

FUDAO

GAODENGSHUXUE

高等数学 辅导

GAODENGSHUXUEFUDAO

何宝珠 主编

华南理工大学出版社

高等数学辅导

主 编 何宝珠

副主编 吴群英 伍艳春

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/何宝珠主编. —广州: 华南理工大学出版社, 2003.10
ISBN 7-5623-2024-1

I. 高… II. 何… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 085232 号

总发行: 华南理工大学出版社 (广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

发行部电话: 020-87113487 87111048 (传真)

E-mail: scut202@scut.edu.cn

<http://www2.scut.edu.cn/press>

责任编辑: 谢纪智

印刷者: 广东省农垦总局印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 **印张:** 14.25 **字数:** 342 千

版次: 2003 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

印数: 1~6 000 册

定价: 19.00 元

版权所有 盗版必究

编者的话

高等数学学习的重要性已成共识,以至市面上有关的辅导读物多达几十种。

本书有如下几个特点:

1. 着重引导读者进一步了解高等数学的学习方法,从侧面对教材给以适当的补充,启发读者从多个角度做一些有益的深入思考。
2. 解题方法介绍突出思维方法,不强调技巧,着重引导读者提高解题能力。许多地方都给读者留下进一步发挥的空间。
3. 编者认为,辅导读物仅仅是对教材的适当补充,不求“厚度”,只求“有度”,使读者不觉得重复,不觉得浪费。

本书由何宝珠、吴群英、伍艳春三位教师编写。其中吴群英编写第16、18、19讲,伍艳春编写第17讲,何宝珠编写其余各讲及附录。华南理工大学应用数学系李少白博士审校。

编者对李少白博士在审校中的认真负责深表敬意。

由于作者水平所限,不尽如意及错误之处,敬请读者指正,以便进一步修改、完善。

编 者

2003年2月20日

目 录

第 1 讲 特殊与一般互相转化的思维方法	(1)
一、从特殊到一般再到特殊	(1)
二、有时解一般问题并不比解特殊问题难	(3)
三、由特殊情况发现解题思路	(4)
四、微积分处理问题特色分析	(5)
第 2 讲 微积分中常用的几种解题方法	(7)
一、辅助函数构造解题法	(7)
(一)转化研究对象	(7)
(二)转化研究区域	(8)
(三)转化函数结构	(9)
(四)转化维数	(9)
二、反证法运用的某些规律	(10)
(一)怎样正确叙述反命题	(10)
(二)反证法在结论为特称命题中的应用	(12)
(三)反证法在结论为全称命题中的应用	(13)
(四)反证法在“不存在……”问题中的应用	(14)
(五)反证法在“惟一性”问题中的应用	(14)
三、化复杂问题为简单问题的方法	(15)
(一)置换法	(15)
(二)变换法	(16)
(三)递推法	(17)
(四)数学归纳法	(18)
四、变量化解题法	(19)
第 3 讲 举反例与定理推广	(22)
一、闭区间上的性质推广到开区间	(24)
二、有限长区间上的性质推广到无限长区间	(24)
三、平行类推	(25)
四、减弱条件结论不变	(25)
第 4 讲 非“初等”函数的处理方法	(26)
一、极限式表示的函数	(26)
二、微分形式表示的函数	(26)
三、积分形式表示的函数	(27)
四、变积分上限函数	(27)
五、行列式表示的函数	(28)

六、级数表示的函数	(28)
七、函数方程表示的函数	(29)
八、由微分方程给出的函数	(30)
九、由积分方程给出的函数	(30)
十、取整函数	(31)
十一、最大值、最小值函数	(31)
十二、由图形给出的函数	(31)
十三、反函数	(32)
十四、分段函数的不定积分	(32)
十五、反极限问题	(33)
第 5 讲 求极限方法	(35)
一、定义法	(35)
二、夹逼法	(36)
三、单调有界法	(36)
四、比值法	(37)
五、无穷小等价替代法	(37)
六、利用高阶无穷小求极限	(40)
七、利用两个重要极限求极限	(40)
八、洛毕达法则	(41)
九、利用导数定义求极限	(42)
十、利用微分中值定理求极限	(42)
十一、利用分部积分法求极限	(43)
十二、利用定积分定义求极限	(43)
十三、其他求极限方法综述	(43)
第 6 讲 不等式证明方法	(46)
一、第一类方法	(46)
(一)利用两个极限“保号性”定理证明不等式	(46)
(二)利用函数的最大值、最小值证明不等式	(47)
(三)利用单调性证明不等式	(47)
(四)利用函数凹、凸性证明不等式	(48)
(五)利用积分保号性证明不等式	(48)
二、第二类方法	(49)
(一)利用微分中值定理证明不等式	(49)
(二)利用柯西中值定理证明不等式	(50)
(三)利用泰勒公式证明不等式	(50)
(四)利用积分中值定理证明不等式	(51)
(五)利用积分换元法证明不等式	(51)
(六)利用分部积分法证明不等式	(52)
(七)利用二重积分证明不等式	(52)

第 7 讲 恒等式证明方法	(56)
一、利用“区间 I 上 $f(x) \equiv C \Leftrightarrow f'(x) = 0$ ”证明恒等式	(56)
二、利用对变积分上限函数求导证明恒等式	(56)
三、利用换元法证明不等式	(57)
四、利用分部积分法证明恒等式	(58)
五、利用最大值、最小值证明恒等式	(58)
六、利用泰勒展开式证明恒等式	(59)
七、利用代数恒等式证明恒等式	(59)
八、利用二重积分证明定积分恒等式	(60)
第 8 讲 方程根的处理方法	(62)
一、利用连续函数的介值定理	(62)
二、利用罗尔定理	(62)
三、利用驻点特性	(63)
四、利用函数单调性	(64)
五、利用最大值、最小值	(64)
六、利用各类中值定理	(65)
七、利用凹凸性	(65)
八、利用奇次多项式至少有一实根	(66)
九、利用迭代法	(66)
十、利用函数图形描绘的方法	(66)
第 9 讲 周期函数处理方法	(68)
第 10 讲 “均值”的处理方法	(72)
一、数列均值	(72)
二、函数均值	(73)
三、均值不等式	(74)
第 11 讲 求 $f(x)$ 的若干方法	(78)
第 12 讲 找点问题的处理方法	(83)
第 13 讲 Taylor 公式的解题方法	(87)
第 14 讲 求导数、积分的若干方法	(92)
一、求导数的若干方法	(92)
(一)求一阶导数方法	(92)
(二)求高阶导数方法	(94)
(三)不同坐标系导数的互相转换	(96)
(四)带积分号的函数求导	(97)
(五)杂题	(98)
二、求积分的若干方法	(99)
(一)不定积分	(99)
(二)定积分的计算	(103)

第 15 讲 解析几何解题方法介绍	(105)
第 16 讲 多元函数及其微分	(112)
一、多元函数的极限与连续性	(112)
二、偏导数、全微分与微分法	(116)
三、多元函数微分学的应用	(125)
第 17 讲 重积分	(130)
一、重积分的计算	(130)
(一)二重积分算法	(130)
(二)三重积分算法	(132)
二、线积分	(134)
(一)第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)	(134)
(二)第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)	(135)
三、曲面积分	(136)
(一)第一类曲面积分(对面积的曲面积分)	(136)
(二)第二类曲面积分(对坐标的曲面积分)	(136)
四、利用对称性简化积分运算	(138)
第 18 讲 级数	(166)
一、数值级数敛散性的判别法	(166)
二、幂级数	(175)
三、傅立叶(Fourier)级数	(182)
第 19 讲 微分方程	(187)
一、微分方程的基本概念	(187)
二、一阶微分方程的类型及其解法	(187)
三、高阶微分方程	(192)
(一)可降阶的微分方程	(192)
(二)高阶线性微分方程	(193)
(三)常系数线性微分方程	(193)
附录 本科生试题及参考解答	(198)
附录 1 某学院试题(文科)及参考解答	(198)
附录 2 某学院试题(工科)(上册)及参考解答	(201)
附录 3 某大学试题(上册)及参考解答	(205)
附录 4 某学院试题(工科)(下册)及参考解答	(209)
附录 5 某大学试题(下册)及参考解答	(213)
后记	(218)

第1讲 特殊与一般互相转化的思维方法

华罗庚说,学数学不解题等于进宝山而空返.解题能力提高的快慢与每个人的思维方法是否得当有很大关系.思维方法不对头,即使解了不少题,解题能力还是低层次的,属于模仿型、经验型,很难形成举一反三的能力,而且靠题海战术积累能力,既无效率,也不可能.要知道,大学里课程多、内容广、时间紧.

下面介绍一些提高解题能力的科学思维方法.

一、从特殊到一般再到特殊

学会把具体问题抽象为一般问题,再回到具体问题中去.这是一种高层次的理性认识.

例 1.1 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x} \cdot \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1$.

如果认识仅限于此,不会进一步开发解题过程蕴含的信息,那么充其量仅是学了一点套用重要极限求极限而已.

解题之后通常都要考虑,这里解决问题的方法对于更一般的问题是否还有效?或者说给出的方法解决问题的一般化程序如何?所以,得学会把问题一般化.

下面给出例 1.1 一般化的提法:

结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x} = 1 \quad \text{一般化为} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin[\sin \cdots (\sin x)]}^{n \in \mathbb{Z}^+}}{x} = 1.$$

$$\text{更一般化为: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin[\sin \cdots (\sin x)]}^{n \in \mathbb{Z}^+}}{\underbrace{\sin[\sin \cdots (\sin x)]}_{m \in \mathbb{Z}^+}} = 1 \quad \text{与自然数 } m, n \text{ 无关.}$$

$$\text{更一般化的提法为: 已知 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f[f \cdots f(x)]}^{n \in \mathbb{Z}^+}}{x}.$$

原题是 $f(x) = \sin x, A = 1, n = 3$, 的特例.

当 $f(x)$ 取别的其他函数时,就从一般回到特殊,不过此时的特殊与彼时的特殊已经有了本质上的不同.

如 $f(x)$ 取如下函数: $\ln(x+1); \tan x; e^x - 1; \sqrt{1+x} - 1 \cdots$

就可以产生一系列相应的题目,所得就不是一题二题,也不是十题八题,而是一个理性认识的升华.

由此可以体会到:

每解决一个具体问题,都要想想能否更一般化.由一般化问题“制造”出许许多多的特殊问题,注意后者“制造”过程也是需要一定能力的,否则也造不出多少有质量的东西.

通过把具体问题一般化得出新的结论,是极富创造性的工作.如果问什么叫举一反三?这就是最好的举一反三.

有时,一般化可以有多种角度.

例 1.2 设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是实数, n 是正整数.已知对一切实数 x 有 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 证明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

证明 由 $|f(x)| \leq |\sin x|$ 有 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|, (x \neq 0)$. 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n a_k \frac{\sin kx}{x} \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \right| = |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n|, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

所以由极限的“保号性”有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right|. \text{ 即 } |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

一般化角度之一:

例 1.2.1 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k g(kx)$, a_k 为实数 ($k = 1, 2, \cdots, n$), 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1$. 已知

对一切实数 x 都有 $|f(x)| \leq |g(x)|$. 证明: $\left| \sum_{k=1}^n ka_k \right| \leq 1$.

这里是把例 1.2 中的 $\sin x$ 一般化为 $g(x)$. 当 $g(x)$ 取如下具体函数时:

$$\ln(x+1); \tan x; e^x - 1; \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha}$$

就可以“制造”出一系列相应的题目.

一般化角度之二:

例 1.2.2 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(x)}{x} = ka_k, k = 1, 2, \cdots, n$. 且已知对一切实

数 x 有 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 证明: $\left| \sum_{k=1}^n ka_k \right| \leq 1$.

当 $f_k(x)$ 取为 $a_k \sin kx$ 时, 即例 1.2. 当 $f_k(x)$ 取为 $k[(1+x)^{a_k} - 1]$ 时, 显然有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(x)}{x} = ka_k, k = 1, 2, \cdots, n$. 这时例 1.2.2 具体化为下例:

例 1.2.3 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n k(1+x)^{a_k} - \frac{n(n+1)}{2}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是实数, 且已知对一

切实数 x 有 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 证明: $\left| \sum_{k=1}^n ka_k \right| \leq 1$.

本例与原例 1.2 是同一系列, 即处理方法没有本质的变化. 可是例 1.2.3 给人的感觉显然比例 1.2 难得多了.

一般化角度之三:

例 1.2.4 设 $f(x) = \prod_{k=1}^n f_k(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(x)}{x} = a_k, k = 1, 2, \cdots, n$ 均为实数. 且已

知对一切实数 x 都有 $|f(x)| \leq |g(x)|$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = A \neq 0$. 证明: $\left| \prod_{k=1}^n ka_k \right| \leq |A|$.

当然此例相对例 1.2 来讲变化的程度大得多了,可是我们现在照样可以从例 1.2.4 中看到例 1.2 的“影子”,而且两者处理方法没有变化,这点是最要紧的.

有时处理具体问题的方法,把问题一般化后失效.这时得重新找别的方法,由此产生出更多的新意,价值更大.

例 1.3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ($k \in \mathbb{Z}^+$)

一般读者都会用有理化的方法解这个题,即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$.

一般化:

例 1.3.1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n})$ ($k \in \mathbb{Z}$).

此时有理化的方法虽不致完全失效,但一般读者运用已不可能得心应手,解此题力不从心.

更一般化:

例 1.3.2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+n)^\alpha - n^\alpha]$ ($0 < \alpha < 1$).

此时有理化的方法已完全失效.下面给出一种新的处理方法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+n)^\alpha - n^\alpha] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{n} = 0$$

这里用到无穷小等价替代公式: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \sim \frac{\alpha}{n}$ ($n \rightarrow \infty$).

显然,新的解法比原来的解法有更广的适用性、更强的功能.

二、有时解一般问题并不比解特殊问题难

一般问题往往比特殊问题更抽象,所以似乎特殊问题较一般问题易于解决.就常理而言,这是说得通的.可是,有些数学的特殊情形往往受具体问题的“无效”信息干扰过大,不易一下子把握问题的实质.如例 1.2.3 等.而问题的一般形式往往排除了具体问题带来的非本质的复杂性,解决问题的“眉目”相对而言容易看出,这是其一;其二,某些有关特殊数字的数学问题,如果把特殊数字用一般字母代替,就把问题普遍化了,这种手法称之为变量化.此时由于改变了看问题的角度,给知识的迁移创造了必要条件.不少问题,从变量化的角度考虑,问题可能更容易解决.于是,这种普遍化问题解决之后,那种特殊问题也就随之而解决了.

例 1.4 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x} dx \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

本例直接证明不容易,它的一般化为下例:

例 1.5 证明

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)dx \right)$$

更一般化的形式就是柯西-许瓦茨不等式:

例 1.6 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$, 其中 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都在区

间 $[a, b]$ 上连续.

证明 把 b 用参变量 t 取代后,则不等式立刻转化为关于变量 t 的函数不等式.而对于函数型的不等式,利用导数处理有很好的效果(以后有专题介绍).这就是变量化后虽然问题普遍化了,可是改变了思考角度,从而改变了问题所在的领域,使得别的领域的知识得以充分运用.

把问题“函数化”:

$$\text{令} \quad F(t) = \int_a^t f^2(x) dx \cdot \int_a^t g^2(x) dx - \left(\int_a^t f(x)g(x) dx \right)^2,$$

$$\text{则} \quad F'(t) = \int_a^t [f(t)g(x) - f(x)g(t)]^2 dx \geqslant 0 \quad (t \geqslant 0).$$

于是 $F(t)$ 非减.又 $F(a)=0$,所以 $F(b) \geqslant F(a)=0$,即得所证.

当 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{\sin x}$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$,代入柯西-许瓦茨不等式得:

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x} dx \right)^2 \leqslant \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) = \frac{\pi}{8}.$$

两边开平方即可证例 1.4.

变量化的处理方法在微积分里有很强的解题功能,第 2 讲里有专门介绍.

三、由特殊情况发现解题思路

从特殊到一般的方法,其精神就在于“考察特殊情况,探索一般规律”.当我们遇到一些比较抽象和复杂的问题时,常常先采用下面两种办法把问题“特殊化”.

1. 用具体代替一般,把抽象问题具体化

本方法处理选择题时,对于排除干扰选择很有效.

例 1.7 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点,则

- (A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点;
- (B) x_0 必是 $-f(-x)$ 的极小值点;
- (C) x_0 必是 $-f(x)$ 的极小点;
- (D) 对一切 x 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$.

若概念清楚,可立刻排除明显错误的选择是(A)、(D),故可答答案仅有(B)、(C),此时可通过 $f(x)$ 具体化加以确定.设 $f(x)=\sin x$,则 $x_0=\frac{\pi}{2}$ 为极大值点.简单验算即知 $-x_0=-\frac{\pi}{2}$ 为 $-f(-x)$ 的极小值点,故(B)真.若是单选题,则立刻可排除(C).此处验证一下也知(C)不真.

2. 用简单情形代替复杂情形,把复杂问题简单化

考虑已经特殊化了的情况是否有解决办法,能否得出带普遍性的结论.再以所得结果为基础找出一般情形的解决办法.

例 1.8 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上导数存在,且 $f'_+(a) < k < f'_-(b)$.证明存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f'(\xi) = k$.

证明 先证明 $k=0$ 的特殊情形,然后以此为基础,证明 $k \neq 0$ 的情形.

当 $k=0$ 时, 条件成为 $f'_+(a) < 0 < f'_-(b)$. 此时, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) < 0$.

所以由极限保号性定理可知, 在点 a 的右邻域内有一点 x_1 使得: $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < 0$, 即有 $f(x_1) < f(a)$.

同理, 也可在点 b 的左邻域内找到一点 x_2 使得 $f(x_2) < f(b)$. 从而可知连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最小值点 x_0 不在区间端点. 此时 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, 且由于 $f(x)$ 在点可导, 所以 $f'(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$.

当 $k \neq 0$ 时, 令 $F(x) = kx - f(x)$, 则 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = k - f'(x)$. 且

$$F'_+(x) = k - f'_+(x) < 0 < F'_-(b) = k - f'_-(b).$$

于是由刚才证得的结论知道存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = k$.

在微积分中值定理的证明中, 用的也是此类手法.

四、微积分处理问题特色分析

1. 函数化

作者在给报考研究生的同学辅导时, 提问“微积分的研究对象是什么?”有许多同学不知道. 由此说明, 学生对微积分解决问题的主要特色缺乏了解.

微积分的研究对象是函数, 因此非函数方面的问题, 微积分知识直接运用不上. 遇到非函数问题, 若想利用微积分的方法处理, 应把原问题转化为与之等效的函数问题, 微积分知识才能得以有效合理地运用. 必须走的这第一步, 称之为函数化. 不少学生对这点缺乏清醒的认识. 辅导时, 经常有学生提问, 为什么要设一个函数? 他们不知道这是函数化的需要.

例 1.9 用微积分的方法证明: 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

证明 读者利用不等式 $(a-b)^2 \geq 0$ 可立即解决问题. 可是这个方法对于一般化的问题失效. 例如: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \quad (a, b, c > 0)$.

而下面给出的微积分方法对于一般化的问题不会失效 (当然也不是最好的方法).

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ 等价于 } \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}.$$

设 $f(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$, 则 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 故 $f(x)$ 为凸函数. 对于任意的 $a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)$, 有: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$.

即 $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}$. 所以 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

例 1.6 的第一步也是函数化.

2. 动静结合

为明确起见, 对“动”与“静”的含义作些形象的说明.

微积分以极限作为研究函数的工具, 极限体现了辩证法中的运动观点.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点处有意义, 则函数值 $f(x_0)$ 与 x_0 点附近 $f(x)$ 的取值情况是没

有任何联系的. 因此称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的“静态值”. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 与函数 $f(x)$ 在点 x_0 邻近的状态有关, 而与 x_0 点处的取值无关, 这个值 A 是通过自变量 x 无限逼近 x_0 的运动, 引起相应因变量 y 的运动, 从而产生的“运动效应值”. 做个不十分贴切的比喻, 若把函数 $f(x)$ 在 x_0 点邻近的“静态值”看做电影胶片的一幅幅照片, 当运动地看这一幅幅照片时, 就会产生“屏幕效果”——运动效应值. 显然, 这个“屏幕效果”在静止地去看照片时不会产生. 因此把极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 形象地称之为函数 $f(x)$ 在 x_0 点处的“动态值”. 在极限定义里, x 趋于 x_0 而永远不取 x_0 , 正体现了运动的要求; 否则, 当 x 取到 x_0 时, 运动岂不是终止了吗? 那么连续函数定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 怎么认识呢? 这正好是动静结合的辩证思想深刻而又具体的数学概念. 动静一致时, 恰好给出了曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的某种完美的客观属性. 而这种客观属性的深刻揭示是初等数学无能为力的.

把通过极限给出的函数性质, 习惯上都称之为分析性质. 利用函数的分析性质讨论函数的其他性质, 或者反过来由函数的非分析性质研究函数的分析性质, 基本上体现了微积分题目的特色. 我们把这个特点称之为“动静结合”. 微积分里有不少结论很深刻地体现了这个特点. 如由导函数的性质给出的函数的性质: 若 $f'(x) > 0, x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增就是具体的说明.

详细的处理分析方法, 以后在碰到具体问题时会有专门的论述.

3. 矛盾转化的特点

从哲学角度看, 微积分主要体现数形方面的“曲与直”、“变与不变”、“匀与不匀”等矛盾的转化, 这点在解决曲线的切线、变力做功, 或者求曲边梯形面积等问题中均有体现, 此处不再细述.

第2讲 微积分中常用的几种解题方法

一、辅助函数构造解题法

前面说过,函数化是微积分的特色,因此构造辅助函数解题是非常基本的方法.辅助函数的主要功能是转化功能,现分类叙述.

(一)转化研究对象

实际问题中有很多问题最初的提法并不是函数问题,而是非函数问题,构造辅助函数就可以实现这种转化.

例 2.1 证明下列公式

$$1. \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

证明 这两个等式都是数值等式,直接运用微积分处理显然是不行的,因此要把它们转化为相应的函数等式.分析其结构,容易想到运用恒等式:

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1) \quad (2.1.1)$$

两边对 x 求导得:

$$\sum_{i=1}^n i x^{i-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \quad (2.1.2)$$

两边令 $x \rightarrow 1$ 得:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

其中右端极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

可连用洛毕达法则两次求出.

对等式(2.1.2)两边乘 x 有:

$$\sum_{i=1}^n i x^i = \frac{n x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \quad (2.1.3)$$

两边对 x 求导后得:

$$\sum_{i=1}^n i^2 x^{i-1} = \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3}$$

两边令 $x \rightarrow 1$ 得:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(n^2(n+2)x^{n+1} - (2n^2 + 2n - 1)(n+1)x^n + n(n+1)^2x^{n-1} - 1)}{3(x-1)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n^2(n+2)(n+1)x^n - (2n^2 + 2n - 1)(n+1)nx^{n-1} + n(n+1)^2(n-1)x^{n-2}}{6(x-1)} \\
&= \frac{1}{6} [n^3(n+2)(n+1) - n(2n^2 + 2n - 1)(n^2 - 1) + n(n+1)^2(n-1)(n-2)] \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

又如方程根的问题都要转化为函数零点的问题(这点后面有专题讨论).

例 2.2 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

解 构造函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$.

$f'(x) = \frac{1}{x^2} x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x)$, 得惟一驻点为 $x = e$. 易知 $x = e$ 为 $f(x)$ 的最大值点, 而最接近 e 的两个自然数是 2 和 3. 通过比较即知 $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$. 可知, $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

(二) 转化研究区域

有不少性质对变量 x 的取值范围是有要求的, 如连续函数在闭区间的一系列性质, 以及罗尔定理、拉格朗日中值定理等. 然而, 有些题目所给问题中 $f(x)$ 的取值范围往往与解决问题所需性质的条件不符合, 这时就要通过辅助函数的构造转化研究区域, 使所需性质得以有效运用.

例 2.3 若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上连续, 且有 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B (A < B)$. 则对于任意取定的 C , 当 $A < C < B$ 时, 总有 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$.

证明 若 $f(x)$ 的连续区间为 $[a, b]$, 那么就是读者熟知的连续函数介值定理. 因此想到可以利用这个定理解决问题, 而要克服的困难是开区间与闭区间的转化. 这点完全可以通过构造辅助函数加以解决.

$$\text{设 } F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ a, & x = a, \\ B, & x = b. \end{cases} \quad \text{很容易证明 } F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续且 } F(a) = A,$$

$F(b) = B$. 从而 $F(x)$ 在闭区间上满足连续函数介值定理的条件. 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F(\xi) = C$. 又因为在 (a, b) 上 $F(x) = f(x)$, 所以有 $f(\xi) = C$.

闭区间上成立的性质大都可以类似地推广到开区间上, 我们把罗尔定理进行如下例的推广.

例 2.4 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且有 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 构造函数:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ L, & x = a, b. \end{cases}$$

其中 $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. 容易证明, $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上满足罗尔定理的条件. 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 此即 $f'(\xi) = 0$.

构造辅助函数转化研究区域的例子很多, 比如有限长区间上的性质推广到无限长区间

上的处理等等(后面定理推广一节有专题论述).

(三)转化函数结构

有些性质对某些结构较为具体和简单的情形已得到解决,那么要解决结构较一般的情形,就可以通过辅助函数的构造,使之往已知结构转化.利用罗尔定理证明拉格朗日中值定理就是典型的例子.

例 1.8 更突出地表现了辅助函数的这种转化功能.类似于例 1.8 的处理手法,在闭区间上连续函数的介值定理证明中也已用到.

例 2.5 设函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T > 0)$ 的连续函数,证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$.

证明 因为对任意的 $x > 0$, 总存在非负整数 n , 使 $nT \leq x \leq (n+1)T$.

当 $f(x)$ 是周期为 $T(T > 0)$ 的非负连续函数时,有

$$\frac{1}{(n+1)T} \int_0^{nT} f(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{nT} \int_0^{(n+1)T} f(t) dt.$$

依 $f(x)$ 的周期性,上面的不等式可以写成

$$\frac{n}{(n+1)T} \int_0^T f(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{n+1}{nT} \int_0^T f(t) dt.$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{nT} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

于是有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

(2) 当 $f(x)$ 是周期为 $T(T > 0)$ 的任一连续函数时,如果记

$$M = \max\{f(t) \mid t \in [0, T]\}, \varphi(t) = M - f(t)$$

则 $\varphi(t)$ 是以 T 为周期的非负连续函数.对 $\varphi(t)$ 应用(1)的结果,有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x [M - f(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T [M - f(t)] dt.$$

$$\text{由此推出: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

(四)转化维数

有些高维问题可以通过构造辅助函数使之转化为低维问题.例如,多元函数的许多问题就可如此解决.

例 2.6 在有界闭域 D 上的二元函数 $z = f(x, y)$, 如果在 D 上取得两个不同的函数值,则在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

证明 设 $(x_1, y_1) \in D, (x_2, y_2) \in D$, 且 $A = z_1 = f(x_1, y_1), B = z_2 = f(x_2, y_2), A < B$.

由闭域的连通性,故存在连接 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的连续曲线

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta. \varphi(\alpha) = x_1, \phi(\alpha) = y_1; \varphi(\beta) = x_2, \phi(\beta) = y_2.$$

令 $\omega(t) = f(\varphi(t), \phi(t))$, 则 $A = \omega(\alpha), B = \omega(\beta)$. 故对于任何介于 A, B 之间的值 C , 由一元函数介值定理知存在 $t_0 \in (\alpha, \beta)$, 使得 $C = \omega(t_0)$.