

中學各科要覽

平面三角法

駱師曾 匡文濤編



法 角 三 面 平



2849284

編輯大意

- 一 本書依據民國二十五年教育部頒布修正課程標準編輯，將平面三角法之知識整理之，以供高中畢業會考及大學入學考試之預備。
- 一 是書為便於記憶之書，可在最短期間，得最大之成效。
- 一 是書正面載主要事項，以便學習，反面載問題之解答，以便練習後自行查對。
- 一 是書篇幅雖少，形狀雖小，但各教科書之精華，皆已採取，頗便複習。
- 一 近數年來各省市會考試題及大學入學試題，亦擇要列入，附加星號為別，以清眉目而便研究。

平面三角法要覽

目次

	頁		頁
角	1	二角和及差之正切餘切	29
三角函數相互之關係	3	二倍角之正弦餘弦	31
三角恆等式之證明(其一)	5	二倍角之正切餘切	33
三角恆等式之證明(其二)	7	三倍角之三角函數	35
三角恆等式之證明(其三)	9	倍角之三角函數之問題	37
餘角及特別角之三角函數	11	變正弦及餘弦之積爲和及差	39
簡易測量問題(其一)	13	變正弦之和及差爲積之形狀	41
簡易測量問題(其二)	15	分角之三角函數(其一)	43
任意之角	17	分角之三角函數(其二)	45
三角函數值之變化	19	正弦(或餘弦)之積與差之關係	47
二角之三角函數之關係(其一)	21	恆等式問題(其一)	49
二角之三角函數之關係(其二)	23	恆等式問題(其二)	51
二角和之正弦餘弦	25	對數之意義及公式	53
二角差之正弦餘弦	27	常用對數之意義及指標假數	55

平面三角法要覽目次

	頁		頁
有真數求真數之法	57	測量問題(其一)	93
有對數求真數之法	59	測量問題(其二)	95
有角度求三角函數之對數	61	測量問題(其三)	97
用對數解直角三角形之法	63	測量問題(其四)	99
三角形邊角之關係(其一)	65	反三角逆數(其一)	101
三角形邊角之關係(其二)	67	反三角逆數(其二)	103
三角形邊角之關係(其三)	69	反三角逆數(其三)	105
三角形邊角關係之應用問題	71	反三角逆數(其四)	107
三角形半角與邊之關係	73	三角方程式問題(其一)	109
三角形之面積	75	三角方程式問題(其二)	111
三角形之外接圓	77	三角方程式問題(其三)	113
三角形之內切圓及傍切圓之半徑	79	三角方程式問題(其四)	115
三角形之中線及角之二等分線	81	三角方程式問題(其五)	117
任意三角形之解法(其一)	83	三角方程式問題(其六)	119
任意三角形之解法(其二)	85	三角方程式問題(其七)	121
任意三角形之解法(其三)	87	消去法問題(其一)	123
任意三角形之解法(其四)	89	消去法問題(其二)	125
任意三角形之解法(其五)	91	消去法問題(其三)	127

008671

~~008670~~

角

(平面三角法 1)

測角法種類

角之單位

各單位間之關係

問 題

一直角九十等分之一曰一度，
用此為角之單位。

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

(注意) ° ' '' 為度分秒之記
號。

某角以弧度法測之，其測度為
 θ 。以六十分法測之，其測度為
 D ，則有次之關係：

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{D}{180^\circ}$$

$$\therefore \theta = \pi \times \frac{D}{180^\circ}$$

$$D = 180^\circ \times \frac{\theta}{\pi}$$

於任意之圓，取一中心角，使
其所對之弧，等於半徑，是謂
弧度，用此為角之單位。

$$1 \text{ 弧度} = \frac{2 \text{ 直角}}{\pi}$$

$$= 57^\circ 17' 44.8''$$

- (1) 0.65 直角為幾度？
- (2) $97^\circ 5' 15''$ 為幾直角？
- (3) 正三角形，正五角形，
正六角形之一內角，
各有幾度？
- (4) 某角之度數，以弧度
法表之，則其數之二
倍與原度數之和為
 $23\frac{2}{7}$ ，問此角之度數
如何？但 π 為 $\frac{22}{7}$ 。
- (5) 內角為等差級數，最
小角為 120° ，公差為
 5° ，問此為幾邊形？

十分法

東北圖書館

弧度法

(平面三角法 2)

角之問題解答

(1) $90^\circ \times 0.65 = 58.5^\circ,$

$60' \times 0.5 = 30'.$

答 $58^\circ 30'.$

(2) $97^\circ 5' 15'' \div 90^\circ$

$= 349515'' \div 324000''$

$= 1.07875.$

答 1.07875 直角.

(3) $180^\circ \div 3 = 60^\circ,$ 此乃正三角形之一角.

而正五角形之一角為

$180^\circ - 360^\circ \div 5 = 108^\circ.$

正六角形之一角為

$180^\circ - 360^\circ \div 6 = 120^\circ.$

(4) 令所求之度數為 x 度.

此以弧度表之, 則為 $\frac{x}{180}\pi.$

由題意, 得 $x + \frac{2x\pi}{180} = 23\frac{2}{7}$

令 $\pi = \frac{22}{7}.$

則 $x\left(1 + \frac{1}{90} \times \frac{22}{7}\right) = 23\frac{2}{7}.$

$\therefore x = 22\frac{1}{2}.$

答 $22^\circ 30'.$

(5) 令此多角形為 n 邊形, 則

外角之和 $= 360^\circ,$

最大外角 $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$

由等差級數之和之公式, 得

$\frac{n}{2} \{2 \times 60 - (n-1) \times 5^\circ\} = 360^\circ.$

$\therefore n = 16$ 或 $9.$

令 $n = 16,$ 則最小外角為

$60^\circ - 15 \times 5^\circ = -15^\circ.$

是 16 不適用.

$\therefore n = 9.$

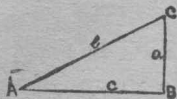
答 九邊形.

三角函數相互之關係

(平面三角法3)

定義

次之六比，曰三角函數。



設 $B=90^\circ$ ，則

$$\sin A = \frac{a}{b} = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} = \angle A \text{ 之正弦.}$$

$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \angle A \text{ 之餘弦.}$$

$$\tan A = \frac{a}{c} = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} = \angle A \text{ 之正切.}$$

$$\cot A = \frac{c}{a} = \frac{\text{底邊}}{\text{垂線}} = \angle A \text{ 之餘切.}$$

$$\sec A = \frac{b}{c} = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}} = \angle A \text{ 之正割.}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{b}{a} = \frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}} = \angle A \text{ 之餘割.}$$

基本公式

倒數關係

$$\begin{cases} \sin A \operatorname{cosec} A = 1 \dots\dots\dots(1) \\ \cos A \sec A = 1 \dots\dots\dots(2) \\ \tan A \cot A = 1 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

相除關係

$$\begin{cases} \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \dots\dots\dots(4) \\ \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

平方關係

$$\begin{cases} \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots\dots\dots(6) \\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \dots\dots(7) \\ 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \dots\dots(8) \end{cases}$$

問題

(1) $\triangle ABC$ ，其 $\angle B$ 為直角， BC ， AB 各為 3，4，試求 A 之三角函數。

*(2) 已知 $\sin A = \frac{15}{17}$ ，求 A 角其餘各函數。

*(3) 試以 $\tan A$ 表其餘諸函數。

(4) 設 $\cos A = \frac{12}{13}$ ，試求 A 之其他三角函數。

(5) 設 $\tan A = 2 + \sqrt{3}$ ，則 A 之其他三角函數如何？

(平面三角法4) 三角函數相互關係之問題解答

$$(1) \quad BC=3, AB=4, AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 5.$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin A &= \frac{3}{5}, & \cos A &= \frac{4}{5}, \\ \tan A &= \frac{3}{4}, & \cot A &= \frac{4}{3}, \\ \sec A &= \frac{5}{4}, & \operatorname{cosec} A &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$*(2) \quad \sin A = \frac{15}{17}, \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}.$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{15}{17} \times \frac{17}{8} = \frac{15}{8}.$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{8}{15}.$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{17}{8}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{17}{15}.$$

$$*(3) \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}.$$

$$\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}.$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}.$$

$$\sin A = \tan A \cos A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}.$$

$$(4) \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{12}{5}.$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{13}{12}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{13}{5}.$$

(5) 與(3)同樣得

$$\cot A = 2 - \sqrt{3}, \quad \sec A = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{cosec} A = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

證

法

問

題

(1) 變複雜一邊之形等於他一邊之法.

例 試證明下式:

$$\tan^2 A + \cot^2 A - (\sin^2 A \tan^2 A + \cos^2 A \cot^2 A) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{(證) 左邊} &= \tan^2 A - \sin^2 A \tan^2 A + \cot^2 A \\ &\quad - \cos^2 A \cot^2 A \end{aligned}$$

$$= \tan^2 A(1 - \sin^2 A) + \cot^2 A(1 - \cos^2 A)$$

$$= \tan^2 A \cos^2 A + \cot^2 A \sin^2 A$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cos^2 A + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \sin^2 A$$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A$$

$$= 1.$$

試證明次之恆等式:

$$(1) \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta.$$

$$*(2) \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) \left(\frac{1 + \sec x}{1 + \operatorname{cosec} x} \right) = \tan x.$$

$$*(3) \cot^2 A - \cos^2 A = \cos^2 A \cot^2 A.$$

$$(4) (p \cos A + q \sin A)^2 + (q \cos A - p \sin A)^2 = p^2 + q^2.$$

$$(5) 2(\sin^3 A + \cos^3 A) - 3(\sin^4 A + \cos^4 A) + 1 = 0.$$

$$(6) \operatorname{cosec} a \sec^2 a + \sin a \tan^2 a - 2 \tan a \sec a = \operatorname{cosec} a - \sin a.$$

(平面三角法6) 三角恆等式證明之問題解答(其一)

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 左邊} &= \frac{(1 + \sin \theta - \cos \theta)^2 + (1 + \sin \theta + \cos \theta)^2}{(1 + \sin \theta)^2 - \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{2\{(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta\}}{1 + 2\sin \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{2(2 + 2\sin \theta)}{2\sin \theta + 2\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *(2) \text{ 左邊} &= \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{\cos x}}{1 + \frac{1}{\sin x}} \right) \\
 &= \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} \right) \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \tan x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *(3) \text{ 左邊} &= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} - \cos^2 A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A \cos^2 A}{\sin^2 A} \\
 &= \frac{\cos^2 A(1 - \sin^2 A)}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 A \cos^2 A}{\sin^2 A} \\
 &= \cos^2 A \cot^2 A.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 左邊} &= p^2 \cos^2 A + q^2 \sin^2 A + q^2 \cos^2 A + p^2 \sin^2 A \\
 &= p^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + q^2(\sin^2 A + \cos^2 A) \\
 &= p^2 + q^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \text{ 左邊} &= 2(\sin^2 A + \cos^2 A)(\sin^4 A - \sin^2 A \cos^2 A \\
 &\quad + \cos^4 A) - 3(\sin^4 A + \cos^4 A) + 1 \\
 &= 2\{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 3\sin^2 A \cos^2 A\} \\
 &\quad - 3\{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 2\sin^2 A \cos^2 A\} + 1 \\
 &= 2(1 - 3\sin^2 A \cos^2 A) \\
 &\quad - 3(1 - 2\sin^2 A \cos^2 A) + 1 \\
 &= 2 - 6\sin^2 A \cos^2 A - 3 + 6\sin^2 A \cos^2 A + 1 \\
 &= 3 - 3 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \text{ 左邊} &= \frac{1}{\sin a \cos^2 a} + \frac{\sin a \sin^2 a}{\cos^2 a} - \frac{2 \sin a}{\cos^2 a} \\
 &= \frac{1 - 2\sin^2 a + \sin^4 a}{\sin a \cos^2 a} = \frac{(1 - \sin^2 a)^2}{\sin a \cos^2 a} \\
 &= \frac{\cos^4 a}{\sin a \cos^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\sin a} = \frac{1 - \sin^2 a}{\sin a} \\
 &= \frac{1}{\sin a} - \sin a = \operatorname{cosec} a - \sin a.
 \end{aligned}$$

證

法

(2) 分別變化兩邊之形而比較其結果之法。

例 $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A$, 試證之。

$$\begin{aligned}
 \text{(證)} \quad \sin^4 A + \cos^4 A &= \sin^4 A + (\cos^2 A)^2 \\
 &= \sin^4 A + (1 - \sin^2 A)^2 \\
 &= \sin^4 A + 1 - 2 \sin^2 A + \sin^4 A \\
 &= 1 - 2 \sin^2 A + 2 \sin^4 A. \\
 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A &= 1 - 2 \sin^2 A (1 - \sin^2 A) \\
 &= 1 - 2 \sin^2 A + 2 \sin^4 A.
 \end{aligned}$$

故原式之兩邊相等。

問

題

試證明次之各等式：

*(1) $\sec A - \cos A = \sin A \tan A$.

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) \\
 = (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(3)} \quad (\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) \\
 = \sec A + \operatorname{cosec} A
 \end{aligned}$$

$$\text{(4)} \quad (1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A).$$

$$\begin{aligned}
 \text{(5)} \quad (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) \\
 = (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A).
 \end{aligned}$$

(平面三角法 8) 三角恆等式證明之問題解答(其二)

$$\begin{aligned} * (1) \text{ 左邊} &= \frac{1}{\cos A} - \cos A = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} \\ &= \frac{\sin^2 A}{\cos A} \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = \sin A \left(\frac{\sin A}{\cos A} \right) = \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

故原式之兩邊相等。

$$\begin{aligned} (2) \text{ 左邊} &= (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) \\ &= (2 - \cos^2 A) \left(1 + \frac{2 \cos^2 A}{\sin^2 A} \right) \\ &= (1 + \sin^2 A) \frac{\sin^2 A + 2 \cos^2 A}{\sin^2 A} \\ &= \frac{(1 + \sin^2 A)(1 + \cos^2 A)}{\sin^2 A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右邊} &= \left(2 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \right) (1 + \cos^2 A) \\ &= \frac{2 \sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A} (1 + \cos^2 A) \\ &= \frac{(1 + \sin^2 A)(1 + \cos^2 A)}{\sin^2 A} \end{aligned}$$

故原式之左右相等。

$$\begin{aligned} (3) \text{ 左邊} &= (\sin A + \cos A) \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \right) \\ &= (\sin A + \cos A) \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A} = \frac{\sin A + \cos A}{\sin A \cos A} \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\sin A} = \frac{\sin A + \cos A}{\sin A \cos A}$$

∴ 左邊 = 右邊。

$$\begin{aligned} (4) \text{ 左邊} &= 1 + \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A + 2 \cos A + 2 \sin A \cos A \\ &= 1 + 1 + 2 \sin A + 2 \cos A + 2 \sin A \cos A \\ &= 2(1 + \sin A + \cos A + \sin A \cos A) \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = 2(1 + \sin A + \cos A + \sin A \cos A)$$

∴ 左邊 = 右邊。

$$\begin{aligned} (5) \text{ 左邊} &= (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) \\ &= (1 + \sin^2 A)(2 \operatorname{cosec}^2 A - 1) = (1 + \sin^2 A) \left(\frac{2}{\sin^2 A} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{\sin^2 A} + 2 - 1 - \sin^2 A = \frac{2}{\sin^2 A} + \cos^2 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右邊} &= (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A) = (1 + \operatorname{cosec}^2 A)(1 + \cos^2 A) \\ &= 1 + \frac{1}{\sin^2 A} + \cos^2 A + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{2}{\sin^2 A} + \cos^2 A \end{aligned}$$

∴ 左邊 = 右邊。

證	法	問	題
(3) 變公式之形作一新式, 又變新式之形作一既知之恆等式之法.		試證次之恆等式:	
例 1. $1 + \sec^4 A - \tan^4 A = 2 \sec^2 A$, 試證之.		(1) $\operatorname{cosec}^4 A + \cot^4 A$	$= 1 + 2 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A$.
(証) 公式 $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$.		(2) $\tan^2 x \sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x$.	
$\therefore 1 - \sec^2 A = -\tan^2 A$.		(3) $\frac{\tan^2 A - \cot^2 A}{\sec A + \operatorname{cosec} A} = \sec A - \operatorname{cosec} A$.	
$\therefore 1 - 2 \sec^2 A + \sec^4 A = \tan^4 A$.		(4) $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2$.	
$\therefore 1 + \sec^4 A - \tan^4 A = 2 \sec^2 A$.			
例 2. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A}$, 試證之.			
(証) 欲證此恆等式, 但證次式可也:			
$(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A) = 1$.			
$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$.			
$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$.			
然此爲公式, 故原式之兩邊相等.			

(平面三角法 10) 三角恆等式證明之問題解答(其三)

(1) $\operatorname{cosec}^4 A + \cot^4 A = 1 + 2 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A$.

欲證上式,但證次式可也:

$$\operatorname{cosec}^4 A + \cot^4 A - 2 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A = 1.$$

$$(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)^2 = 1.$$

$$(1 + \cot^2 A - \cot^2 A)^2 = 1.$$

$$1 = 1.$$

此足證原式之左右相等.

(2) $\tan^2 x \sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x$.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x.$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$$

∴ 原式成立.

(3) 將原式變形為

$$\tan^2 A - \cot^2 A = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A.$$

$$(1 + \tan^2 A) - (1 + \cot^2 A) = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A.$$

$$\sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A.$$

此足證明原式之左右相等.

(4) $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2$.

變其形為

$$\frac{(1 + \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = (\tan \theta + \sec \theta)^2.$$

$$\frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2.$$

$$\frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2.$$

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = (\sec \theta + \tan \theta)^2.$$

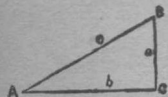
$$(\sec \theta + \tan \theta)^2 = (\sec \theta + \tan \theta)^2.$$

∴ 原式成立.

餘角及特別角之三角函數

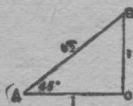
(平面三角法 11)

餘角之公式



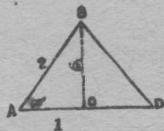
命 $C=90^\circ$, 則
 $B=90^\circ-A$,
 $\sin B = \frac{b}{c}$.
 $\therefore \sin(90^\circ-A) = \frac{b}{c}$.
 又 $\cos A = \frac{b}{c}$.
 $\therefore \sin(90^\circ-A) = \cos A$.
 又 $\cos(90^\circ-A) = \sin A$.
 $\tan(90^\circ-A) = \cot A$.
 $\cot(90^\circ-A) = \tan A$.
 $\sec(90^\circ-A) = \operatorname{cosec} A$.
 $\operatorname{cosec}(90^\circ-A) = \sec A$.

45°之三角函數



$C=90^\circ$
 $A=45^\circ$
 設 $AC=1$, 則
 $AB=\sqrt{2}$.
 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 $\tan 45^\circ = 1$.
 $\cot 45^\circ = 1$.
 $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$.
 $\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$.

60°, 30°之三角函數



$\triangle ABD$ 爲正三角形,
 令 $AC=CD=1$, 則
 $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$.
 $\angle BAC=60^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$.
 $\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$.
 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$.
 $\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$.
 $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$.
 $\sec 60^\circ = 2 = \operatorname{cosec} 30^\circ$.
 $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ$.

問 題

- 試求次式之值:
 $(\sin 30^\circ + \sin 45^\circ)$
 $\times (\tan 60^\circ + \cot 30^\circ)$
 $- 4 \sec 45^\circ (\operatorname{cosec} 60^\circ$
 $- \sec 30^\circ)$.
- 試求次式之值:
 $\sin^2(A+45^\circ) \sin^2(45^\circ-A)$.
- 試證 式:
 $\cot 60^\circ(1 + \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$
 $= \cos 60^\circ + \sin 60^\circ$.
- 試化簡下式:
 $\sin(90^\circ-A) \cot(90^\circ-A)$
- 試求下式中 x 之值:
 $\sin 30^\circ = x \cot 60^\circ$.

(平面三角法 12) 餘角及特別角之三角函數之問題解答

$$\begin{aligned} (1) \quad & (\sin 30^\circ + \sin 45^\circ)(\tan 60^\circ + \cot 30^\circ) \\ & - 4 \sec 45^\circ(\operatorname{cosec} 60^\circ - \sec 30^\circ) \\ & = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) - 4 \times \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ & = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\sqrt{3} - 0 \\ & = \frac{(1 + \sqrt{2}) \times 2\sqrt{3}}{2} \\ & = \sqrt{3} + \sqrt{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sin^2(A + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - A) \\ & = \sin^2(A + 45^\circ) + \cos^2\{90^\circ - (45^\circ - A)\} \\ & = \sin^2(A + 45^\circ) + \cos^2(45^\circ + A) \\ & = \sin^2(A + 45^\circ) + \cos^2(A + 45^\circ) \\ & = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \cot 60^\circ(1 + \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \\ & = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ & = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \sin(90^\circ - A) \cot(90^\circ - A) \\ & = \cos A \tan A \\ & = \cos A \frac{\sin A}{\cos A} \\ & = \sin A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad & \sin 30^\circ = x \cot 60^\circ. \\ & \frac{1}{2} = x \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \therefore \quad & x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$