全国部分省、市一九八一年高中毕业班

数学模拟及预选试题选编

（附解答）

福建省建阳地区教师进修学校

数学教研组编

几点说明

选编这份资料是为了向兄弟省、市的地区学习，了解各地对教材的探讨和研究。限于篇幅，选入文、理科及中专试题共40套。除部分预考题外，其它虽名称不一，都是高中毕业班的数学模拟试题。试题解法有详、有略，有的只写提示与答案，供学生思考和研究。

每套试题，一般前面部分是基本题和小综合题，后面部分是沟通题。对于基本题与小综合题，凡报考大专文、理科及中专学生都应掌握。注有*号者，要求略高，文科及中专考生可以选读，不作要求。也可以征询老师意见而选解。

本书中附图上的Ti，表示图的编号。

限于水平，编辑中难免有错误，欢迎读者批评指正。

福建省建阳地区教师进修学校数学组

一九八一年十月

目　　录（只写简称）

北京海淀区高二（理科）数学综合练习（二）

一、解下列各题

1、已知抛物线焦点为极点，且极轴在它的对称轴上，若焦点到准线的距离为3，求这抛物线的极坐标方程。

解：$\because p=3 \qquad e=1 \qquad$ 但$\rho=\dfrac{ep}{1-\text{Cos}\,\theta}$

$\therefore$抛物线方程为$\rho=\dfrac{3}{1-\text{Cos}\,\theta}$

2、求二项展开式（$x+\sqrt{2}i$）^{7}中含x^5的项

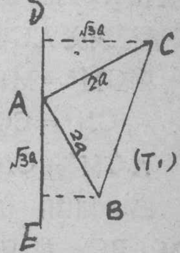
解：$T_{r+1}=C_7^r(\sqrt{2}i)^r x^{7-r}$ 因x指数为5，则I＝2

所求的项为$T_{2+1}=C_7^2(-2)x^5=-42x^5$

3、求函数$f(x)=\sqrt{1-2\lg x}$的定义域

解：$\begin{cases}1-2\lg x\geqslant 0\\ x>0\end{cases}$ $\qquad f(x)$定义域为$0<x\leqslant\sqrt{10}$

4、如图：$\angle CAD=60°$、$\angle BAE=30°$、$AB=AC=2a$求：$\triangle ABC$绕轴DE所成旋转体体积。



解：BC旋转后得园台，AC与AB旋转后得园锥。

$$V=V_{园台}-\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}a)^2a-\frac{\pi}{3}a^2(\sqrt{3}a)$$

$$=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}a+a)\cdot[(\sqrt{3}a)^2+a^2+\sqrt{3}a^2]-$$

$$-\frac{1}{3}\pi\cdot(3+\sqrt{3})a^3=\frac{4}{3}(\sqrt{3}+1)\pi a^3$$

5、化简$\dfrac{1+\cos A+\cos 2A+\cos 3A}{2\cos^2A+\cos A-1}$

解：原式$=\dfrac{(1+\cos 2A)+2\cos 2A\cdot\cos A}{\cos 2A+\cos A}$

$=\dfrac{2\cos^2 A+2\cos 2A\cdot\cos A}{\cos 2A+\cos A}=2\cos A$

6、证明：$\dfrac{1+a}{2}\cdot\dfrac{1+a^2}{2}\cdot\dfrac{1+a^3}{2}\cdots\cdots$

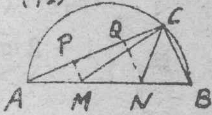
$\dfrac{1+a^n}{2}>a^{\frac{n^2+n}{4}}$（其中$a>0$，$a\neq 1$，$n\in N$）

证、左式$\geqslant a^{\frac{1}{2}}\cdot a\cdot a^{1\frac{1}{2}}\cdot\ldots\cdot a^{\frac{1}{2}n}$

$=a^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n)n}=a^{\frac{1}{4}(n^2+n)}$

二、求证、定园周上任一点到直径的两个三等分点的距离平方之和为定值。

(T2)



证：设C是定园上任一点，M、N是直径AB的三等分点，过M、N分别作BC平行线交AC于P、Q。

则$CM^2=MP^2+PC^2=(\frac{1}{3}BC)^2+(\frac{2}{3}AC)^2$

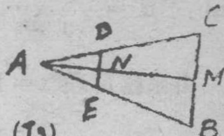
$CN^2=CQ^2+NQ^2=(\frac{2}{3}BC)^2+(\frac{1}{3}AC)^2$

$\therefore CM^2+CN^2=\frac{5}{9}BC^2+\frac{5}{9}AC^2=\frac{5}{9}(AB)^2$为定值

三、如图：在△ABC中、AB＝AC、DE∥BC、BC＝a、AM⊥BC、并且AN：NM：BC＝1：2：2、沿DE将△ADE翻折，使平面ADE与平面DEBC所成的二面角为α、（0°<α<90°），自A作MN的垂线与MN相交于O，（1）求证：AO是四棱锥A—BCDE的高，（2）求这个四棱锥体积。

解(1)证明，（如图）因DE∥BC，AN⊥DE、翻折后，DE⊥MN、DE⊥AN ∴DE⊥平面ANO

$\therefore DE \perp AO$ 又 已知$AO \perp MN$、



(T3)

$\therefore AO \perp$ 平面BCDE

即 AO是四棱锥A—BCDE的高.

（2）按已知比例、设$AN = x$

则 $NM = 2x$，$Bc = 2x$，$x = \frac{1}{2}a$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AN}{AM} = \frac{1}{3} \qquad \therefore DE = \frac{2x}{3}$$

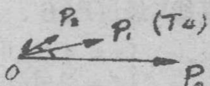
$$S_{梯形} = \frac{1}{2}(2x)(\frac{2}{3}x + 2x) = \frac{8}{3}x^2，AO = AN\sin\alpha = x\sin x$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}S_{梯形} \cdot AO = \frac{8}{9}x^3\sin\alpha = \frac{8}{9}(\frac{a}{2})^3\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{9}a^3\sin\alpha$$

四、在平面上，向量$\overrightarrow{OP}$绕O点按反时针方向旋转，每转一个定角α（$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}\pi$），其长度减半，依次记为$\overrightarrow{OP_0}$、$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}\cdots\overrightarrow{OP_n}\cdots\cdots$；第一个向量$\overrightarrow{OP_0}$的长度为a，求当$n \to \infty$时折线的长、$L = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \cdots + |P_{n-1}P_n| + \cdots$。

解：由题设、$\triangle P_0OP_1$、$\triangle P_1OP_2\cdots\cdots\triangle P_{n-1}OP_n\cdots$ 都有夹角α，



(T4)

其长度减半 $\frac{OP_1}{OP_0} = \frac{OP_2}{OP_1} = \frac{OP_3}{OP_2} = \cdots = \frac{OP_n}{OP_{n-1}} = \frac{1}{2}$，△序列是相似三角形，

于是 设 $P_0P_1 = x$，$P_1P_2 = \frac{1}{2}x$，$P_2P_3 = \frac{1}{2^2}x$、…

$P_{n-1}P_n = \frac{1}{2^n}x\cdots$

由余弦定理 $x = P_1P_0 = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \alpha^2\cos\alpha}$

$= \frac{1}{2}a\sqrt{5-4\cos\alpha}$ 当$n\to\infty$时、

折线长$L = x + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{1}{2^n}x + \cdots = x\left(1 + \frac{1}{2}\right.$

$\left.+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}x = \frac{a}{2}\sqrt{5-4\cos\alpha}$

五、(1)设复数1的6次，2次方根的集合分别是A、B、求证B是A的子集。

证：$A=\left\{\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}\quad k=0、1、2、\cdots 5\right\}$

$=\left\{1、-1、\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6};\ k=1、2、4、5\right\}$

$B=\{1、-1\}$ $\therefore B\subset A$

(2)试证：x^2+bx+c是完全平方式的充要条件是$b^2=4c$

证：必要性：若$x^2+bx+c=(x+\frac{1}{2}b)^2+(c-\frac{1}{4}b^2)$是一完全平方，则$c-\frac{1}{4}b^2=0$即$b^2=4c$；充分性：若$b^2=4c$则$x^2+bx+c=x^2+bx+\frac{1}{4}b^2=(x+\frac{1}{2}b)^2$

六、一直线L经过P(6、2)，倾角为α，它和曲线

$C:\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ 交于两点M_1、M_2

(1)写出曲线C的普通方程；(2)写出直线L的参数方程；

(3)当α为何值时，直线L与曲线C相切；

(4)当α为何值时，$|PM_1|\cdot|PM_2|$有最大值，最小值。

解：(1) C的普通方程为$\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}y^2=1$

(2) L的参数方程为$\begin{cases} x = 6 + t\cos\alpha \\ y = 2 + t\sin\alpha \end{cases}$ (t为参数)

(3) 将L代入C得$(6 + t\cos\alpha)^2 + 4(2 + t\sin\alpha)^2 = 16$

整理为：$(1 + 3\sin^2\alpha)t^2 + 4(3\cos\alpha + 4\sin\alpha)\cdot t$

$$+ 36 = 0 \qquad (*)$$

当L与C相切时(*)式的判别式$\triangle = 0$

即$16(3\cos\alpha + 4\sin\alpha)^2 - 144(1 + 3\sin^2\alpha) = 0$

整理 $4\sin\alpha(6\cos\alpha - 5\sin\alpha) = 0$ 解得$\alpha_1 = 0$

$$\alpha_2 = \mathrm{arctg}\frac{6}{5}$$

(4) 设L与C的交点坐标为$M_1(x_1、y_1)$ $M_2(x_2、y_2)$则

$|PM_1| = \sqrt{(x_1 - 6)^2 + (y_1 - 2)^2} = t_1$

同理$|PM_2| = t_2$ 于是$|PM_1|\cdot|PM_2| = t_1t_2$

由(*)式 $t_1t_2 = \dfrac{36}{1 + 3\sin^2\alpha}$

因 $0 \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{arctg}\dfrac{6}{5} < \dfrac{\pi}{2}$ L与C才有交点

$\sin\alpha$在$\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$上是增函数，故当$\alpha = 0$时，

$|PM_1|\cdot|PM_2|$有最大值36，$\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{6}{5}$时，

有最小值，等于13。

北京东城区高二（理科）数学统一练习（二）

一、1 求无穷等比数列$\sqrt{2} + 1, 1, \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}\cdots$所有项的和

解：是公比$q = \sqrt{2} - 1$的无穷递减等比数列，

$$其和\ S = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

2、已知：$\sin\alpha+\sqrt{3}\ \cos\alpha=\dfrac{4m-6}{4-m}$ 有意义，求m的取值范围。

解：左式化积 $2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{4m-6}{4-m}$

即 $\left|\dfrac{2m-3}{4-m}\right|\leq1$ 解之得 $-1\leq m\leqslant\dfrac{7}{3}$

3、已知：A(1，-2)，B(4，1)，在AB上求一点P使 $\dfrac{|AP|}{|BP|}=\frac{1}{2}$；并过P作一条直线L，它与AB所在直线相交成角为arctg 2，求直线L的方程。

解：点P为(x,y) 由定比分点公式得 $x=2$，$y=-1$

AB的斜率 $k_1=1$ 令L的斜率为k，则 $\dfrac{k-k_1}{1+k_1k}=2$

$k=-\frac{1}{3}$，L的方程为 $x+3y+1=0$

4、求值 $\dfrac{2\sin50^0+\sin100^0(1+\sqrt{3}\,tg10^0)}{\sqrt{1+\cos10^0}}$

解：原式 $=\dfrac{2\sin50^0+\cos10^0+\sqrt{3}\sin10^0}{\sqrt{1+\cos10^0}}$

$=\dfrac{2\sin50^0+2\cos50^0}{\sqrt{2}\cos5^0}=\dfrac{2\cos(50^0-45^0)}{\cos5^0}=2$

5、在实数范围内解方程组：

$$\begin{cases}3^{\frac{x-y}{2}}-3^{\frac{x-y}{4}}=72\cdots\cdots(1)\\ 5^{\lg(2y-x)}=1\quad\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

解：令 $z=3^{\frac{x-y}{4}}$，(1)化为 $z^2-z-72=0$

则 $z_1=9$ $z_2=-8$（舍去） 于是 $x-y=8$ 代入

(2)得 $Lg(y-8)=0$ $\therefore y=9$ $x=17$

二、已知$a_1 a_2 \cdots\cdots a_n$成等差数列，且公差是不等于零的实数，又方程：$a_k x^2+2a_{k+1}x+a_{k+2}=0$（k为正整数）

（1）求证：当k取不同的正整数时，得到的不同方程都有一个相同的根，并求出这个根。

（2）若这些不同的方程中的不同的根依次为α_1、α_2、α_3……，求证$\frac{1}{a_1+1}$、$\frac{1}{a_2+1}$、$\frac{1}{a_3+1}$…成等差数列

解：（1）因$a_k+a_{k+2}=2a_{k+1}$ 故方程可化为

$$a_k x^2+(a_k+a_{k+2})x+a_{k+2}=0$$

即 $(x+1)(a_k x+a_{k+2})=0$，（＊）不论k为何正整数 $x=-1$是其公共根。

（2）由（＊）式得$\alpha_k=-\frac{a_{k+2}}{a_k}$（$k=1$、$2\cdots n$）

$$\frac{1}{\alpha_k+1}=\frac{a_k}{a_k-a_{k+2}}=\frac{-a_k}{-2d}$$任取相邻二项

则$$\frac{1}{\alpha_{k+1}+1}-\frac{1}{\alpha_k+1}=-\frac{a_{k+1}}{2d}+\frac{a_k}{2d}=\frac{-d}{2d}=-\frac{1}{2}$$

故数列$\left\{\frac{1}{\alpha_{i+1}}\right\}$（$i=1$、$2\cdots n$）成等差数列。

三、中午12点，台风中心在A城正西40公里处，台风朝正东北方向运动，速度为20公里/小时，离台风中心30公里内的区域为危险区域，问A城大约在什么时候处于危险域内、（取不足近似值精确到1分钟）并问A城处于危险

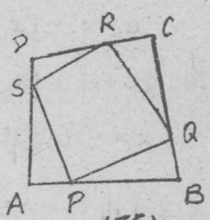
区域多长时间，(答：A城在12时55分处于危险 区域 内，且持续1小时)。

*四、P、Q、R、S四点分别由四 边形ABCD的四个顶 点A、B、C、D同时开始沿四边形各边依反时针方向以各自的速度作匀速直线运动。已知：P由A至B、R由C至D分别需要2秒钟，Q由B至C、S由D至A分别需要1秒钟，问开始运动后，经过多少时间，四边形PQRS面积最小。

解：开始运动t秒后，各点的运动距离为

$AP=\frac{t}{2}AB \qquad BQ=tBC$

$CR=\frac{t}{2}CD \qquad DS=tAD$



(75)

$S_{APs}=\frac{1}{2}AP\cdot AS\cdot sniA$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}AB(t-1)\cdot$

$1.D\cdot sinA=\frac{1}{2}t(t-1)S_{ABD}$

同理$S_{BPQ}=\frac{t}{2}(2-t)S_{ABC}$

$S_{CQR}=\frac{t}{2}(1-t)S_{BCD} \quad S_{DRS}=\frac{t}{2}(2-t)S_{ACD}$

令 S为ABCD面积 则 $S_{PQRS}=S-[\frac{t}{2}(1-t)$

$+\frac{t}{2}(2-t)]S=(t^2-\frac{3}{2}t+1)S$，当$t=\frac{3}{4}$时，

四边形PQRS面积最小。

*五、平面P内有一个园，直径为AB，过A作SA⊥平面P，C为$\overset{\frown}{AB}$上任意一点，连结SB，SC、(1)求证：平面SAC⊥平面SBC；(2)若A在SB，SC上的 射 影分别为E、F，求证：∠AEF为二面角C－SB－A 的平

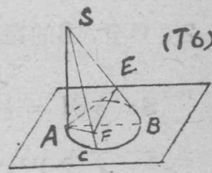
面角；（3）若$\angle ASB=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAC=\alpha$，$\angle AEF=\beta$

求证　$tg\alpha \cdot tg\beta=2$

解：1、AB是直径，$BC\perp AC$，又$SA\perp$平面P

必$BC\perp SA$，$\therefore BC\perp$平面

SAC$\therefore$ 平面SBC$\perp$平面SAC



2、按射影定义，$AF\perp SC$

$AE\perp SB$

因二平面互相垂直，SC为公共棱，故$AF\perp$平面BSC

由三垂线定理$FE\perp SB$　$\therefore\angle AEF$是二面角$C-SB-A$的平面角

3、$tg\alpha=\frac{BC}{AC}$　$tg\beta=\frac{AF}{EF}$　$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{BC\cdot AF}{AC\cdot EF}$

但$\triangle SFE\backsim\triangle SCB$　$\therefore\frac{EF}{BC}=\frac{SF}{SB}$　$\triangle SAF\backsim\triangle SCA$

$\frac{AF}{AC}=\frac{SF}{SA}$　$\therefore tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{SB}{SA}=2$（因$\angle ABS=\frac{\pi}{6}$）

六、已知抛物线$y^2=4Px$的焦点为F，过F作弦AB与X轴正方向成角为θ。

1、求证：弦AB的长$L=\frac{4P}{\sin^2\theta}$；2、求：用P和θ表示$\triangle AoB$的面积S；　3、求证：$\frac{S^2}{L}$为定值。

证：1、焦点为F(P，O)弦AB方程为$y=tg\theta(x-P)$　（1）

将(1)代入抛物线，可得

$$x^2-2P(1+2ctg^2\theta)x+P^2=0\qquad(2)$$

令　A、B坐标为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)

$$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2(1+tg^2\theta)}$$

$$=\sec\theta\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sec\theta\sqrt{4P^2(1+2ctg^2\theta)^2-4P^2}$$

$$=\sec\theta(2P)\cdot 2ctg\theta\cdot\csc\theta=\frac{4P}{\sin^2\theta}$$

2、O至AB的距离$d=\dfrac{Ptg\theta}{\sec\theta}=P\sin\theta$

$$S=\frac{1}{2}dL=\frac{1}{2}P\sin\theta\cdot\frac{4P}{\sin^2\theta}=\frac{2P^2}{\sin\theta}$$

3、$\dfrac{s^2}{L}=\left(\dfrac{2P^2}{\sin^2\theta}\right)^2\dfrac{\sin^2\theta}{4P}=P^3$(定值)

（读者可按已知条件自己绘草图）

北京西城区高二（理科）数学第二次模拟考试题

一、写出$y=\sqrt{\arcsin x}$的定义域和值域

解：因$\arcsin x\geqslant 0$故定义域为〔0,1〕值域是〔$0,\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$〕

二、一个集合由5个不同的元素组成，这个集合的子集共有多少个？（答2^5个）

三、讨论函数$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$在区间$(1,+\infty)$内的单调性

分析：注意到$f(x_2)-f(x_1)$

$$=(x_2-x_1)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)>0$$，$f(x)$单调递增

四、方程 $\sin\dfrac{\pi}{x}=1$在〔0.01,0.2〕上有多少个解？

解：$\dfrac{\pi}{x}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\qquad x=\dfrac{2}{1+4k}$（k为整数）

由$0.01\leqslant x\leqslant 0.2$得$2.25\leqslant k\leqslant 49.75$

∴k可取3到49的所有整数，共个47个解。

五、用解析法证明：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$，（见高中课本第一册第130页）

六、已知$\left(\sqrt{X}+\frac{1}{\sqrt[3]{X}}\right)^n$展开式的系数之和比

$(a+b)^{2n}$展开式的系数之和小240，求

（1）$\left(\sqrt{X}+\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^n$展开式的第三项

（2）$(a+b)^{2n}$展开式中的系数最大的项。

解：已知的两个展开式的系数和，第一个为2^n第二个为2^{2n}

则$2^{2n}-2^n=240$解得$2^n=16$或$2^n=-15$

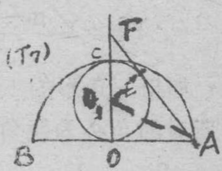
（舍去） 于是$n=4$

（1）$T_{2+1}=C_4^2X\left(\frac{1}{\sqrt[3]{X}}\right)^2=6\sqrt[3]{X}$

（2）系数最大的项是$T_{4+1}=C_8^4a^4b^4=70a^4b^4$

七、已知如图：半园O的直径AB、以与AB垂直的半径OC为直径作园O_1，过A点作园O_1的切线，其切点为E，交半园于D，交OC的延长线于F，求（1）tgA的值

（2）$\frac{FO_1}{OO_1}$的值（3）$\frac{AD}{BD}$的值



解：连O_1E，AO_1 则

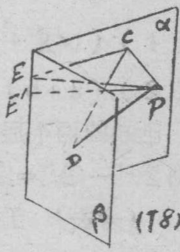
$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{O_1E}{AE}=\frac{\frac{1}{2}OC}{AO}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,A=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{FO_1}{OO_1}=\frac{FO_1}{EO_1}=\frac{1}{\sin F}=\frac{1}{\cos A}=\frac{5}{3}\qquad \frac{AD}{BD}=\mathrm{ctg}A=\frac{3}{4}$$

*八、已知二面角$\alpha-AB-\beta$等于θ：P为二面角内一点，$PC\perp\alpha$于C，$PD\perp\beta$于D、$PE\perp AB$于E、且$|PC|=m$、$|PD|=n$ （1）试证：PC、PD与PE在同一平面内，（2）分别求$|PE|$与$|CD|$

证：（1）由$PC\perp\alpha$得$AB\perp PC$，$PD\perp\beta$得$AB\perp PD$、$\therefore AB\perp$平面PCD若E在平面PCD上，过AB与PE作平面与平面PCD相交，设交点为E′，则PE′与PE均与AB垂直 $\therefore$E与E′重合$\therefore$PE在平面PCD上，即PC、PD、PE共面



(T8)

（2）由（1）证$AB\perp$平面PCD

$\therefore AB\perp CE, AB\perp DE$ 且P、C、E、D共园

则$\angle CED=\theta$ $\angle CPD=\pi-\theta$

$$\therefore CD=\sqrt{PC^2+PD^2-2PC\cdot PD\cdot\cos(\pi-\theta)}$$

$$=\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos\theta}$$

PE是四边形PCED外接园直径，设为2R，在△CDE中，用正弦定理 $CD=2R\sin\theta=PE\cdot\sin\theta$

$$\therefore PE=\frac{\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos\theta}}{\sin\theta}$$

*九、如果三角形的三边a、b、c的倒数成等差数列，则b边所对的角必为锐角，试证之。

证：由$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 得 $b=\frac{2ac}{a+c}$

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{2ac}-2ac\left(\frac{b}{2ac}\right)^2$$

$$=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{2ac}{(a+c)^2}=\frac{(a^2+c^2)(a+c)^2-4a^2c^2}{2ac(a+c)^2}$$

由$a^2+c^2\geqslant 2ac$　$\cos\beta\geqslant\dfrac{2ac[(a+c)^2-2ac]}{2ac(a+c)^2}$

$$=\frac{a^2+c^2}{(a+c)^2}>0$$

在三角形中β必为锐角。

*十、若直线$y=-\frac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$和椭园$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(1)求当直线和椭园相切时，a与b所满足的关系式，(2)在满足(1)的条件下，当椭园的面积$S=\pi ab$最大时，a和b的取值如何？切点坐标如何？

解：(1)将$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$代入$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

经整理得

$(a^2+4b^2)x^2-6a^2x+9a^2-4a^2b^2=0$ ……(1)

$\triangle=(6a^2)^2-4(a^2+4b^2)(9a^2-4a^2b^2)=0$

即$4a^4b^2+16a^2b^4=36a^2b^2$

因$a\neq 0$　$b\neq 0$　两边同除以$4a^2b^2$得

$a^2+4b^2=9$　　为所求关系式　……(2)

(2)因　$S=\pi ab$　$S^2=\pi^2a^2b^2$　……(3)

将(2)代入(3)得$S^2=\pi^2b^2(9-4b^2)$

$$=-4\pi^2\left(b^2-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{81}{16}\pi^2$$

因此当$b=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$时，S^2取得最大值，因而S取得最大值

此时　$a=\sqrt{9-4b^2}=\sqrt{9-\frac{1}{2}\cdot 9}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

代入(1)及直线$y=-\frac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$求得切点坐标为：

$x=\dfrac{3}{2}$　　$y=\frac{3}{4}$

北京宣武区高考班数学（理科）第二次练习

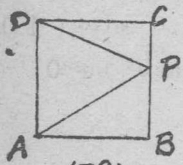
一、实数α、β是方程$x^2+2(a+1)x+2a+5=0$的两根，试求$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值。

解：令$A=(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)-2\alpha\beta+2$

将根与系数关系代入整理得$A=4(a+1)^2-4\geqslant-4$，所求最小值为-4，

二、用数学归纳法证明等比数列前n项和公式。（读者自证）

三、已知边长为1的正方形ABCD的BC边上一点P，且$AP=PC+CD$，求$\angle APD$



(T9)

解：令$PC=X$，则$AP=PC+CD$可写为$\sqrt{(1-x)^2+1}=x+1$　其解$x=\frac{1}{4}$

设$\alpha_1=\angle CPD$，$\alpha_2=\angle APB$，

$\alpha=\angle APD$　$tg\alpha_1=4$，$tg\alpha_2=\frac{4}{3}$，

$$tg\alpha=tg[\pi-(\alpha_1+\alpha_2)]=-tg(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$tg\alpha=\frac{-\left(4+\frac{4}{3}\right)}{1-\frac{4}{3}\times4}=\frac{16}{13}\quad\therefore\angle APD=arctg\alpha=arctg\frac{16}{13}$$

四、Z为虚数，证明$Z+\frac{1}{Z}$为实数的充分必要条件是$|Z|=1$

证：(充分性)若$|Z|=1$，则$Z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，

$\frac{1}{Z}=\cos\alpha-i\sin\alpha$，于是$Z+\frac{1}{Z}=2\cos\alpha\in R$(实数集)

(必要性)若$Z+\frac{1}{Z}$是实数，令$Z+\frac{1}{Z}=a$，则$Z^2-aZ+1=0$