现代物理基础丛书 55

物理学中的数学方法

王怀玉 著

科学出版社

现代物理基础丛书　55

物理学中的数学方法

王怀玉　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了物理学科研工作所需的数学知识和相应的数学基础，包括10章内容，分别是变分法、希尔伯特空间、二阶线性常微分方程、贝塞尔函数、狄拉克δ函数、格林函数、范数、积分方程、数论在物理逆问题中的应用和任意维空间的基本方程. 本书内容与本科阶段已经学过的数理方法衔接，并尽可能地反映最新的科研成果. 本书对概念的说明与公式的推导力求详尽全面，内容叙述清楚，便于读者学习. 各章末尾大量的习题有助于读者巩固和扩展正文中学到的知识内容.

本书可作为大学物理系和理工科各专业的本科高年级学生和研究生的教材或参考书，也可供高校教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的数学方法/王怀玉著. —北京：科学出版社，2013
(现代物理基础丛书；55)

ISBN 978-7-03-036788-4

Ⅰ. ①物… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①数学物理方法 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 037407 号

责任编辑：钱 俊 鲁永芳／责任校对：李 影
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2013 年 3 月第一次印刷 印张：39 1/4
字数：769 000

定价：168.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书主要是为非数学专业的理工科高年级大学生、研究生和科研工作者编写的.

本书以作者历年来为物理系研究生讲授《物理学中的数学方法》课程的讲稿为基础写作. 在写作过程中, 作者尽力使本书能够面向理工科的本科高年级学生和研究生, 即对物理系和非物理系都适用, 也尽量使本书可以作为科研工作者的参考书.

作者假定, 读者已经学习了线性代数、复变函数和数学物理方法等基本内容, 作者称之为前接内容. 作者在授课过程中了解到, 来自不同高校的学生所学过的前接内容不尽相同, 并且不同学生对前接内容的掌握程度也参差有别. 因此, 作者在写作本书时特别注意与前接内容的衔接, 让读者带有回顾性地进入本书内容, 希望使读者学习起来感到轻松一些. 只有最后 4 章完全是新的内容. 本书的内容也尽量兼顾到教学过程中学生提出的问题. 对于举例中涉及的物理方面的内容, 作者假定读者已经了解普通物理、理论力学、电动力学和量子力学的基本知识.

对与数学相关的基础理论, 作者叙述时注重逻辑的严密性和条理性, 同时尽量做到浅显易懂. 作者力图把一些基本概念及其相互之间的关系讲清楚. 对于公式, 尽可能给出较为详细的推导过程. 凡是篇幅过长的证明, 或者所需要的知识内容超出本书的范围的证明, 一般都省略其过程. 本书涉及的数学比较宽泛, 但是不包括群论的内容, 因为已经有一些专门论述群论及其应用的基础理论读物.

本书引用了一些物理学中的例子, 并尽量吸纳一些最新的研究成果, 包括一些作者自己的科研成果.

本书前 8 章中的绝大部分内容是教科书上已经比较成熟的内容. 不过, 作者认为有必要用更有条理的方式重新叙述, 使读者更容易理解掌握. 尽量把知识点讲清楚. 例如, 对于伴随微分方程的内容, 一些英文的教科书和文献有所涉及, 但是作者认为讲得还不够清楚. 因此, 作者在第 2、3、6 章中, 补充了这方面的内容. 这样, 就构成了对伴随微分方程的全面叙述. 作者自认为, 本书把这方面的内容讲清楚了. 又如, 将格林函数的镜像法的原理做了介绍. 这样, 读者在实际应用时就不是光靠猜想来得到镜像点了.

最后两章是力图既介绍数学的基础知识, 又是将有关的新的科研进展反映到教科书中的一个尝试.

第 9 章介绍数论的基础知识及其在物理学与材料学等方面的应用. 这方面的应用是中国人的首创. 作者认为应该把这一巧妙的方法介绍给大家. 这一章的数

学基础相对简单, 却能够给出有用且比较普遍的结果. 在比较基础的教科书中, 鲜见中国人的如此经典而又系统的工作. 增添的这一章内容, 应该是这方面的一种弥补.

第 10 章介绍了任意维空间的一些基本的方程. 现代物理学的研究已不仅限于人们生活的三维实空间和一维时间, 而且也不限于欧几里得空间. 本书力图以求解二阶常微分方程作为起点, 引入关于任意维空间的一些基本知识. 利用连带盖根鲍尔方程及其解连带盖根鲍尔多项式, 使我们清楚地了解了任意维欧几里得空间中角动量量子数的取值和投影关系. 作者还运用了赝球坐标系的概念. 尽管是在讨论欧几里得空间时引入的, 但是显然, 对于某些非欧几里得空间的讨论也是非常有用的. 作者以最浅显的语言, 引入了度规张量的概念, 可以不需要借助对称性也就是群论的语言. 以这样一种方式, 作者认为是易于让初学者接受的. 最后, 还针对正在进行研究的德西特空间质量问题的物理含义从几何的角度给出一种解释.

作者首先要感谢陈难先院士. 第 9 章介绍的数论在物理学中的应用都来自于陈先生的原创性工作. 承蒙陈先生在他的专著出版之前就让作者阅读手稿. 作者同时要感谢陈先生的博士生龙遥、蔡进、赵寒月和研究组的申江教授的讨论. 作者也要感谢王崇愚院士给予的指导和帮助.

作者还要感谢以下各位教授: 清华大学物理系的朱嘉麟, 首都师范大学物理系的周云松, 北京大学物理系的荀坤和韩汝珊, 山东大学物理系的仝殿民和郑雨军, 湖南大学物理系的余亚斌, 北京师范大学物理系的周彬. 多年来他们与作者在数学和物理方面的许多讨论和对作者的各种帮助使作者受益匪浅, 尤其是在写作第 10 章时, 与周彬有过仔细的讨论. 作者感谢中山大学物理系李超博士后的有益讨论.

作者还要感谢家人苗青、苗卉、苗寄春和王念慈的长期支持和帮助.

最后, 作者要特别感谢陆修崑老师. 作者就读常州戚墅堰中学时, 他是作者的数学老师. 回想起 1972 年, 作者还在读初二时, 陆老师就主动借了一本微积分的教科书让作者学习, 并且及时答疑, 这使得作者能够在那样的年代里就比较早地接触到高等数学的一些知识. 此外, 从陆老师借给作者的其他书籍和直接的传授中, 作者还学到一些不列入当时的数学教科书范围的内容. 而且, 作者在中学度过的四年半的时间里, 陆老师自始至终担任作者所在班级的班主任. 因此, 陆老师除了传授知识, 也和全班同学建立了深厚的师生情谊. 自 1975 年中学毕业后至今, 尽管辗转各地, 作者与陆老师的联系未曾中断, 不断地在与陆老师的交流中受到教益. 本书也是作者作为学生向陆老师的一个汇报.

感谢科学出版社的钱俊编辑为出版本书而做的大量工作.

写作本书时, 涉及的有些科研工作得到国家自然科学基金 (课题编号 61275028 和 11074145) 和国家重大科学研究计划 (课题号 2012CB927402) 的资助, 在此一并

感谢. 作者还要感谢薛其坤院士为出版本书提供的大力支持.

书中内容如有疏漏或者不当之处, 欢迎读者批评指正.

王怀玉

2012 年 3 月谨识于清华园

目　　录

第1章 变 分 法

变分法是数学物理中的一种重要方法, 它研究某类特殊的变量 —— 泛函的极大值和极小值问题. 这里所讨论的只是变分法的一些最基本的内容以及一些应用.

1.1 泛函和泛函的极值问题

1.1.1 泛函的概念

下面先从几个最简单的例子引进泛函的概念.

例 1 设已给 x 轴上两点 $x = x_0$ 和 $x = x_1$, $y = y(x)$ 是定义在区间 $[x_0, x_1]$ 上的有连续一阶导数的函数, 则曲线 $y = y(x)$ 的长为

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

当函数 $y(x)$ 改变成另一函数 $y_1(x)$ 时, $l[y(x)]$ 也随之改变成代表函数 $y_1(x)$ 的曲线在 $[x_0, x_1]$ 上的弧长 $l[y_1(x)]$. 这就是说, 由式 (1.1.1) 定义的变量 l 依赖于“整个函数” $y(x)$.

定义 1 具有某种共同性质的函数集, 称为**函数类**.

例如, 把在区间 $[x_0, x_1]$ 上连续的函数的集合记为 $C[x_0, x_1]$. 把在区间 $[x_0, x_1]$ 上有连续一阶导数的函数称为在 $[x_0, x_1]$ 上的 C_1 类函数, 这类函数的集合记为 $C_1[x_0, x_1]$. 以此类推, 把在区间 $[x_0, x_1]$ 上有连续 n 阶导数的函数称为此区间上的 C_n 类函数, 这类函数的集合记为 $C_n[x_0, x_1]$. 如果一个函数 $y(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上 n 次连续可导, 它就属于 $C_n[x_0, x_1]$, 简记为 $y(x) \in C_n$. 这一记号也用于多元函数, 如 $z(x, y) \in C_2(D)$, 就意味着函数 $z(x, y)$ 在域 D 上有连续的二阶偏导数.

例 2 设 D 是平面上的已给区域, 函数 $z(x, y) \in C_1(D)$, 那么与之相应的曲面面积为

$$S[z(x, y)] = \iint\limits_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.2}$$

显然, 变量 S 也是依赖于“整个函数” $z(x, y)$ 的.

现在引进泛函的概念.

定义 2 设 R 是一数域, 设 Y 是已给定的某函数集, 这一集合记为 $\{y(x)\}$, 如果对于 Y 中的每一个函数 $y(x)$, 有变量 $J \in R$ 的值与之对应, 那么就说变量 J 是

函数 $y(x)$ 的**泛函**, 记为 $J=J[y(x)]$, 而此函数集称为泛函 $J[y(x)]$ 的**定义域**, 有时也称为泛函的**容许函数**. 简言之, 泛函是函数集 Y 到数域 R 上的一个映射, 映射的自变元是一个函数, 而属于 Y 的每一个函数 $y(x)$ 称为容许函数. 读者不难自己类似地给出依赖于多个函数的泛函的定义.

按此定义, 积分式 (1.1.1) 和式 (1.1.2) 分别是在 $C_1[x_0,x_1]$ 和 $C_1(D)$ 上的泛函.

例 3　傅里叶变换

$$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

就是一个泛函. 这个泛函以 k 为参量. 一旦确定了 k 之后, 对于每一个函数 $f(x)$ 都确定了泛函的一个数值. 函数 $f(x)$ 就是泛函的容许函数. 可以把这个泛函看成自变量 k 的函数, 记做 $F(k)$, 但是 $F(k)$ 的数值并不由函数的定义给出, 而是按照上式根据函数 $f(x)$ 的具体形式给出.

1.1.2　泛函的极值问题

1. *有关泛函极值的概念*

变分法的基本问题是关于泛函的极值问题. 例如, 1696 年由约翰 • 伯努利提出的, 并且对变分法的发展有过重大影响的**最速降线问题**(又称**捷线问题**): 在铅直平面内, 所有连接两定点 A、B 的曲线中, 求出一条曲线来, 使初速为零的质点在重力作用下, 自 A 点沿着这条曲线下落到 B 点所需时间最短 (介质的摩擦和阻力不计).

首先, 若单纯从路程的角度, A 点到 B 点的直线路程是最短的, 但是因为下滑过程并不能较快获得很大的速度, 所以所需时间不是最短的.

如图 1.1 所示, 以 A 点为坐标原点, Ox 轴取水平方向, Oy 轴铅直向下. 设 $y=y(x)$ 是连接点 $A(0,0)$ 和点 $B(a,b)$ 的一条光滑曲线, 质点沿这条曲线下滑. 由于曲线是光滑的, 在质点运动的切线方向上不受力; 而法向作用力只改变运动速

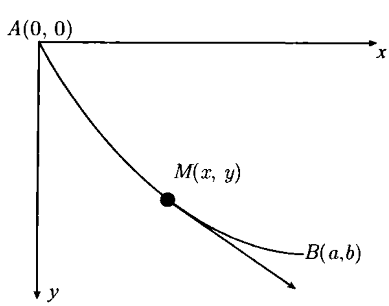

图 1.1

度的方向, 不改变速度的大小. 因初速度为零, 故质点下滑到任意点 $M(x,y)$ 的速率为

$$v=\sqrt{2gy} \tag{1.1.3}$$

其中 g 是重力加速度.

若以 S 表示曲线的弧长, $\mathrm{d}t$ 表示时间的微分, 则

$$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.4}$$

所以

$$\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1.1.5}$$

由此可得质点沿着曲线 $y=y(x)$ 自 A 点下滑到 B 点所需的时间 T 为

$$T[y(x)]=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1.1.6}$$

这样, 最速降线问题的数学提法是: 求一条满足边界条件

$$y(0)=0,\quad y(a)=b \tag{1.1.7}$$

的曲线 $y=y(x)$, 使得泛函 $T[y(x)]$ 取最小值.

下面给出泛函极值以类似于函数的极大极小值的定义. 先给出曲线 $y=y(x)$ 的 ε-邻域的概念.

定义 3 定义在 $[x_0,x_1]$ 上的曲线 $y=y(x)$ 的 **ε-邻域**是指适合下列条件的一切可能的曲线 $y=y_1(x)$ (图 1.2): 它在整个区间 $[x_0,x_1]$ 上, 满足不等式

$$|y_1(x)-y(x)|\leqslant\varepsilon \tag{1.1.8}$$

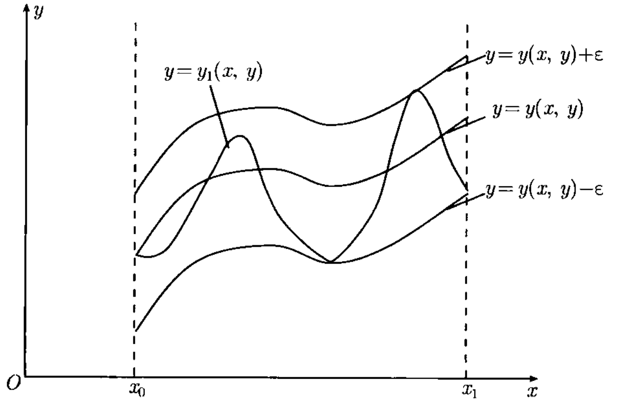

图 1.2