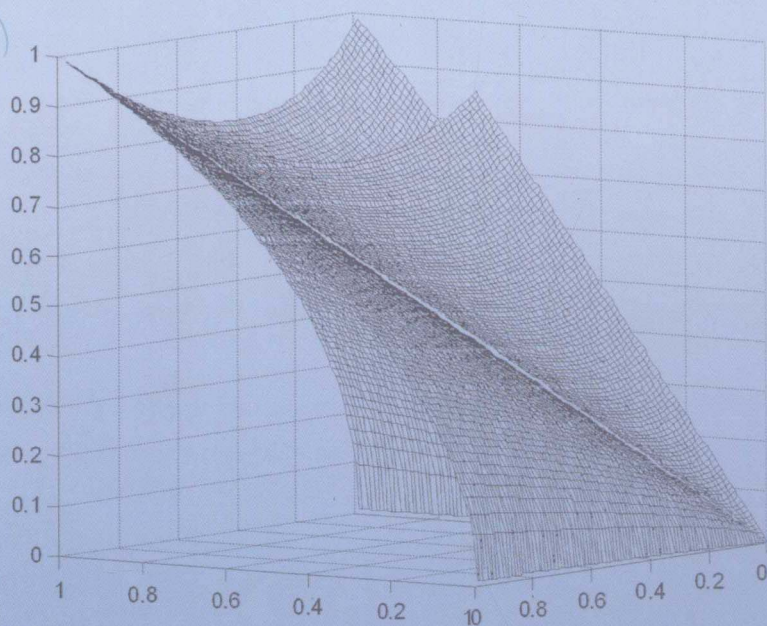


平均值的高斯特征 与比较研究

李大矛 著



平均值的高斯特征与比较研究

李大矛 著

吉林大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

平均值的高斯特征与比较研究 / 李大矛著. — 长春:
吉林大学出版社, 2012.8

ISBN 978-7-5601-8788-4

I. ①平… II. ①李… III. ①平均值—计算方法
—研究 IV. ①024

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 206307 号

书 名: 平均值的高斯特征与比较研究

作 者: 李大矛 著

责任编辑\责任校对: 张文涛

吉林大学出版社出版、发行

开本: 787×1092 毫米: 1/16

印张: 9

字数: 200 千字

ISBN 978-7-5601-8788-4

封面设计: 潘 伟

长春市新世纪印业有限公司 印刷

2012 年 8 月第 1 版

2012 年 8 月第 1 次印刷

定价: 29.00 元

版权所有 翻印必究

社址: 长春市明德路 501 号

发行部电话: 0431-89580026/28/29

网址: <http://www.jlup.com.cn>

E-mail: jlup@mail.jlu.edu.cn

邮编: 130021

内 容 提 要

平均值的比较问题是一个有 2600 年历史的古老数学问题。

公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派发现了平均的概念。公元前 3 世纪，欧几里得证明了算术—几何平均不等式。从此，揭开了平均比较问题的研究序幕。时至今日，平均已发展成为一个庞大的函数家族，比较问题也越来越复杂。

本书简单回顾了平均发展的历史，对平均的定义、平均的结构作了深入地剖析，对常用的平均定义、名称、符号及比较问题等进行了梳理，对常用平均的性质作了一些基础性研究。

通过对高斯乘积平均椭圆积分表达式，以及对 Haruki、To. 算术平均的总结，提取了平均值的高斯特征理论，给出了平均

在将平均值特征理论应用于平均比较问题时获得了一些重要结果，在此一并呈献给读者。

目录

第1章 平均的定义

1.1 平均的起源	1
1.1.1 毕达哥拉斯平均	1
1.1.2 欧多克斯平均	2
1.1.3 泰蒙诺迪斯—欧弗拉诺平均	2
1.1.4 希腊古典平均	2
1.2 希腊平均的性质	3
1.2.1 二元正值唯一性性质	3
1.2.2 介值性性质	3
1.2.3 反身性性质	3
1.2.4 一阶齐次性性质	3
1.2.5 对称性性质	4
1.3 平均的公理化定义	4
1.4 平均的偏导性质	5
1.4.1 一阶偏导特性	5
1.4.2 二阶偏导特性	6
1.5 基本初等平均	7
1.6 初等参数平均	9

第2章 平均的结构

2.1 算术加权结构	12
2.2 几何加权结构	13
2.3 差商结构	13
2.4 SB 复合结构	15
2.5 p -幂拟结构	17
2.6 自幂商结构	17

2 | 平均值的高斯特征与比较研究

2.7	积分生成结构	20
2.8	加权组合结构	21
2.9	对偶结构	21
2.10	平均复合结构	22
2.11	高斯乘积结构	23
2.12	阿基米德乘积结构	24

第3章 平均的比较

3.1	常用平均	26
3.2	数值平均比较	26
3.3	多参数平均比较	27
3.4	和族平均比较	28
3.5	差族平均比较	29

第4章 平均的偏导

4.1	数值平均二阶偏导	33
4.2	参数平均二阶偏导	40
4.3	幂拟参数平均二阶偏导	43
4.4	多参数平均二阶偏导	54
4.4.1	常用多参数平均	54
4.4.2	常用多参数平均二阶偏导	55

第5章 平均的测量（一）

5.1	测量坐标定义	58
5.2	Holder 平均测量	59
5.3	Lehmer 平均测量	60
5.4	Lehmer+平均测量	61
5.5	Gini 单参数平均测量	62
5.6	Gini+单参数平均测量	62
5.7	Stolarsky 平均测量	63
5.8	Alzer 平均测量	64
5.9	Gini 双参数平均测量	65

5.10	Stolarsky 双参数平均测量	65
5.11	3 参数 Witkowski 平均测量	66
5.12	最佳插值不等式	66

第 6 章 平均的测量 (二)

6.1	测量坐标定义	67
6.2	$A_\alpha(H, C)$ 测量	67
6.3	$A_\alpha(H, B)$ 测量	68
6.4	$A_\alpha(H, M_2)$ 测量	68
6.5	$A_\alpha(H, g)$ 测量	69
6.6	$A_\alpha(H, A)$ 测量	69
6.7	$A_\alpha(H, I)$ 测量	69
6.8	$A_\alpha(G, C)$ 测量	70
6.9	$A_\alpha(G, B)$ 测量	70
6.10	$A_\alpha(G, M_2)$ 测量	70
6.11	$A_\alpha(G, g)$ 测量	71
6.12	$A_\alpha(G, A)$ 测量	71
6.13	$A_\alpha(G, I)$ 测量	72
6.14	$A_\alpha(M_{1/2}, C)$ 测量	72
6.15	$A_\alpha(M_{1/2}, B)$ 测量	72
6.16	$A_\alpha(M_{1/2}, M_2)$ 测量	73
6.17	$A_\alpha(M_{1/2}, g)$ 测量	73
6.18	$A_\alpha(M_{1/2}, A)$ 测量	73
6.19	$A_\alpha(M_{1/2}, I)$ 测量	74
6.20	$A_\alpha(L, C)$ 测量	74
6.21	$A_\alpha(L, B)$ 测量	75
6.22	$A_\alpha(L, M_2)$ 测量	75
6.23	$A_\alpha(L, g)$ 测量	75
6.24	$A_\alpha(L, A)$ 测量	76
6.25	$A_\alpha(L, I)$ 测量	76
6.26	$A_\alpha(I, C)$ 测量	76
6.27	$A_\alpha(I, B)$ 测量	77

4 | 平均值的高斯特征与比较研究

6.28	$A_{\alpha}(I, M_2)$ 测量	77
6.29	$A_{\alpha}(I, g)$ 测量	77
6.30	$A_{\alpha}(I, A)$ 测量	78
6.31	$A_{\alpha}(A, C)$ 测量	78
6.32	$A_{\alpha}(A, B)$ 测量	78
6.33	$A_{\alpha}(A, M_2)$ 测量	79
6.34	$A_{\alpha}(A, g)$ 测量	79

第 7 章 乘积平均及高斯特征

7.1	乘积平均运算律	80
7.2	乘积平均表达式	81
7.3	乘积平均表达式计算	82
7.4	数值型乘积平均表达式	85
7.5	参数型乘积平均表达式	92
7.6	乘积平均的高斯特征	93

第 8 章 平均及高斯特征

8.1	Toader 平均	97
8.2	常用平均与 Toader 平均	98
8.3	平均的 Toader 表示算法	98
8.4	数值平均的 Toader 表示	99
8.5	参数平均 Toader 表示	100
8.6	平均的高斯特征	102
8.7	高斯特征数运算规则	103

第 9 章 平均的特征类

9.1	数值平均分类	106
9.2	乘积平均分类	107
9.3	参数平均分类	107
9.4	异类平均比较定理	108
9.5	同类平均比较定理	109
附录 1		110

附录 2	111
附录 3	113
附录 4	115
附录 5	116
附录 6	117
附录 7	118
附录 8	119
附录 9	121
附录 10	122

参考文献

平均是生活中无所不在的概念.几乎所有人都知道将若干可比较的事物放在一起再除以它们的个数,就得到它们的算术平均.对于两个正数 a, b , $A = \frac{a+b}{2}$ 是它们的算术平均, $G = \sqrt{ab}$ 是它们的几何平均.但什么是平均?要说清楚就不容易了.事实上,平均的发现者自己也没给出过平均的定义.专门的研究者也只是按照自己的需要给出平均的定义.于是,在一门严格的数学科学中就存在了一个说起来都知道,问起来说不清的概念——平均.

在这一章,我们就通过回顾历史,追溯本源,给出符合发现者本意,符合历史演变过程的平均的定义.

1.1 平均的起源

关于平均产生的历史保存下来的记载非常少,以至于像《古今数学思想》这样的数学史名著中也仅有十几个字关于平均起源的论述.对此,罗马尼亚的数学家有专门的考证研究,本章介绍的主要内容就取自他们的一些成果.

1.1.1 毕达哥拉斯平均

一般认为,古希腊的毕达哥拉斯学派 (Pythagoras school 585—497 BC) 首先发现了平均的概念.他们在按照比例

$$\frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{a}, \frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{m} = \frac{m}{b} \text{ 和 } \frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{b}$$

选取两个正数 a, b ($a > b > 0$) 间的中间数 m ($a > m > b$) 时,发现算术平均 $A = \frac{a+b}{2}$ 、几何平均 $G = \sqrt{ab}$ 和调和平均 $H = \frac{2ab}{a+b}$. A, G, H 称为毕达哥拉斯平均.

1.1.2 欧多克斯平均

在毕达哥拉斯学派之后,古希腊数学家欧多克斯(Eudoxus 408—355 BC)按照比例

$$\frac{a-m}{m-b} = \frac{b}{a}, \frac{a-m}{m-b} = \frac{b}{m} \text{ 和 } \frac{a-m}{m-b} = \frac{m}{a}$$

选取两个正数 a, b ($a > b > 0$) 间的中间数 m ($a > m > b$) 时,发现了反调和平均 $C = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$, 第一反几何平均 $F_5 = \frac{a - b + \sqrt{(a-b)^2 + 4b^2}}{2}$ 和第二反几何平均 $F_6 = \frac{b - a + \sqrt{(a-b)^2 + 4a^2}}{2}$. 因此, C 、 F_5 、 F_6 称为欧多克斯平均.

J. M. Borwein 和 P. B. Borwein 将毕达哥拉斯平均记为 $F_1 \sim F_3$, 欧多克斯平均记为 $F_4 \sim F_6$.

1.1.3 泰蒙诺迪斯—欧弗拉诺平均

在欧多克斯之后,古希腊数学家泰蒙诺迪斯(Temnoides)和欧弗拉诺(Euphranor)按照比例

$$\frac{a-m}{a-b} = \frac{b}{a}, \frac{a-m}{a-b} = \frac{m}{a}, \frac{a-b}{m-b} = \frac{a}{b} \text{ 和 } \frac{a-b}{m-b} = \frac{m}{b}$$

选取两个正数 a, b ($a > b > 0$) 的中间数 m ($a > m > b$) 时,发现了另外 4 个未命名的平均 $F_7 = \frac{a^2 - ab + b^2}{a}$, $F_8 = \frac{a^2}{2a - b}$, $F_9 = \frac{b(2a - b)}{a}$, $F_{10} = \frac{b + \sqrt{b(4a - 3b)}}{2}$. $F_7 \sim F_{10}$ 称为泰蒙诺迪斯—欧弗拉诺平均.

1.1.4 希腊古典平均

今天人们根据发现的年代,称 $F_1 \sim F_{10}$ 为希腊平均,特别地,称其中的 $F_1 \sim F_4$ 为古典平均,并用 A 、 G 、 H 、 C 的符号标记它们. 必须指出的是,很少有人提到或知道 $F_5 \sim F_{10}$.

除了产生希腊平均的 10 个比例以外,在 a, b, m 之间还存在各种各样的比例,但古希腊数学家认为,只有这 10 个比例是“优美”“和谐”的.

关于平均,古希腊数学家只给出了上述 10 个具体的事例而没有给出一般的定义,使得后来的学者只能根据自己的理解去研究他们,造成了平均的比较

成为一个历经 2600 多年而不能解决的数学问题。

1.2 希腊平均的性质

要给出平均的准确的一致的无争议的定义,就必须回到历史,弄清创建者的本意和历史演变的过程,弄清希腊平均的性质和特征。

1.2.1 二元正值唯一性性质

首先,所有希腊平均都是按照确定的比例规则,在任意两个正数间唯一选取的,这个特点与今天我们熟悉的二元正值函数的概念完全一致.因此,平均可以被无争议的认定为一类定义于 R_+^2 上的正值实值函数: $M: R_+^2 \rightarrow R_+$ 。

1.2.2 介值性性质

对 $\forall a, b \in R_+, a \neq b, a < F_k < b$ ($k=1, 2, 3, \dots, 10$)。这种严格的中间介值性质是平均最基本的性质,也是争议较大的性质,在今天的文献中,几乎所有的平均 $M(a, b)$ 都是按照不严格的中间介值性 $a \leq M \leq b$ 定义的.开到闭的这一点改动,常导致双平均复合序列的不收敛性.混淆了平均介值性和平均反身性的根本区别。

1.2.3 反身性性质

对 $\forall c \in (a, b), F_k(c, c) = c$ ($k=1, 2, 3, \dots, 10$)。这个性质是平均从二元函数大家庭中分离出来成为一个独立函数家族的主要原因。

如果我们将平均写成二元函数的形式 $z = f(x, y)$, 则反身性是说, 直线 $x = y = z$ 在平均所代表的曲面上.或者说, 平均代表的曲面必通过直线 $x = y = z$ 。而 $x = y = z$ 是 3 维欧氏空间以原点为起点的第一卦限对角线.平均的这个性质, 意味着它们是一簇以直线 $x = y = z$ 为公共轴的同轴曲面.理解了这一点, 就不会犯平均介值性的“开”可以变为“闭”的错误。

1.2.4 一阶齐次性性质

对 $\forall c > 0, F_k(ca, cb) = cF_k(a, b)$ ($k=1, 2, 3, \dots, 10$)。仍然将平均写成二元函数 $z = f(x, y)$ 形式时, 则一阶齐次性 $f(kx, ky) = kf(x, y) = kz$ 表示, 点 (x, y, z) 在曲面 $z = f(x, y)$ 上时, (kx, ky, kz) 也在曲面 $z = f(x, y)$ 上.这就是说, 当点 (x, y, z) 在曲面 $z = f(x, y)$ 上时, 原点到 (kx, ky, kz) 连成的直线也在曲面 $z = f(x, y)$ 上。

这意味着满足一阶齐次性的曲面 $z = f(x, y)$ 是一个顶点在原点的锥面. 原点到面上各点的连线构成锥面的母线. 高斯在证明著名 AG 平均椭圆积分表达式时, 正是充分利用了平均的这个性质.

1.2.5 对称性性质

对 $\forall a, b \in R_+, a \neq b, F_k(a, b) = F_k(b, a)$ ($k=1, 2, 3, 4$). 这意味着平面 $x=y$ 是所有古典平均曲面的对称平面. 自然地, 直线 $x=y=z$ 成为所有古典平均曲面的对称轴. 进一步地, 算术平均是所有古典平均对称轴上的共切平面. 希腊平均中的 $F_5 \sim F_{10}$ 由于不满足对称性性质, 在历史发展中被无情地扫出了平均家族. 这就是今天很少有人知道它们的原因.

仅举一例说明对称性对于平均的重要性.

定理 1.2.5.1 对 $0 < \lambda < 1, \lambda \neq \frac{1}{2}$, $m_\lambda = \lambda a + (1-\lambda)b$ 与算术平均 $m_{1/2} = A = \frac{a+b}{2}$ 是不可比较的.

证明 对 $0 < \lambda < 1, \lambda \neq \frac{1}{2}$, 不妨设 $a < b$.

因为, $m_\lambda - A = \lambda a + (1-\lambda)b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(a-b)$,

所以, 当 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ 时, $m_\lambda - A > 0$; 当 $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ 时, $m_\lambda - A < 0$.

可见, 保留平均的对称性符合希腊平均摒弃后 6 个平均后向古典平均演变的历史进程.

1.3 平均的公理化定义

综合前面的讨论, 我们给出平均的公理化定义.

定义 1.3.1 对 $\forall a, b, c > 0, a \neq b$, 称满足如下公理的连续可微函数 $M: R_+^2 \rightarrow R_+$ 为二元平均, 简称平均.

价值性公理: $a < M(a, b) < b$

反身性公理: $M(a, a) = a$

对称性公理: $M(a, b) = M(b, a)$

一阶齐次性公理: $M(ca, cb) = cM(a, b)$

特别地, 记由 M 的全体构成的集合为 $\mathcal{M}$.

事实上,平均还具有单调性、连续性、可导性、可微性、高阶可导性,等等. 这些性质不列在公理化定义中,仅作为平均的一般性质.

1.4 平均的偏导性质

平均不仅是连续的,而且是可导的. 在这里我们给出平均偏导的一些重要性质.

1.4.1 一阶偏导特性

定理 1.4.1.1 对任意平均 M , 都有 $M_a(a, b) = M_b(b, a)$.

证明 因为 $M_a(a, b) = \frac{M(a+t, b) - M(a, b)}{t} + O(t) = \frac{M(b, a+t) - M(b, a)}{t} + O(t)$

所以, $M_a(a, b) = M_b(b, a)$.

特别地, 令 $a \rightarrow c, b \rightarrow c$, 有 $M_a(c, c) = M_b(c, c)$.

定理 1.4.1.2 对任意平均 M , 都有 $M_a(c, c) = M_b(c, c) = \frac{1}{2}$.

证明 由泰勒公式, $M(a+t, b+t) = M(a, b) + [M_a(a, b) + M_b(a, b)]t + O(t^2)$,

令 $a \rightarrow c, b \rightarrow c$, 有 $c+t = c + [M_a(c, c) + M_b(c, c)]t + O(t^2)$, 即

$$t = [M_a(c, c) + M_b(c, c)]t + O(t^2), \quad 1 = [M_a(c, c) + M_b(c, c)] + O(t),$$

从而, $M_a(c, c) + M_b(c, c) = 1$. 由定理 1.4.1.1, $M_a(c, c) = M_b(c, c) = \frac{1}{2}$.

定理 1.4.1.3 对任意平均 M , 都有 $M_a(ka, kb) = M_a(a, b)$, $M_b(ka, kb) = M_b(a, b)$.

证明 因为 $M_a(ka, kb) = \frac{M(ka+t, kb) - M(ka, kb)}{t} + O(t)$

$$= \frac{kM(a + \frac{t}{k}, b) - kM(a, b)}{t} + O(t)$$

$$= \frac{M(a + \frac{t}{k}, b) - M(a, b)}{\frac{t}{k}} + O(t)$$

所以, $M_a(ka, kb) = M_a(a, b)$. 同理, $M_b(ka, kb) = M_b(a, b)$.

1.4.2 二阶偏导特性

定理 1.4.2.1 对任意平均 M , 都有 $M_{ab}(a, b) = M_{ba}(a, b)$. 特别地,

$$M_{ab}(c, c) = M_{ba}(c, c).$$

证明 $M_{aa}(a, b) = \frac{M_a(a+t, b) - M_a(a, b)}{t} + O(t) = \frac{M_b(b, a+t) - M_b(b, a)}{t} + O(t)$

所以, $M_{aa}(a, b) = M_{bb}(b, a)$. 特别地, 令 $a \rightarrow c, b \rightarrow c$, 有

$$M_{aa}(c, c) = M_{bb}(c, c).$$

定理 1.4.2.2 对任意平均 M , 都有 $M_{aa}(a, b) = M_{bb}(b, a)$. 特别地,

$$M_{aa}(c, c) = M_{bb}(c, c).$$

证明 因为 $M_{ab}(a, b), M_{ba}(a, b)$ 连续, 所以 $M_{ab}(a, b) = M_{ba}(a, b)$.

特别地, 令 $a \rightarrow c, b \rightarrow c$, 有 $M_{ab}(c, c) = M_{ba}(c, c)$.

定理 1.4.2.3 对任意平均 M , 都有 $M_{ab}(c, c) = -M_{aa}(c, c)$.

证明 由泰勒展公式,

$$\begin{aligned} M(a+t, b+t) &= M(a, b) + [M_a(a, b) + M_a(a, b)]t \\ &\quad + [M_{aa}(a, b) + 2M_{ab}(a, b) + M_{bb}(a, b)]t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

令 $a \rightarrow c, b \rightarrow c$, 得

$$c+t = c + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)t + [M_{aa}(c, c) + 2M_{ab}(c, c) + M_{bb}(c, c)]t^2 + O(t^3)$$

即 $[M_{aa}(c, c) + 2M_{ab}(c, c) + M_{bb}(c, c)] = O(t)$

$$[M_{aa}(c, c) + M_{ab}(c, c)] = 0, \quad M_{aa}(c, c) = -M_{ab}(c, c).$$

定理 1.4.2.4 对任意平均 M , 都有 $M_{ab}(ka, kb) = \frac{1}{k} M_{ab}(a, b)$,

$$M_{ba}(ka, kb) = \frac{1}{k} M_{ba}(a, b).$$

特别地, $M_{ab}(k, k) = \frac{M_{ab}(1, 1)}{k}, \quad M_{ba}(k, k) = \frac{M_{ba}(1, 1)}{k}$.

证明 因为 $M_{ab}(ka, kb) = \frac{M_a(ka, kb+t) - M_a(ka, kb)}{t} + O(t)$

$$\begin{aligned} &= \frac{M_a(a, b + \frac{t}{k}) - M_a(a, b)}{t} + O(t) \\ &= \frac{M_a(a, b + \frac{t}{k}) - M_a(a, b)}{t} + O(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} \frac{M_a(a, b + \frac{t}{k}) - M_a(a, b)}{\frac{t}{k}} + O(t)$$

所以, $M_{ab}(ka, kb) = \frac{1}{k} M_{ab}(a, b)$. 特别地, $M_{ab}(k, k) = \frac{M_{ab}(1, 1)}{k}$.

同理, $M_{ba}(ka, kb) = \frac{1}{k} M_{ba}(a, b)$ 和 $M_{ba}(k, k) = \frac{M_{ba}(1, 1)}{k}$.

1.5 基本初等平均

为研究方便, 我们将一些常用平均定义为基本初等平均。

定义 1.5.1 称 $D, M_{-2}, H, G, L, \bar{h}, P^I, h, I, A, Z, P^{II}, g, M_2, B, M_3, C$ 为基本初等平均. 其中,

反幂指平均

$$D = a^{\frac{b}{a+b}} b^{\frac{a}{a+b}}$$

调和平方根平均

$$M_{-2} = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}}$$

调和平均

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

几何平均

$$G = \sqrt{ab}$$

对数平均

$$L = \begin{cases} \frac{a-b}{\ln a - \ln b} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

或 (2003 E. Neuman, J. Sandor)

$$L = \begin{cases} \frac{a-b}{2\text{th}^{-1}((a-b)/(a+b))} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

共轭 Heron 平均 (1999 J. Q. Mao)

$$\bar{h} = \frac{a + 4\sqrt{ab} + b}{6}$$

Seiffert 为第一平均 (1993 H.J.Seiffert)

$$P^I = \begin{cases} \frac{a-b}{4 \tan^{-1} \sqrt{a/b} - \pi} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

或 (2003 E.Neuman, J.Sandor)

$$P^I = \begin{cases} \frac{a-b}{2 \sin^{-1} ((a-b)/(a+b))} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

Heron 平均(2003 P.S.Bullen)

$$h = \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3}$$

指数平均

$$I = \begin{cases} \frac{1}{e} \left(\frac{a^a}{b^b} \right)^{\frac{1}{a-b}} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

算术平均

$$A = \frac{a+b}{2}$$

NS 平均 (2003 E.Neuman, J.Sandor. 2008 W.D.Jiang)

$$Z = \begin{cases} \frac{a-b}{2 \operatorname{sh}^{-1} ((a-b)/(a+b))} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

Seiffert 第二平均 (1995 H.J.Seiffert)

$$P^{II} = \begin{cases} \frac{a-b}{2 \tan^{-1} ((a-b)/(a+b))} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

形心平均

$$g = \frac{2}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$

平方根平均