 z 坐标变化。

研究这种很长的等直柱体时,总是取 z 轴沿长度方向,如图 2 - 2 所示。分析时,假想柱体无限长,这样所有的应力分量、应变分量、位移分量都不沿 z 方向变化,只是 x,y 的函数。同样由于柱

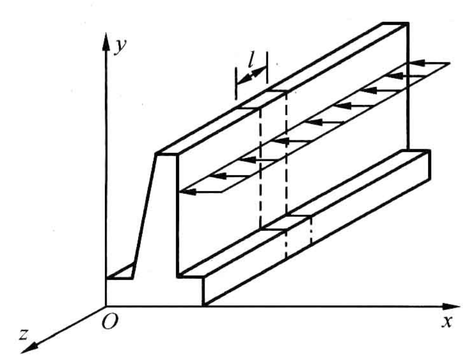


图 2 - 2 平面应变问题

体无限长，任一截面都可以看成对称面，因此各点都只有 x，y 方向的位移，且都是平面内的两个位移的函数。根据上述位移的特点，由空间问题的几何方程可知，$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$，只剩平行于 xy 面的三个应变分量 ε_x，ε_y，γ_{xy}。与平面应力问题类似，可写出平面应变问题的几何方程与物理方程。

简单推导可知，平面应变问题与平面应力问题有相同的几何方程；平面应变问题的物理方程与平面应力问题形式完全相同，只要将平面应力问题弹性矩阵中的 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$，把 μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$，就可得出平面应变问题的弹性矩阵。根据上述特点，对平面应变问题，只要取横截面分析即可。

2.2 结构离散化

离散化就是把一个给定的区域离散成有限个具有简单几何形状的单元的集合，即用一个有限元网格代替给定的区域。在进行离散化时，需要选择单元的数目、类型、形状，确定网格的疏密。这些因素的确定需要具备给定问题的工程知识和从事有限元分析的经验。选择单元形状的一个基本考虑，就是形成的网格要尽可能准确地代表原来的区域。单元节点的选择原则首先在于它能够反映单元的形状，例如线段的端点、三角形的顶点均作为单元的节点。在平面问题中，离散化的区域是一平面，采用的单元形状如图 2 - 3 所示，图(a) 为三角形单元，图(b) 为矩形单元，图(c) 为四边形单元，图(d) 为六节点三角形单元，图(e) 为八节点矩形单元，图(f) 为八节点曲边四边形单元，其中最简单的单元是三角形单元，最常用的单元是四边形单元。

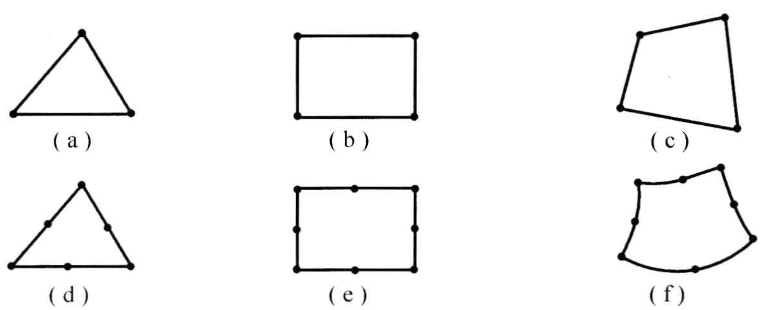


图 2 - 3 平面问题单元类型

在对平面问题离散化时规定：单元之间只在节点处相连；所有的节点都为铰接点；单元之间的力只通过节点传递；外载荷都要移置到节点上；在节点位移或者某一分量可以不计之处，就要在该节点安置一个铰支座或相应的连杆支座。这样就得到了有限元分析的计算模型。

一般来说，离散化过程有一定的任意性，不存在定量的尺度来衡量其质量。但是由于离散化模型的质量往往决定着有限元分析的质量，因此有必要深入讨论离散化的某些定性的规律性，以提高有限元离散化模型的质量。

2.2.1 结构对称性的利用

实际工程中，很多结构具有对称性，如能恰当地加以利用，可以使结构的有限元计算模型以及相应的计算规模得到缩减，从而使数据准备工作和计算工作量大幅度地降低。

当结构中的一部分假想地相对于结构的某一平面对折后，结构两部分的形状、物理性质和约束条件完全重合，则称该平面为对称面，称该结构为具有对称面的对称结构。具有对称面的对称结构上作用的载荷包括对称载荷、反对称载荷与一般载荷。若载荷在随结构对折后相互重合，则称为对称载荷；若载荷在随结构对折后，需将对称面某一边的载荷冠以负号才能相互重合，则称为反对称载荷；无上述特点则称为一般载荷。在静力分析中，利用结构对称性，取结构的一部分建立有限元模型，并由载荷的对称情况分析对称面上的位移状态，从而确定对称面上节点的边界条件。计算结束后，由此部分的计算结果推断出整个结构的计算结果，从而达到简化分析的目的。

若模型整体不太复杂时，也可取整体直接建立有限元模型。此时应注意网格的布局，尽量不破坏对称性。

2.2.2 划分网格要兼顾精度和经济性

在位移函数收敛的前提下，网格划得越密（即单元尺寸越小），计算结果越精确。另一方面，网格越密，单元越多，计算时间和费用将增加，同时也会受到计算机容量的限制，因此划分网格要兼顾精度和经济性，而且经验表明，当网格加密到一定程度后，再加密网格，精度的提高不再明显，这将造成经济上的浪费。合理的网格布局应同结构的应力梯度（应力变化率）相一致。应根据经验或解析法的理论知识，在应力急剧变化（应力梯度大）的区域，单元小一些，网格密一些，而且网格划分应由密到疏逐渐过渡。例如图2－4中的网格布局，在开孔处应力集中，网格要密。但是，这是针对结构的静力分析而言的。如果对结构进行模态分析，一般应选择较为均匀的网格分布。

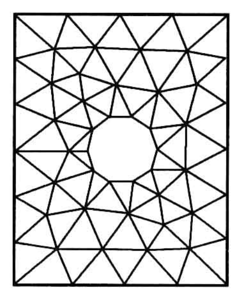


图2－4 网格的疏密图

加密网格时一般遵循以下几点：

（1）所有以前的网格（粗网格）应包含于当前加密的网格（细网格）之中。

（2）加密网格过程中，单元类型不变，即单元位移函数不变。这就省去了重新推导单元位移函数、单元刚度矩阵、单元载荷向量等的麻烦。

（3）比较网格加密前后的计算结果，如果前后两次的计算结果有较大差异，表明了加密网格的优越性和有继续加密网格的必要性；如果前后两次的计算结果差别很小，表明没有继续加密网格的必要，计算结果已收敛。

2.2.3 不连续处的自然分割

工程结构在几何形状、载荷分布和材料特性等方面存在着许多不连续处。一般情况下，在离散化过程中，应把有限元模型的节点、单元的分界线或分界面设置在相应的不连续处。

如图2－5所示，集中载荷 P 的作用点 A 处应设置节点，其优点是不需进行载荷移置，节省了计算时间，提高了计算精度。分布载荷的突变处（B,C,D 处）也应设置节点，保证在任一

单元的边界上分布载荷是连续的。

几何形状有突变的部位应设置单元的分界线或分界面。对于平面应力问题，以厚度突变处作为单元的分界线，以保证每个单元厚度均为常数。对非均质材料，在不同材料的自然分界线上应设置单元的分界线，以保证各单元的物理性质均匀。

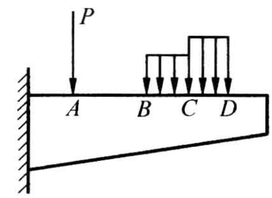


图 2－5　不连续处的自然分割

另外，在几何、载荷和材料性能突变处网格应加密，这是因为场函数在这些地方易产生较大变化，例如在凹角处往往产生应力集中，所以在凹角处应取较小的单元。一个网格中，单元尺寸不宜相差太大，单元从大到小逐渐过渡。为了减少工作量，可以采用局部加密网格的方法。在局部加密区域边界上，前一次网格计算出的节点位移作为本次计算局部加密区域上的边界条件，即进行二次解析计算。

2.2.4　圆角的处理

离散化使结构的边界变成了单元边界的集合，如果用直线单元边界代替结构的曲线边界，将产生结构几何形状的离散化误差。几何形状的离散化误差对机械结构中大量存在的过渡圆角的影响尤为突出。过渡圆角附近一般存在应力集中，而应力集中对过渡圆角几何形状的误差异常敏感，而且过渡圆角处的应力集中一般又是分析研究的目标，因此在有限元分析中要特别注意过渡圆角几何形状的离散化误差问题。

要减少几何形状离散化误差，可以采用较小的单元、较密集的网格，也可采用高阶单元。但是并非所有过渡圆角均需采取措施，还应考虑应力集中程度、结构分析的目的和要求等因素。如图 2－6(a) 所示的槽形结构，共有 A,B,C,D 四处过渡圆角。静力分析时，由于 C,D 两处有较大的应力集中，因此在这两个圆角处应采用较密集的单元网格。而在 A,B 两处，由于应力梯度小，几何形状误差对计算结果影响不大，因此可以采用较稀疏的单元网格。静力分析时的网格如图 2－6(b) 所示；固有特性分析时，则可采用如图 2－6(c) 所示的较为规则、均匀的网格布局。

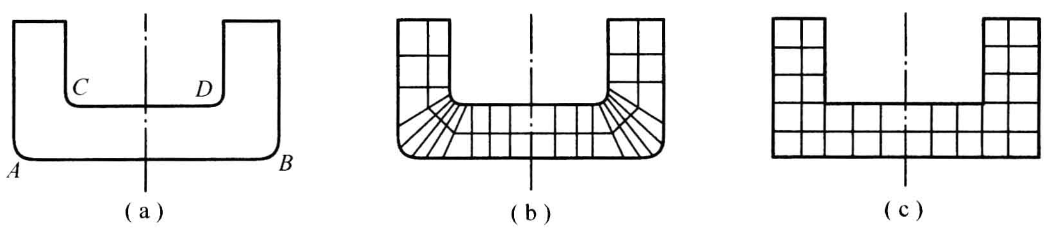


图 2－6　过渡圆角的处理

2.2.5　单元形态的选择

单元形态包括单元形状、边中节点的位置、细长比等，在结构离散化过程中必须合理选择。一般来说，为了保证有限元分析的精度，必须使单元的形态尽可能规则。

对于三角形单元，三条边长尽量接近，不应出现大的钝角和边长。这是因为根据误差分析，应力和位移的误差都和单元的最小内角的正弦成反比，因而等边三角形单元的形态最好，它与等腰直角三角形单元的误差之比为 $\sin 45° : \sin 60° = 1 : 1.23$，但是为了适应弹性体边界以及单元由小到大逐渐过渡，不可能使所有的三角形单元都接近等边三角形。实际上，