



非线性丛书
动力学

非线性随机动力学的 若干数值方法及应用

Numerical Analysis Methods for
Stochastic Dynamical System

徐 伟 著



科学出版社

013026136

0322
39

国家科学技术学术著作出版基金资助出版
非线性动力学丛书 17

非线性随机动力学的若干 数值方法及应用

Numerical Analysis Methods for Stochastic Dynamical System

徐 伟 著



科学出版社

0322/29



001690810

内 容 简 介

本书详细介绍胞映射方法、路径积分方法、自由网格路径积分和算子分裂方法及其应用,以及正交多项式逼近方法及其在随机结构动力学中的应用等四部分内容。结合作者的研究,主要介绍几种常见的胞映射方法、动力系统的迭代图胞映射方法、随机动力系统全局分岔行为的研究、基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法、随机参激与外激联合作用下非线性动力学系统的路径积分法、谐和激励与随机激励作用下 Duffing-Rayleigh 振子的路径积分法、基于概率密度的 Mathieu-Duffing 振子的混沌分析、自由网格路径积分法、算子分裂法、正交多项式逼近及其应用。本书的特点是以介绍数值方法、逼近方法为主线,以介绍胞映射方法和路径积分方法为重点,突出随机分析和应用分析。

本书可供力学、机械、数学、物理、航空航天、土木工程等专业的高年级本科生、研究生、教师以及工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

非线性随机动力学的若干数值方法及应用/徐伟著. —北京: 科学出版社, 2013

(非线性动力学丛书;17)

ISBN 978-7-03-036966-6

I. ①非… II. ①徐… III. ①非线性力学-动力学-数值方法-研究-英、汉 IV. ①O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 044477 号

责任编辑: 刘信力 / 责任校对: 胡小洁

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏 杰 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 4 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013 年 4 月第一次印刷 印张: 18

字数: 341 000

定价: 79.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《非线性动力学丛书》序

真实的动力系统几乎都含有各种各样的非线性因素, 诸如机械系统中的间隙、干摩擦, 结构系统中的材料弹塑性、构件大变形, 控制系统中的元器件饱和特性、变结构控制策略等. 实践中, 人们经常试图用线性模型来替代实际的非线性系统, 以求方便地获得其动力学行为的某种逼近. 然而, 被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差, 使得线性逼近成为一场徒劳. 特别对于系统的长时间历程动力学问题, 有时即使略去很微弱的非线性因素, 也会在分析和计算中出现本质性的错误.

因此, 人们很早就开始关注非线性系统的动力学问题. 早期研究可追溯到 1673 年 Huygens 对单摆大幅摆动非等时性的观察. 从 19 世纪末起, Poincaré, Lyapunov, Birkhoff, Andronov, Arnold 和 Smale 等数学家和力学家相继对非线性动力系统的理论进行了奠基性研究, Duffing, van der Pol, Lorenz, Ueda 等物理学家和工程师则在实验和数值模拟中获得了许多启发性发现. 他们的杰出贡献相辅相成, 形成了分岔、混沌、分形的理论框架, 使非线性动力学在 20 世纪 70 年代成为一门重要的前沿学科, 并促进了非线性科学的形成和发展.

近 20 年来, 非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展. 这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题, 采用非线性动力学理论和方法, 对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型, 预测其长期的动力学行为, 揭示内在的规律性, 提出改善系统品质的控制策略. 一系列成功的实践使人们认识到: 许多过去无法解决的难题源于系统的非线性, 而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、孤立子等复杂非线性动力学现象具有正确的认识和理解.

近年来, 非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展. 伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步, 非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高. 已逐步接近一些实际系统. 在工程科学界, 以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化. 人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响, 使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求, 而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类.

在这样的背景下, 有必要组织在工程科学、生命科学、社会科学等领域中从事非线性动力学研究的学者撰写一套非线性动力学丛书, 着重介绍近几年来非线性动力学理论和方法在上述领域的一些研究进展, 特别是我国学者的研究成果, 为从事

非线性动力学理论及应用研究的人员,包括硕士研究生和博士研究生等,提供最新的理论、方法及应用范例.在科学出版社的大力支持下,我们组织了这套《非线性动力学丛书》.

本套丛书在选题和内容上有别于郝柏林先生主编的《非线性科学丛书》(上海教育出版社出版),它更加侧重于对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性动力学问题进行建模、理论分析、计算和实验.与国外的同类丛书相比,它更具有整体的出版思想,每分册阐述一个主题,互不重复.丛书的选题主要来自我国学者在国家自然科学基金等资助下取得的研究成果,有些研究成果已被国内外学者广泛引用或应用于工程和社会实践,还有一些选题取自作者多年的教学成果.

希望作者、读者、丛书编委会和科学出版社共同努力,使这套丛书取得成功.

胡海岩

2001年8月

前 言

继牛顿力学和量子力学之后发展的非线性科学,正改变着人们对世界的看法,使之形成一种新的自然观,促进了一大类新兴科学的孕育和发展,从根本上影响着现代科学的逻辑体系.非线性科学是一门跨学科的综合性基础学科,旨在揭示非线性系统的共同性质、基本特征和运动规律,以达到认识和利用规律的最终目的.非线性动力学分析可分为确定性分析和随机分析.相对而言,随机动力学的研究方兴未艾,处于发展阶段,其研究主要分为理论研究和数值方法研究.由于理论研究存在的困难,能够得到的理论精确解很少,数值方法的研究变得非常重要,在一些领域处于主导地位.有鉴于此,结合我们团队的多年研究,撰写了本书,为刚进入这一领域的读者起到抛砖引玉的作用.

非线性系统的动力学特性分析可分为局部分分析和全局分析.局部分分析通常关注的是周期解和解的稳定性以及参数变化对解的影响;全局分析主要关注各个吸引子及其吸引域的空间位置,不稳定解的稳定与不稳定流形,以及参数变化对相空间全局结构的影响.由于全局分析能够使人们获得非线性系统的更多信息,所以对系统进行全局分析是一项非常重要的工作.非线性系统的全局分析方法可以分为解析方法和数值方法.解析方法中较为著名的是 Melnikov 方法,该方法通过度量系统稳定流形与不稳定流形之间的距离,并经过一阶近似简化后成为 Melnikov 函数,然后判断它是否存在简单零点,如果存在则表明系统的稳定流形和不稳定流形横截相交而形成 Smale 马蹄,从而导致混沌的出现.由于适用于该方法的系统需要满足一定的条件,如未受扰动的平面可积系统存在双曲鞍点和连接鞍点的同宿轨道或异宿环,所以它只适用于部分非线性系统.此外,由于非线性问题的“个性”很强,目前尚没有统一的求解方法,所以在对系统进行全局分析的研究工具中,数值方法一直占有重要的地位,它是人们进行全局分析的有效选择,是工程和科学领域许多学者的研究内容和主题.利用数值方法研究动力系统的全局特性,人们首先想到的可能是直接数值模拟法.例如,若要确定相空间中系统的吸引子,可以从某一初始点出发数值积分,当充分长时间后系统的最终运动行为就确定了吸引子的位置,而所有可以到达该吸引子的初始点的集合就构成了该吸引子的吸引域.尽管这种方法直观明了,然而实施时却要耗费很长的时间,特别是当系统存在多个吸引子及其吸引域时,为了不漏掉每个吸引子,需要在相空间内选取大量的初始点,当每个初始点出发的轨线演化充分长时间后再来确定吸引子的位置和个数,然后对所有初始点进行分类确定出吸引域.显然,通过直接数值模拟法对系统进行全局分析需要更长的时

间,常使人们无法忍受.因此,设计一些高效的数值方法对系统进行全局分析是十分必要的.胞映射方法最初就是基于上述目的而产生的一种有效的全局分析方法.本书的第一篇介绍胞映射方法.

对于随机非线性动力学而言,受高斯白噪声激励的线性或非线性动力学系统,由于噪声的无界性影响,理论上讲具有遍历性结构.对于理论分析而言,全局分析与局部分析是一样的.但考虑到这种无界性发生的概率极小,在实际系统中是不存在的,特别是进行数值分析时,无法实现这种无界性.因而,除去一个极小的概率,对于数值分析而言,类似于确定性系统的研究,讨论高斯白噪声激励的随机系统的全局分析与局部分析是有意义的.对于有界噪声激励的线性或非线性动力学系统,由于本身的非遍历性,讨论全局分析与局部分析是毋庸置疑的.本书第一篇随机动力学的讨论主要基于这一观点.

受高斯白噪声激励的线性或非线性动力学系统的响应可用 Markov 过程描述,而响应过程的转移概率密度则由 FPK 方程所确定.如何求解 FPK 方程是研究 FPK 方程的一个中心课题.迄今为止,只有少数特殊的 FPK 方程能得到其精确平稳解.对高维非线性系统,要获得其 FPK 方程的精确解更为困难.而常用的近似解法主要有随机平均法、正交函数展开等.这些近似方法有一定的局限性,一般只能得到近似平稳概率密度,对本质非线性并不是完全适用的.因此如何构造高效的求解 FPK 方程的数值方法备受关注,尤其是那些适用于分析非线性随机动力学系统的数值方法.借助数值方法不仅可获得响应的平稳概率密度,还可以捕捉到瞬态概率密度.进一步,可利用概率密度研究非线性系统的统计响应、极值分布、首次穿越以及可靠性等问题.目前各种数值解法已经广泛应用于求解 FPK 方程,如有限元法、有限差分法、路径积分、变分法、伽辽金法等.路径积分法其表示方式最早由 Feynman 提出的. Feynman 将量子力学中跃迁概率幅表示为状态空间中两点间所有可能的路径的积分,从而得到关于量子力学问题的一种新的泛函积分表述.后来,路径积分法又被应用到统计物理、量子场论等许多重要领域,并起着越来越重要的作用.本书的第二篇和第三篇介绍相关内容.

20 世纪 80 年代末至 90 年代初,一类基于正交多项式展开的思想开始被应用到随机系统分析中来.针对具有随机系数的微分方程求解问题,提出了对随机响应取 Hermite 正交多项式逼近的方法.正交多项式展开理论是根据随机函数空间的 Fourier 系数展开发展起来的,利用谱展开和混沌多项式展开来分析动力系统.受此启发,人们开始关注用正交多项式的级数逼近来研究随机系统的响应.在本书的第四篇介绍把正交多项式逼近应用到具有随机参数的非线性系统中,提出与之等价的非线性确定性系统的概念,并且借助于数值方法,针对这一等价的确定性非线性系统,对鞍结分岔、对称破裂分岔、倍周期分岔乃至混沌等进行研究.

本书主要分为四篇:第一篇介绍胞映射方法及其应用,主要内容有几种胞映射

方法的简单介绍, 动力系统的迭代图胞映射方法, 随机动力系统全局分岔行为的研究; 第二篇介绍路径积分方法及其应用, 主要内容有基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法, 随机参激与外激联合作用下非线性动力学系统的路径积分解, 谐和激励与随机激励作用下 Duffing-Rayleigh 振子的路径积分解, 基于概率密度的 Mathieu-Duffing 振子的混沌分析; 第三篇介绍自由网格路径积分法和算子分裂方法及其应用, 主要内容有自由网格路径积分法、算子分裂法; 第四篇介绍正交多项式逼近方法在随机结构动力学中的分析. 本书的特点是以介绍数值方法、逼近方法为主线, 以介绍胞映射方法和路径积分方法为重点, 突出全局分析和应用分析.

参加本书工作的还有贺群、岳晓乐、谢文贤、张莹和马少娟, 本书的研究内容得到了国家自然科学基金 (基金编号: 10472091, 10872165, 11172233) 的支持, 在此一并表示诚挚的感谢. 本书可供力学、机械、数学、物理、航空航天、土木工程等专业的高年级本科生、研究生、教师以及工程技术人员使用.

作 者

2013 年 2 月 7 日 西北工业大学

目 录

第一篇 胞映射方法

第 1 章 胞映射方法简介	3
1.1 引言	3
1.2 胞映射方法的发展及概况	4
1.3 基础知识以及相关文献	10
1.3.1 分岔基础知识以及相关文献	10
1.3.2 图论基础知识以及相关文献	11
第 2 章 几种胞映射方法的简单介绍	12
2.1 简单胞映射方法	12
2.1.1 胞状态空间	12
2.1.2 基本概念	13
2.1.3 算法实现	14
2.1.4 算例分析	15
2.2 广义胞映射	16
2.2.1 基本概念	17
2.2.2 算法过程	18
2.2.3 算例分析	19
2.3 基于偏序集和有向图的广义胞映射	20
2.3.1 基本概念	20
2.3.2 广义胞映射和有向图	21
2.3.3 算法实现	21
2.3.4 算例分析	22
2.4 插值胞映射方法	23
第 3 章 动力系统的迭代图胞映射方法	25
3.1 引言	25
3.2 图胞映射的一种改进方法 —— 逼近动力系统稳定与不稳定流形	25
3.2.1 相关概念的引入	25
3.2.2 驻足和路由的算法	28
3.2.3 计算实例	29

3.3 迭代图胞映射方法	31
3.3.1 基本胞化空间方法	32
3.3.2 复合胞化空间方法	33
3.3.3 算例分析	35
3.3.4 基于复合胞化空间的迭代图胞映射法	37
3.3.5 典型算例	38
第 4 章 随机动力系统分岔行为的研究	42
4.1 引言	42
4.2 随机系统的分岔	42
4.3 Duffing 方程的随机分岔	43
4.4 硬 Helmholtz-Duffing 振子随机分岔现象的全局分析	49
4.5 有界噪声激励下非对称单势井 Duffing 振子的随机分岔分析	52
4.5.1 有界噪声	52
4.5.2 确定性非对称 Duffing 振子的全局特性	54
4.5.3 有界噪声激励下非对称 Duffing 振子的随机分岔	55
4.6 有界噪声激励下一类 Duffing 振子的安全盆侵蚀	60
参考文献	67

第二篇 路径积分法

第 5 章 基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法	79
5.1 引言	79
5.1.1 FPK 方程	79
5.1.2 FPK 方程的数值解法	79
5.1.3 路径积分法在非线性随机动力学系统研究中的应用	81
5.2 路径积分法的原理	82
5.3 基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法	83
5.4 基于 Gauss-Legendre 公式求解时间上平均的概率密度的路径积分法	85
5.5 几类路径积分方法简介	86
5.5.1 Wehner 和 Wolfer 的数值路径积分法	86
5.5.2 Naess 的数值路径积分法	88
5.5.3 Narayanan 和 Kumar 的基于 Gauss-Legendre 公式的数值路径积分	89
5.5.4 di Paolo 和 Santoro 的 Poisson 白噪声激励的数值路径积分	90
5.5.5 金融期权定价的路径积分分解	90

第 6 章 随机参激与外激联合作用下非线性动力学系统的路径积分分解 ·····	93
6.1 基本内容·····	93
6.2 随机参激与外激联合作用下的非线性振子·····	93
6.3 数值结果与分析·····	96
6.3.1 情形 1·····	96
6.3.2 情形 2·····	98
6.3.3 情形 3·····	98
第 7 章 谐和激励与随机激励作用下 Duffing-Rayleigh 振子的路径积分分解 ·····	102
7.1 基本内容·····	102
7.2 谐和激励与随机激励作用下 Duffing-Rayleigh 振子·····	103
7.3 路径积分分解·····	104
7.3.1 情形 1·····	105
7.3.2 情形 2·····	108
7.3.3 情形 3·····	111
第 8 章 基于概率密度的 Mathieu-Duffing 振子的混沌分析 ·····	114
8.1 基本内容·····	114
8.2 FPK 方程与路径积分法·····	115
8.3 Mathieu-Duffing 振子的混沌运动与概率密度·····	116
8.3.1 Mathieu-Duffing 振子的确定性混沌运动·····	116
8.3.2 高斯白噪声激励对 Mathieu-Duffing 振子混沌运动的影响·····	117
8.3.3 系统在混沌运动参数条件下的稳态概率密度·····	119
8.3.4 借助概率密度研究系统的混沌吸引子结构·····	119
参考文献 ·····	123

第三篇 自由网格路径积分法与算子分裂法

第 9 章 自由网格路径积分法 ·····	129
9.1 MPI 法的原理·····	129
9.2 基于自适应最小二乘的分片线性重构·····	130
9.3 基于径向基函数的三维重构·····	132
9.3.1 基于多二次样条的重构·····	132
9.3.2 基于 Gauss 基函数的神经网络重构·····	133
9.4 MPI 法的数值算例·····	134
9.4.1 谐和激励与 Gauss 白噪声激励的 Duffing 振子·····	134

9.4.2 谐和激励与 Gauss 白噪声激励的 Duffing-Rayleigh 振子	136
9.4.3 Gauss 白噪声激励的 Chen 系统	138
第 10 章 算子分裂法	140
10.1 算子分裂法与非标准差分法的相关理论	141
10.1.1 算子分裂法的理论	141
10.1.2 非标准有限差分法	143
10.2 分裂算子的构成	144
10.2.1 隐式分裂算子类型 I	145
10.2.2 隐式分裂算子类型 II	148
10.2.3 隐式分裂算子类型 III	152
10.3 基于非标准差分的算子分裂法的数值应用	156
10.3.1 Gauss 色噪声激励的 Duffing 振子	156
10.3.2 Gauss 白噪声激励的 Chen 系统	160
参考文献	164

第四篇 正交多项式逼近法

第 11 章 非线性参数随机动力系统的正交展开逼近理论	171
11.1 引言	171
11.2 非线性连续随机动力系统的正交展开逼近	171
11.2.1 连续的权函数和正交多项式	171
11.2.2 连续随机函数的正交展开	172
11.2.3 连续非线性确定性等价系统	175
11.3 非线性离散随机动力系统的正交展开逼近	177
11.3.1 离散的权函数及正交多项式	177
11.3.2 离散随机函数的正交展开	178
11.3.3 离散非线性确定性等价系统	179
11.4 常见的随机变量及对应正交多项式	181
11.4.1 连续随机变量与正交多项式	181
11.4.2 离散随机变量与正交多项式	182
11.5 例子	182
11.5.1 连续随机 Brusselator 模型	182
11.5.2 离散随机 Logistic 模型	183
第 12 章 非线性参数随机动力系统零解的稳定性分析	186
12.1 引言	186

12.2	非线性连续参数随机动力系统的零解稳定性	186
12.3	非线性离散随机动力系统的零解稳定性	188
12.4	随机 Brusselator 模型零解的渐进稳定性	189
12.5	随机 Logistic 模型零解的渐进稳定性	197
第 13 章	非线性参数随机动力系统的动力学行为研究	205
13.1	引言	205
13.2	非线性连续随机动力系统的倍周期分岔	206
13.2.1	随机生物模型	206
13.2.2	随机强度为分岔参数的倍周期分岔	209
13.3	非线性连续随机动力系统的 Hopf 分岔	210
13.3.1	参数随机动力系统 Hopf 分岔的存在性	211
13.3.2	参数随机动力系统 Hopf 分岔的理论分析方法	216
13.3.3	随机 Brusselator 模型 Hopf 分岔的数值分析	221
第 14 章	非线性参数随机动力系统的分岔控制研究	230
14.1	引言	230
14.2	产生非线性参数随机动力系统的 Hopf 分岔	231
14.2.1	产生确定性动力系统的 Hopf 分岔	231
14.2.2	产生参数随机动力系统的 Hopf 分岔	233
14.3	非线性参数随机动力系统的 Hopf 分岔控制	235
14.3.1	控制 Hopf 分岔的发生	236
14.3.2	极限环幅值的控制	238
14.4	非线性参数随机动力系统 Hopf 分岔的随机反馈控制	239
14.5	非线性参数随机动力系统 Hopf 分岔随机性的控制	244
第 15 章	非线性参数随机动力系统的混沌控制研究	249
15.1	引言	249
15.2	非反馈控制	250
15.2.1	常数控制	251
15.2.2	弱谐和激励控制	252
15.3	反馈控制	255
15.4	随机反馈控制	257
参考文献		261
索引		270

第一篇 胞映射方法

贺 群 岳晓乐 徐 伟

第 1 章 胞映射方法简介

1.1 引言

继牛顿力学和量子力学之后发展的非线性科学,正改变着人们对世界的看法,使之形成一种新的自然观,促进了一大类新兴科学的孕育和发展,并从根本上影响着现代科学的逻辑体系.非线性科学是一门跨学科的综合性基础学科,旨在揭示非线性系统的共同性质、基本特征和运动规律,以达到认识和利用规律的最终目的.非线性系统的动力学特性分析^[1-7]可分为局部分分析和全局分析.局部分分析通常关注的是周期解和解的稳定性以及参数变化对解的影响;全局分析主要关注各个吸引子及其吸引域的空间位置,不稳定解的稳定与不稳定流形,以及参数变化对相空间全局结构的影响.由于全局分析能够使人们获得非线性系统的更多信息,因此对系统进行全局分析是一项非常重要的工作.

非线性系统的全局分析方法可以分为解析方法和数值方法.解析方法中较为著名的是 Melnikov 方法^[1,8,9],该方法通过度量系统稳定流形与不稳定流形之间的距离,并经过一阶近似简化后成为 Melnikov 函数,然后判断它是否存在简单零点.如果存在则表明系统的稳定流形和 unstable 流形横截相交而形成 Smale 马蹄^[10],从而导致混沌的出现.由于适用于该方法的系统需要满足一定的条件,如未受扰动的平面可积系统存在双曲鞍点和连接鞍点的同宿轨道或异宿环,所以,它只适用于部分非线性系统.此外,由于非线性问题的“个性”很强,目前尚没有统一的求解方法,因此在对系统进行全局分析的研究工具中,数值方法一直占有重要的地位,它是人们进行全局分析的有效选择,是工程和科学领域中许多学者的研究内容和主题.

利用数值方法研究动力系统的全局特性,人们首先想到的可能是直接数值模拟法^[11].例如,若要确定相空间中系统的吸引子,可以从某一初始点出发进行数值积分,在充分长时间后系统的最终运动行为就确定了吸引子的位置,而所有可以到达该吸引子的初始点的集合就构成了该吸引子的吸引域.尽管这种方法直观明了,但是实施却要耗费很长的时间,特别是当系统存在多个吸引子及其吸引域时,为了不漏掉每个吸引子,需要在相空间内选取大量的初始点,当每个初始点出发的轨线演化充分长时间后再来确定吸引子的位置和个数,然后对所有初始点进行分类确定出吸引域.显然,通过直接数值模拟法对系统进行全局分析需要更长的时间,常使人们无法忍受.因此,设计一些高效的数值方法对系统进行全局分析是十分必要的.胞映射方法最初就是基于上述目的而产生的一种有效的全局分析方法.

1.2 胞映射方法的发展及概况

胞映射方法最先由 Hsu^[12] 在 20 世纪 80 年代初提出. 方法一经出现, 便以其所具有的快速、准确和适用范围广等特点被众多研究者所关注, 成为研究的热点. 它的基本思想^[13-15] 是将动力系统状态空间离散化为许多小的几何体 (胞), 全部胞构成的集合形成胞空间; 在将动力系统状态空间转化为胞空间后, 动力系统中状态的转移就自然地对应成为胞之间的转移; 可以通过对胞之间转移关系的研究完成对原动力系统的相应研究. 这就是胞映射方法.

相比于直接数值模拟法, 胞映射方法以胞作为研究单元, 根据动力系统的转移关系形成胞之间的转移关系 (胞映射动力系统); 对胞映射动力系统进行研究后, 得到胞空间的分类; 进而对分类结果进行动力学解释, 完成对动力系统的相关研究. 胞映射方法不是孤立地研究动力系统中每条轨线的演化, 而是从整体上关注各状态胞之间的信息传递, 避免了直接数值模拟法简单孤立地对待所处理的信息, 从而极大地提高了效率. 此外, 通过对状态胞之间转移信息的深入分析, 可以获得直接数值模拟法较难得到的某些动力学行为 (如图胞映射方法分析中得到的不稳定解或鞍^[16,17]). 而且, 基于胞的概念, 还可以对直接数值模拟法进行改进, 得到更为高效的点映射方法^[18-20].

其实, 先于 Hsu 提出的胞映射方法, 已有类似方法在相应的文献中出现过, 如《非线性动力学系统的数值研究》^[21] 一书中所指出的:

“将状态空间 (或称相空间) 离散化的思想, 在 Kolmogorov(1959) 和 Sinai (1959) 的著作中就可以找到. 他们把状态空间加以分割, 以便克服确定测度熵时遇到的困难. Shaw (1981) 也应用胞作为离散化来说明物理系统中的信息论观点.”

与先前研究者不同, Hsu 是首先全面、系统地研究胞映射方法^[12], 并将其应用于各种确定性、随机非线性动力系统的动力学行为与控制研究中的学者. 随后, 受此启发, 多国学者基于胞思想发展出各种胞映射方法, 在杂志和会议上发表了大量有关论文, 并在科学与工程实际领域中取得了丰富的成果^[12-128].

简单胞映射 (SCM)^[12] 方法由 Hsu 在 1980 年首次提出. 该方法的基本思想是将连续状态空间离散化为许多小的几何体 (胞), 状态空间离散化为大量胞的集合, 胞的集合构成胞状态空间并且被整序数所标识. 对每一个胞的中心点进行短时积分 (映射), 则可以建立该胞与积分结果所达的胞映射关系, 从而就构造出一个基于胞空间上的映射, 即胞映射动力系统. 对简单胞映射动力系统进行分析, 可求得运动方程的周期解及稳态解的吸引域. 事实上, 前面提到的直接数值模拟法也可以看成为某种程度的简单胞映射, 因为对于实际中的一个点来说, 由于有限截断和噪声等因素的影响, 计算机无法将该点精确地表示出来, 而计算机表示出来的只是在该