FUDAO
GAODENGSHUXUE

高等数学辅导

GAODENGSHUXUEFUDAO

何宝珠 主编

华南理工大学出版社

高等数学辅导

主　编　何宝珠
副主编　吴群英　伍艳春

華南理工大學出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/何宝珠主编.—广州：华南理工大学出版社，2003.10
ISBN 7-5623-2024-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.何…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 085232 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：谢纪智
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂印刷
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：14.25　**字数**：342 千
版　　次：2003 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～6000 册
定　　价：19.00 元

编者的话

高等数学学习的重要性已成共识,以至市面上有关的辅导读物多达几十种。

本书有如下几个特点:

1. 着重引导读者进一步了解高等数学的学习方法,从侧面对教材给以适当的补充,启发读者从多个角度做一些有益的深入思考。

2. 解题方法介绍突出思维方法,不强调技巧,着重引导读者提高解题能力。许多地方都给读者留下进一步发挥的空间。

3. 编者认为,辅导读物仅仅是对教材的适当补充,不求"厚度",只求"有度",使读者不觉得重复,不觉得浪费。

本书由何宝珠、吴群英、伍艳春三位教师编写。其中吴群英编写第16、18、19讲,伍艳春编写第17讲,何宝珠编写其余各讲及附录。华南理工大学应用数学系李少白博士审校。

编者对李少白博士在审校中的认真负责深表敬意。

由于作者水平所限,不尽如意及错误之处,敬请读者指正,以便进一步修改、完善。

编　者

2003年2月20日

目　　录

第1讲　特殊与一般互相转化的思维方法

华罗庚说,学数学不解题等于进宝山而空返.解题能力提高的快慢与每个人的思维方法是否得当有很大关系.思维方法不对头,即使解了不少题,解题能力还是低层次的,属于模仿型、经验型,很难形成举一反三的能力,而且靠题海战术积累能力,既无效率,也不可能.要知道,大学里课程多、内容广、时间紧.

下面介绍一些提高解题能力的科学思维方法.

一、从特殊到一般再到特殊

学会把具体问题抽象为一般问题,再回到具体问题中去.这是一种高层次的理性认识.

例 1.1　已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}\cdot\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=1$.

如果认识仅限于此,不会进一步开发解题过程蕴含的信息,那么充其量仅是学了一点套用重要极限求极限而已.

解题之后通常都要考虑,这里解决问题的方法对于更一般的问题是否还有效?或者说给出的方法解决问题的一般化程序如何?所以,得学会把问题一般化.

下面给出例 1.1 一般化的提法:

结论

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}=1\quad 一般化为\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sin[\sin\cdots(\sin x)]}^{n\in Z'}}{x}=1.$$

更一般化为:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\sin[\sin\cdots(\sin x)]}^{n\in Z'}}{\underbrace{\sin[\sin\cdots(\sin x)]}_{m\in Z'}}=1$　与自然数 m、n 无关.

更一般化的提法为:已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{f[f\cdots f(x)]}^{n\in Z'}}{x}$.

原题是 $f(x)=\sin x$,$A=1$,$n=3$,的特例.

当 $f(x)$取别的其他函数时,就从一般回到特殊,不过此时的特殊与彼时的特殊已经有了本质上的不同.

如 $f(x)$取如下函数:$\ln(x+1)$;$\tan x$;e^x-1;$\sqrt{1+x}-1\cdots$

就可以产生一系列相应的题目,所得就不是一题二题,也不是十题八题,而是一个理性认识的升华.

由此可以体会到:

每解决一个具体问题,都要想想能否更一般化.由一般化问题“制造”出许许多多的特殊问题,注意后者“制造”过程也是需要一定能力的,否则也造不出多少有质量的东西.

通过把具体问题一般化得出新的结论,是极富创造性的工作.如果问什么叫举一反三?这就是最好的举一反三.

有时,一般化可以有多种角度.

例 1.2 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是实数,n 是正整数.已知对一切实数 x 有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$,证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

证明 由 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$ 有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$,$(x\neq 0)$.而

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\right|=|a_1+2a_2+\cdots+na_n|,\text{且}\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1.$$

所以由极限的“保号性”有

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|.\text{即 }|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

一般化角度之一:

例 1.2.1 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kg(kx)$,$a_k$ 为实数$(k=1,2,\cdots,n)$,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1$.已知对一切实数 x 都有 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$.证明:$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right|\leqslant 1$.

这里是把例 1.2 中的 $\sin x$ 一般化为 $g(x)$.当 $g(x)$ 取如下具体函数时:

$$\ln(x+1);\tan x;\mathrm{e}^x-1;\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha}$$

就可以“制造”出一系列相应的题目.

一般化角度之二:

例 1.2.2 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$,其中$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_k(x)}{x}=ka_k$,$k=1,2,\cdots n$.且已知对一切实数 x 有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$,证明:$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right|\leqslant 1$.

当 $f_k(x)$ 取为 $a_k\sin kx$ 时,即例 1.2.当 $f_k(x)$ 取为 $k[(1+x)^{a_k}-1]$时,显然有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_k(x)}{x}=ka_k$,$k=1,2,\cdots n$.这时例 1.2.2 具体化为下例:

例 1.2.3 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k(1+x)^{a_k}-\dfrac{n(n+1)}{2}$,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是实数,且已知对一切实数 x 有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$,证明:$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right|\leqslant 1$.

本例与原例 1.2 是同一系列,即处理方法没有本质的变化.可是例 1.2.3 给人的感觉显然比例 1.2 难得多了.

一般化角度之三:

例 1.2.4 设 $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$,其中$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_k(x)}{x}=a_k$,$k=1,2,\cdots,n$ 均为实数.且已

知对一切实数 x 都有 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^n}=A\neq0$. 证明：$\left|\prod\limits_{k=1}^{n}ka_k\right|\leqslant|A|$.

当然此例相对例 1.2 来讲变化的程度大得多了，可是我们现在照样可以从例 1.2.4 中看到例 1.2 的"影子"，而且两者处理方法没有变化，这点是最要紧的.

有时处理具体问题的方法，把问题一般化后失效. 这时得重新找别的方法，由此产生出更多的新意，价值更大.

例 1.3 求 $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$

一般读者都会用有理化的方法解这个题，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

一般化：

例 1.3.1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n})$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$.

此时有理化的方法虽不致完全失效，但一般读者运用已不可能得心应手，解此题力不从心.

更一般化：

例 1.3.2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^\alpha-n^\alpha]$ $(0<\alpha<1)$.

此时有理化的方法已完全失效. 下面给出一种新的处理方法.

$$\lim_{n\to\infty}[(1+n)^\alpha-n^\alpha]=\lim_{n\to\infty}n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]=\lim_{n\to\infty}n^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{n}=0$$

这里用到无穷小等价替代公式：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha-1\sim\dfrac{\alpha}{n}$ $(n\to\infty)$.

显然，新的解法比原来的解法有更广的适用性、更强的功能.

二、有时解一般问题并不比解特殊问题难

一般问题往往比特殊问题更抽象，所以似乎特殊问题较一般问题易于解决. 就常理而言，这是说得通的. 可是，有些数学的特殊情形往往受具体问题的"无效"信息干扰过大，不易一下子把握问题的实质. 如例 1.2.3 等. 而问题的一般形式往往排除了具体问题带来的非本质的复杂性，解决问题的"眉目"相对而言容易看出，这是其一；其二，某些有关特殊数字的数学问题，如果把特殊数字用一般字母代替，就把问题普遍化了，这种手法称之为变量化. 此时由于改变了看问题的角度，给知识的迁移创造了必要条件. 不少问题，从变量化的角度考虑，问题可能更容易解决. 于是，这种普遍化问题解决之后，那种特殊问题也就随之而解决了.

例 1.4 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x\sin x}\,\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

本例直接证明不容易，它的一般化为下例：

例 1.5 证明

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

更一般化的形式就是柯西-许瓦茨不等式：

例 1.6 $\left(\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^bf^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^bg^2(x)\mathrm{d}x\right)$，其中 $f(x)$、$g(x)$ 都在区

间$[a,b]$上连续.

证明 把 b 用参变量 t 取代后,则不等式立刻转化为关于变量 t 的函数不等式.而对于函数型的不等式,利用导数处理有很好的效果(以后有专题介绍).这就是变量化后虽然问题普遍化了,可是改变了思考角度,从而改变了问题所在的领域,使得别的领域的知识得以充分运用.

把问题"函数化":

令 $$F(t)=\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

则 $$F'(t)=\int_a^t[f(t)g(x)-f(x)g(t)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0\ \ (t\geqslant 0).$$

于是 $F(t)$非减.又 $F(a)=0$,所以 $F(b)\geqslant F(a)=0$,即得所证.

当 $f(x)=\sqrt{x}$,$g(x)=\sqrt{\sin x}$,$a=0$,$b=\dfrac{\pi}{2}$,代入柯西-许瓦茨不等式得:

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x\sin x}\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{8}.$$

两边开平方即可证例 1.4.

变量化的处理方法在微积分里有很强的解题功能,第 2 讲里有专门介绍.

三、由特殊情况发现解题思路

从特殊到一般的方法,其精神就在于"考察特殊情况,探索一般规律".当我们遇到一些比较抽象和复杂的问题时,常常先采用下面两种办法把问题"特殊化".

1.用具体代替一般,把抽象问题具体化

本方法处理选择题时,对于排除干扰选择很有效.

例 1.7 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$的极大值点,则

(A)x_0 必是 $f(x)$的驻点;

(B)x_0 必是 $-f(-x)$的极小值点;

(C)x_0 必是 $-f(x)$的极小点;

(D)对一切 x 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$.

若概念清楚,可立刻排除明显错误的选择是(A)、(D),故可选答案仅有(B)、(C),此时可通过 $f(x)$具体化加以确定.设 $f(x)=\sin x$,则 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$为极大值点.简单验算即知 $-x_0=-\dfrac{\pi}{2}$为 $-f(-x)$的极小值点,故(B)真.若是单选题,则立刻可排除(C).此处验证一下也知(C)不真.

2.用简单情形代替复杂情形,把复杂问题简单化

考虑已经特殊化了的情况是否有解决办法,能否得出带普遍性的结论.再以所得结果为基础找出一般情形的解决办法.

例 1.8 已知函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上导数存在,且 $f'_+(a)<k<f'_-(b)$.证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=k$.

证明 先证明 $k=0$ 的特殊情形,然后以此为基础,证明 $k\neq 0$ 的情形.

当 $k=0$ 时,条件成为 $f'_+(a)<0<f'_-(b)$. 此时, $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)<0$.

所以由极限保号性定理可知,在点 a 的右邻域内有一点 x_1 使得: $\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}<0$,即有 $f(x_1)<f(a)$.

同理,也可在点 b 的左邻域内找到一点 x_2 使得 $f(x_2)<f(b)$. 从而可知连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值点 x_0 不在区间端点. 此时 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点,且由于 $f(x)$ 在点可导,所以 $f'(x_0)=0$, $x_0\in(a,b)$.

当 $k\neq0$ 时,令 $F(x)=kx-f(x)$,则 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导,且 $F'(x)=k-f'(x)$. 且

$$F'_+(x)=k-f'_+(x)<0<F'_-(b)=k-f'_-(b).$$

于是由刚才证得的结论知道存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=k$.

在微积分中值定理的证明中,用的也是此类手法.

四、微积分处理问题特色分析

1. 函数化

作者在给报考研究生的同学辅导时,提问“微积分的研究对象是什么?”有许多同学不知道. 由此说明,学生对微积分解决问题的主要特色缺乏了解.

微积分的研究对象是函数,因此非函数方面的问题,微积分知识直接运用不上. 遇到非函数问题,若想利用微积分的方法处理,应把原问题转化为与之等效的函数问题,微积分知识才能得以有效合理地运用. 必须走的这第一步,称之为函数化. 不少学生对这点缺乏清醒的认识. 辅导时,经常有学生提问,为什么要设一个函数? 他们不知道这是函数化的需要.

例 1.9 用微积分的方法证明:若 $a>0$, $b>0$,则 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$.

证明 读者利用不等式 $(a-b)^2\geqslant0$ 可立即解决问题. 可是这个方法对于一般化的问题失效. 例如: $\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{a+b+c}{3}$ $(a,b,c>0)$.

而下面给出的微积分方法对于一般化的问题不会失效 (当然也不是最好的方法).

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\ \text{等价于}\ \frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\leqslant\ln\frac{a+b}{2}.$$

设 $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$,则 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$,故 $f(x)$ 为凸函数. 对于任意的 $a\in(0,+\infty)$, $b\in(0,+\infty)$,有: $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]$.

即 $\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)\leqslant\ln\dfrac{a+b}{2}$. 所以 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$.

例 1.6 的第一步也是函数化.

2. 动静结合

为明确起见,对“动”与“静”的含义作些形象的说明.

微积分以极限作为研究函数的工具,极限体现了辩证法中的运动观点.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点处有意义,则函数值 $f(x_0)$ 与 x_0 点附近 $f(x)$ 的取值情况是没

有任何联系的. 因此称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的"静态值". 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 与函数 $f(x)$ 在点 x_0 邻近的状态有关, 而与 x_0 点处的取值无关, 这个值 A 是通过自变量 x 无限逼近 x_0 的运动, 引起相应因变量 y 的运动, 从而产生的"运动效应值". 做个不十分贴切的比喻, 若把函数 $f(x)$ 在 x_0 点邻近的"静态值"看做电影胶片的一幅幅照片, 当运动地看这一幅幅照片时, 就会产生"屏幕效果"——运动效应值. 显然, 这个"屏幕效果"在静止地去看照片时不会产生. 因此把极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 形象地称之为函数 $f(x)$ 在 x_0 点处的"动态值". 在极限定义里, x 趋于 x_0 而永远不取 x_0, 正体现了运动的要求; 否则, 当 x 取到 x_0 时, 运动岂不是终止了吗? 那么连续函数定义 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 怎么认识呢? 这正好是动静结合的辩证思想深刻而又具体的数学概念. 动静一致时, 恰好给出了曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的某种完美的客观属性. 而这种客观属性的深刻揭示是初等数学无能为力的.

把通过极限给出的函数性质, 习惯上都称之为分析性质. 利用函数的分析性质讨论函数的其他性质, 或者反过来由函数的非分析性质研究函数的分析性质, 基本上体现了微积分题目的特色. 我们把这个特点称之为"动静结合". 微积分里有不少结论很深刻地体现了这个特点. 如由导函数的性质给出的函数的性质: 若 $f'(x) > 0, x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增就是具体的说明.

详细的处理分析方法, 以后在碰到具体问题时会有专门的论述.

3. 矛盾转化的特点

从哲学角度看, 微积分主要体现数形方面的"曲与直"、"变与不变"、"匀与不匀"等矛盾的转化, 这点在解决曲线的切线、变力做功, 或者求曲边梯形面积等问题中均有体现, 此处不再细述.

第 2 讲　微积分中常用的几种解题方法

一、辅助函数构造解题法

前面说过，函数化是微积分的特色，因此构造辅助函数解题是非常基本的方法．辅助函数的主要功能是转化功能，现分类叙述．

(一)转化研究对象

实际问题中有很多问题最初的提法并不是函数问题，而是非函数问题，构造辅助函数就可以实现这种转化．

例 2.1　证明下列公式

1.　$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}l$

2.　$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$．

证明　这两个等式都是数值等式，直接运用微积分处理显然是不行的，因此要把它们转化为相应的函数等式．分析其结构，容易想到运用恒等式：

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ (x\neq 1) \tag{2.1.1}$$

两边对 x 求导得：

$$\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2} \tag{2.1.2}$$

两边令 $x\to 1$　得：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

其中右端极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(n-1)^2}$$

可连用洛毕达法则两次求出．

对等式(2.1.2)两边乘 x 有：

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2} \tag{2.1.3}$$

两边对 x 求导后得：

$$\sum_{i=1}^{n} i^2x^{i-1} = \frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$$

两边令 $x\to 1$　得：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\lim_{x\to 1}\frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(n^2(n+2)x^{n+1}-(2n^2+2n-1)(n+1)x^n+n(n+1)^2x^{n-1}-1}{3(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{n^2(n+2)(n+1)x^n-(2n^2+2n-1)(n+1)nx^{n-1}+n(n+1)^2(n-1)x^{n-2}}{6(x-1)}$$

$$= \frac{1}{6}[n^3(n+2)(n+1)-n(2n^2+2n-1)(n^2-1)+n(n+1)^2(n-1)(n-2)]$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

又如方程根的问题都要转化为函数零点的问题(这点后面有专题讨论).

例 2.2 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

解 构造函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

$f'(x)=\frac{1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)$,得惟一驻点为 $x=e$. 易知 $x=e$ 为 $f(x)$的最大值点,而最接近 e 的两个自然数是 2 和 3. 通过比较即知$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$. 可知,$\sqrt[3]{3}$为数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

(二)转化研究区域

有不少性质对变量 x 的取值范围是有要求的,如连续函数在闭区间的一系列性质,以及罗尔定理、拉格朗日中值定理等. 然而,有些题目所给问题中 $f(x)$的取值范围往往与解决问题所需性质的条件不符合,这时就要通过辅助函数的构造转化研究区域,使所需性质得以有效运用.

例 2.3 若 $f(x)$在开区间(a,b)上连续,且有 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B(A<B)$. 则对于任意取定的 C,当 $A<C<B$ 时,总有 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$.

证明 若 $f(x)$的连续区间为$[a,b]$,那么就是读者熟知的连续函数介值定理. 因此想到可以利用这个定理解决问题,而要克服的困难是开区间与闭区间的转化. 这点完全可以通过构造辅助函数加以解决.

设 $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b),\\ a, & x=a,\\ B, & x=b.\end{cases}$ 很容易证明 $F(x)$在$[a,b]$上连续且 $F(a)=A$, $F(B)=B$. 从而 $F(x)$在闭区间上满足连续函数介值定理的条件. 故存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F(\xi)=C$. 又因为在(a,b)上 $F(x)=f(x)$,所以有 $f(x)=C$.

闭区间上成立的性质大都可以类似地推广到开区间上,我们把罗尔定理进行如下例的推广.

例 2.4 若函数 $f(x)$在(a,b)内可导,且有 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$,则存在 $\xi\in(a,b)$使得 $f'(\xi)=0$.

证明 构造函数:

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b),\\ L, & x=a,b.\end{cases}$$

其中 $L=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$. 容易证明,$F(x)$在闭区间$[a,b]$上满足罗尔定理的条件. 故存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F(\xi)=0$,此即 $f'(\xi)=0$.

构造辅助函数转化研究区域的例子很多,比如有限长区间上的性质推广到无限长区间

上的处理等等(后面定理推广一节有专题论述).

(三)转化函数结构

有些性质对某些结构较为具体和简单的情形已得到解决,那么要解决结构较一般的情形,就可以通过辅助函数的构造,使之往已知结构转化.利用罗尔定理证明拉格朗日中值定理就是典型的例子.

例 1.8 更突出地表现了辅助函数的这种转化功能.类似于例 1.8 的处理手法,在闭区间上连续函数的介值定理证明中也已用到.

例 2.5 设函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续函数,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}t$.

证明 因为对任意的 $x>0$,总存在非负整数 n,使 $nT\leqslant x\leqslant(n+1)T$.

当 $f(x)$是周期为 $T(T>0)$的非负连续函数时,有

$$\frac{1}{(n+1)T}\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{nT}\int_0^{(n+1)T}f(t)\mathrm{d}t.$$

依 $f(x)$的周期性,上面的不等式可以写成

$$\frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}f(t)\mathrm{d}t\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$

于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

(2)当 $f(x)$是周期为 $T(T>0)$的任一连续函数时,如果记

$$M=\max\{f(t)\mid t\in[0,T]\},\varphi(t)=M-f(t)$$

则 $\varphi(t)$是以 T 为周期的非负连续函数.对 $\varphi(t)$应用(1)的结果,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x[M-f(t)]\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[M-f(t)]\mathrm{d}t.$$

由此推出:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

(四)转化维数

有些高维问题可以通过构造辅助函数使之转化为低维问题.例如,多元函数的许多问题就可如此解决.

例 2.6 在有界闭域 D 上的二元函数 $z=f(x,y)$,如果在 D 上取得两个不同的函数值,则在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

证明 设$(x_1,y_1)\in D,(x_2,y_2)\in D$,且 $A=z_1=f(x_1,y_1),B=z_2=f(x_2,y_2)$,$A<B$.

由闭域的连通性,故存在连接(x_1,y_1)与(x_2,y_2)的连续曲线

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}\alpha\leqslant t\leqslant\beta.\ \varphi(\alpha)=x_1,\phi(\alpha)=y_1;\varphi(\beta)=x_2,\phi(\beta)=y_2.$$

令 $\omega(t)=f(\varphi(t),\phi(t))$,则 $A=\omega(\alpha),B=\omega(\beta)$.故对于任何介于 A、B 之间的值C,由一元函数介值定理知存在 $t_0\in(\alpha,\beta)$,使得 $C=\omega(t_0)$.