

现代物理基础丛书

55

物理学中的数学方法

王怀玉 著



科学出版社

现代物理基础丛书 55

物理学中的数学方法

王怀玉 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了物理学科研工作所需的数学知识和相应的数学基础,包括10章内容,分别是变分法、希尔伯特空间、二阶线性常微分方程、贝塞尔函数、狄拉克 δ 函数、格林函数、范数、积分方程、数论在物理逆问题中的应用和任意维空间的基本方程.本书内容与本科阶段已经学过的数理方法衔接,并尽可能地反映最新的科研成果.本书对概念的说明与公式的推导力求详尽全面,内容叙述清楚,便于读者学习.各章末尾大量的习题有助于读者巩固和扩展正文中学到的知识内容.

本书可作为大学物理系和理工科各专业的本科高年级学生和研究生的教材或参考书,也可供高校教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的数学方法/王怀玉著. —北京: 科学出版社, 2013

(现代物理基础丛书; 55)

ISBN 978-7-03-036788-4

I. ①物… II. ①王… III. ①数学物理方法 IV. ①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第037407号

责任编辑: 钱 俊 鲁永芳/责任校对: 李 影

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年3月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013年3月第一次印刷 印张: 39 1/4

字数: 769 000

定价: 168.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

本书主要是为非数学专业的理工科高年级大学生、研究生和科研工作者编写的。

本书以作者历年来为物理系研究生讲授《物理学中的数学方法》课程的讲稿为基础写作。在写作过程中，作者尽力使本书能够面向理工科的本科高年级学生和研究生，即对物理系和非物理系都适用，也尽量使本书可以作为科研工作者的参考书。

作者假定，读者已经学习了线性代数、复变函数和数学物理方法等基本内容，作者称之为前接内容。作者在授课过程中了解到，来自不同高校的学生所学过的前接内容不尽相同，并且不同学生对前接内容的掌握程度也参差有别。因此，作者在写作本书时特别注意与前接内容的衔接，让读者带有回顾性地进入本书内容，希望使读者学习起来感到轻松一些。只有最后 4 章完全是新的内容。本书的内容也尽量兼顾到教学过程中学生提出的问题。对于举例中涉及的物理方面的内容，作者假定读者已经了解普通物理、理论力学、电动力学和量子力学的基本知识。

对与数学相关的基础理论，作者叙述时注重逻辑的严密性和条理性，同时尽量做到浅显易懂。作者力图把一些基本概念及其相互之间的关系讲清楚。对于公式，尽可能给出较为详细的推导过程。凡是篇幅过长的证明，或者所需要的知识内容超出本书的范围的证明，一般都省略其过程。本书涉及的数学比较宽泛，但是不包括群论的内容，因为已经有一些专门论述群论及其应用的基础理论读物。

本书引用了一些物理学中的例子，并尽量吸纳一些最新的研究成果，包括一些作者自己的科研成果。

本书前 8 章中的绝大部分内容是教科书上已经比较成熟的内容。不过，作者认为有必要用更有条理的方式重新叙述，使读者更容易理解掌握。尽量把知识点讲清楚。例如，对于伴随微分方程的内容，一些英文的教科书和文献有所涉及，但是作者认为讲得还不够清楚。因此，作者在第 2、3、6 章中，补充了这方面的内容。这样，就构成了对伴随微分方程的全面叙述。作者自认为，本书把这方面的内容讲清楚了。又如，将格林函数的镜像法的原理做了介绍。这样，读者在实际应用时就不是光靠猜想来得到镜像点了。

最后两章是力图既介绍数学的基础知识，又是将有关的新的科研进展反映到教科书中的一个尝试。

第 9 章介绍数论的基础知识及其在物理学与材料学等方面的应用。这方面的应用是中国人的首创。作者认为应该把这一巧妙的方法介绍给大家。这一章的数

学基础相对简单, 却能够给出有用且比较普遍的结果. 在比较基础的教科书中, 鲜见中国人的如此经典而又系统的工作. 增添的这一章内容, 应该是这方面的一种弥补.

第 10 章介绍了任意维空间的一些基本的方程. 现代物理学的研究已不仅限于人们生活的三维实空间和一维时间, 而且也不限于欧几里得空间. 本书力图以求解二阶常微分方程作为起点, 引入关于任意维空间的一些基本知识. 利用连带盖根鲍尔方程及其解连带盖根鲍尔多项式, 使我们清楚地了解了任意维欧几里得空间中角动量量子数的取值和投影关系. 作者还运用了贗球坐标系的概念. 尽管是在讨论欧几里得空间时引入的, 但是显然, 对于某些非欧几里得空间的讨论也是非常有用的. 作者以最浅显的语言, 引入了度规张量的概念, 可以不需要借助对称性也就是群论的语言. 以这样一种方式, 作者认为是易于让初学者接受的. 最后, 还针对正在进行的研究的德西特空间质量问题的物理含义从几何的角度给出一种解释.

作者首先要感谢陈难先院士. 第 9 章介绍的数论在物理学中的应用都来自于陈先生的原创性工作. 承蒙陈先生在他的专著出版之前就让我阅读手稿. 作者同时要感谢陈先生的博士生龙遥、蔡进、赵寒月和研究组的申江教授的讨论. 作者也要感谢王崇愚院士给予的指导和帮助.

作者还要感谢以下各位教授: 清华大学物理系的朱嘉麟, 首都师范大学物理系的周云松, 北京大学物理系的荀坤和韩汝珊, 山东大学物理系的仝殿民和郑雨军, 湖南大学物理系的余亚斌, 北京师范大学物理系的周彬. 多年来他们与作者在数学和物理方面的许多讨论和对作者的各种帮助使作者受益匪浅, 尤其是在写作第 10 章时, 与周彬有过仔细的讨论. 作者感谢中山大学物理系李超博士后的有益讨论.

作者还要感谢家人苗青、苗卉、苗寄春和王念慈的长期支持和帮助.

最后, 作者要特别感谢陆修崑老师. 作者就读常州戚墅堰中学时, 他是作者的数学老师. 回想起 1972 年, 作者还在读初二时, 陆老师就主动借了一本微积分的教科书让作者学习, 并且及时答疑, 这使得作者能够在那样的年代里就比较早地接触到高等数学的一些知识. 此外, 从陆老师借给作者的其他书籍和直接的传授中, 作者还学到一些不列入当时的数学教科书范围的内容. 而且, 作者在中学度过的四年半的时间里, 陆老师自始至终担任作者所在班级的班主任. 因此, 陆老师除了传授知识, 也和全班同学建立了深厚的师生情谊. 自 1975 年中学毕业后至今, 尽管辗转各地, 作者与陆老师的联系未曾中断, 不断地在与陆老师的交流中受到教益. 本书也是作者作为学生向陆老师的一个汇报.

感谢科学出版社的钱俊编辑为出版本书而做的大量工作.

写作本书时, 涉及的有些科研工作得到国家自然科学基金 (课题编号 61275028 和 11074145) 和国家重大科学研究计划 (课题号 2012CB927402) 的资助, 在此一并

感谢. 作者还要感谢薛其坤院士为出版本书提供的大力支持.
书中内容如有疏漏或者不当之处, 欢迎读者批评指正.

王怀玉

2012 年 3 月谨识于清华园

目 录

前言

第 1 章 变分法	1
1.1 泛函和泛函的极值问题	1
1.1.1 泛函的概念	1
1.1.2 泛函的极值问题	2
1.2 泛函的变分和最简单情形的欧拉方程	5
1.2.1 泛函的变分	5
1.2.2 最简单情形的欧拉方程	9
1.3 多个函数和多个自变量的情形	13
1.3.1 多个函数	13
1.3.2 多个自变量	15
1.4 泛函的条件极值问题	17
1.4.1 等周问题	17
1.4.2 测地线问题	21
1.5 自然边界条件	23
1.6 变分原理	26
1.6.1 经典力学的变分原理	27
1.6.2 量子力学的变分原理	32
1.7 变分法在物理学中的应用	33
1.7.1 在经典物理中的应用	34
1.7.2 在量子力学中的应用	41
习题	47
附录 1A 函数的极值问题	50
参考文献	52
第 2 章 希尔伯特空间	53
2.1 线性空间、内积空间和希尔伯特空间	53
2.1.1 线性空间	53
2.1.2 内积空间	58
2.1.3 希尔伯特空间	67

2.2	内积空间中的算子	69
2.2.1	算子与伴随算子	69
2.2.2	自伴算子	76
2.2.3	非齐次线性代数方程组有解的择一定理	83
2.3	完备的正交归一函数集合	84
2.3.1	收敛的类别	84
2.3.2	函数集合的完备性	86
2.3.3	N 维数域空间和希尔伯特函数空间	90
2.3.4	正交多项式	91
2.4	魏尔斯特拉斯定理与多项式逼近	95
2.4.1	魏尔斯特拉斯定理	95
2.4.2	多项式逼近	97
	习题	103
	附录 2A 数 e 不是一个有理数的证明	107
	参考文献	108
第 3 章	二阶线性常微分方程	109
3.1	二阶线性常微分方程的一般理论	109
3.1.1	解的存在唯一性定理	109
3.1.2	齐次方程解的结构	110
3.1.3	非齐次方程的解	116
3.2	施图姆-刘维尔型方程的特征值问题	119
3.2.1	施图姆-刘维尔型方程的形式	119
3.2.2	施图姆-刘维尔方程的边界条件	120
3.2.3	施图姆-刘维尔特特征值问题	122
3.2.4	施图姆-刘维尔特特征值问题举例	127
3.3	施图姆-刘维尔型方程的多项式解集	129
3.3.1	核函数和权函数的可能的形式	129
3.3.2	多项式的级数表达式和微商表示	133
3.3.3	母函数关系	139
3.3.4	正交的施图姆-刘维尔多项式解集的完备性定理	141
3.3.5	正交多项式解集在数值积分中的应用	142
3.4	与多项式的施图姆-刘维尔系统有关的方程和函数	145
3.4.1	拉盖尔函数	145
3.4.2	勒让德函数	149
3.4.3	切比雪夫函数	154

3.4.4	厄米函数	158
3.5	切比雪夫双曲函数	165
3.5.1	微分方程的建立	165
3.5.2	微分方程的求解	166
3.6	二阶常微分方程的复变函数理论	169
3.6.1	齐次线性方程组的解	169
3.6.2	二阶常微分方程	181
3.7	非自伴的二阶常微分方程	187
3.7.1	常微分方程的伴随方程	187
3.7.2	施图姆-刘维尔算子	188
3.7.3	非自伴二阶常微分方程的完备集	191
3.8	非齐次方程有解的条件	192
	习题	196
附录 3A	初值问题 (3.1.4) 的解的存在唯一性的证明	201
附录 3B	二重求和中变量的代换	204
附录 3C	关于施图姆-刘维尔理论向狄拉克型方程的推广	204
	参考文献	205
第 4 章	贝塞尔函数	207
4.1	贝塞尔方程	207
4.1.1	贝塞尔方程及其解	207
4.1.2	第一类和第二类贝塞尔函数	213
4.2	贝塞尔函数的基本性质	216
4.2.1	贝塞尔函数的递推公式	216
4.2.2	贝塞尔函数的渐近式	219
4.2.3	贝塞尔函数的零点	219
4.2.4	朗斯基行列式	222
4.3	整数阶贝塞尔函数	223
4.3.1	奇偶性和特殊点的值	224
4.3.2	整数阶贝塞尔函数的母函数	225
4.4	半奇数阶贝塞尔函数	229
4.5	第三类贝塞尔函数和球贝塞尔函数	232
4.5.1	第三类贝塞尔函数	232
4.5.2	球贝塞尔函数	236
4.6	虚变量 (或变形) 贝塞尔函数	241
4.6.1	第一类和第二类变形的贝塞尔函数	241

4.6.2	整数阶变形贝塞尔函数	246
4.6.3	半奇数阶变形贝塞尔函数	248
4.7	变量为实数的贝塞尔函数	248
4.7.1	贝塞尔方程的特征值问题	248
4.7.2	特征函数族的性质	250
4.7.3	球贝塞尔方程的特征值问题	254
	习题	255
附录 4A	$\Gamma(z)$ 函数的导数与 $\psi(z)$ 函数	261
附录 4B	第二类贝塞尔函数表达式	263
	参考文献	265
第 5 章	狄拉克 δ 函数	267
5.1	δ 函数的定义与性质	267
5.1.1	δ 函数的定义	267
5.1.2	δ 函数是一个广义函数	268
5.1.3	δ 函数的傅里叶变换和拉普拉斯变换	269
5.1.4	广义函数的导数和积分	270
5.1.5	δ 函数中的定值是个复数的情况	272
5.2	δ 函数视为普通函数的弱收敛极限	273
5.2.1	普通函数的弱收敛的几种形式	273
5.2.2	证明式 (5.2.7a) 的弱收敛极限是 δ 函数	277
5.2.3	证明式 (5.2.9b) 的弱收敛极限是 δ 函数	277
5.2.4	证明式 (5.2.11) 的弱收敛极限是 δ 函数	279
5.2.5	应用举例	280
5.3	多维空间中的 δ 函数	282
5.3.1	直角坐标系	282
5.3.2	直角坐标系到曲线坐标系的变换	283
5.4	δ 函数的广义傅里叶展开	286
	习题	290
	参考文献	292
第 6 章	格林函数	294
6.1	格林函数的基本理论	294
6.1.1	格林函数的定义	294
6.1.2	格林函数的作用和性质	295
6.1.3	格林函数的求解方法	297
6.1.4	格林函数的物理意义	303

6.2	拉普拉斯算子的基本解	305
6.2.1	三维情况	307
6.2.2	二维情况	308
6.2.3	一维情况	310
6.3	阻尼振子的格林函数	312
6.3.1	齐次方程的解	312
6.3.2	求解格林函数	313
6.3.3	方程的通解	314
6.3.4	无阻尼的情况	314
6.3.5	边界条件对格林函数的影响	315
6.4	二阶常微分方程的格林函数	316
6.4.1	格林函数的对称性	317
6.4.2	二阶微分方程边值问题的解	318
6.4.3	广义格林函数	320
6.4.4	求解二阶微分方程边值问题的实例	326
6.5	高维空间的格林函数	333
6.5.1	二阶微分方程与格林函数	333
6.5.2	二维格林函数求解实例	336
6.5.3	三维格林函数求解实例	351
6.5.4	光的小孔衍射	354
6.5.5	三维空间中粒子散射的问题	362
6.6	镜像法求解格林函数	363
6.6.1	镜像法的基本理论	363
6.6.2	二维空间实例	366
6.6.3	三维空间实例	371
6.7	一阶微分方程的格林函数	373
6.7.1	非齐次方程边值问题	373
6.7.2	齐次方程边值问题	373
6.7.3	非齐次方程与格林函数	374
6.7.4	边值问题的通解	375
6.8	非自伴微分方程的格林函数	376
6.8.1	伴随格林函数	376
6.8.2	非齐次微分方程的解	378
	习题	379
	参考文献	382

第 7 章 范数	383
7.1 巴拿赫空间	383
7.1.1 巴拿赫空间	383
7.1.2 赫尔德不等式	386
7.1.3 闵可夫斯基不等式	389
7.2 向量范数	390
7.2.1 向量范数	390
7.2.2 向量范数的等价性	393
7.3 矩阵范数	394
7.3.1 矩阵范数	394
7.3.2 矩阵的谱范数和谱半径	400
7.3.3 矩阵测度	403
7.4 算子范数	407
7.4.1 算子的范数	407
7.4.2 伴随算子	411
7.4.3 投影算子	414
7.5 全连续算子	417
7.5.1 线性积分变换用有限秩线性积分变换逼近	417
7.5.2 全连续算子	419
习题	424
参考文献	426
第 8 章 积分方程	428
8.1 积分方程的基础理论	428
8.1.1 积分方程的定义和分类	428
8.1.2 积分方程与微分方程的关系	430
8.1.3 关于齐次积分方程的理论	433
8.2 线性积分方程的迭代技术	437
8.2.1 弗雷德霍姆线性积分方程	437
8.2.2 沃尔泰拉线性积分方程	447
8.3 非线性方程的迭代技术	448
8.3.1 迭代步骤	448
8.3.2 利普希茨条件	450
8.3.3 利用收缩的概念	452
8.3.4 弹簧的非谐振动	453
8.4 退化核的弗雷德霍姆线性积分方程	455

8.4.1	可分核	455
8.4.2	有限秩核	462
8.4.3	核按特征系的展开	471
8.5	卷积型积分方程的求解	473
8.5.1	弗雷德霍姆卷积型积分方程	473
8.5.2	沃尔泰拉卷积型积分方程	476
8.6	多项式类型的积分方程	479
8.6.1	只含多项式的弗雷德霍姆积分方程的解法	479
8.6.2	母函数法	481
	习题	483
	参考文献	488
第 9 章	数论在物理逆问题中的应用	490
9.1	陈-莫比乌斯变换	490
9.1.1	引言	490
9.1.2	莫比乌斯变换	492
9.1.3	陈-莫比乌斯变换	497
9.2	晶体中声子态密度的逆问题	500
9.2.1	逆变换公式	500
9.2.2	低温近似	502
9.2.3	高温近似	505
9.3	晶体内原子间相互作用势的逆问题	507
9.3.1	一维情况	508
9.3.2	二维情况	512
9.3.3	三维情况	516
9.4	加性莫比乌斯变换及其应用	523
9.4.1	函数的加性莫比乌斯变换及其应用	523
9.4.2	数列的加性莫比乌斯变换及其应用	529
9.5	与表面和界面有关的对势反演问题	532
9.5.1	孤立原子与半无限大晶体内原子的对势	532
9.5.2	晶体表面原子弛豫	534
9.5.3	界面原子间作用势的逆问题	535
	习题	539
	附录 9A 黎曼 ζ 函数的数值	541
	附录 9B 倒易系数的计算	543
	参考文献	544

第 10 章 任意维空间的基本方程	547
10.1 任意维欧几里得空间	547
10.1.1 直角坐标系与球坐标系	547
10.1.2 梯度、散度和拉普拉斯算子	551
10.2 拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的格林函数	553
10.2.1 拉普拉斯方程的格林函数	553
10.2.2 亥姆霍兹方程的格林函数	555
10.3 有心势下的径向方程	557
10.3.1 高维空间有心势下的径向方程	557
10.3.2 亥姆霍兹方程	558
10.3.3 无限深球方势阱	559
10.3.4 有限深球方势阱	560
10.3.5 库仑势	561
10.3.6 谐振子势	563
10.3.7 两项负幂次分子势	565
10.3.8 正负幂次分子势	566
10.3.9 指数衰减吸引势	566
10.3.10 径向方程具有解析解的条件	567
10.4 角向方程的解	568
10.4.1 四维空间	569
10.4.2 五维空间	573
10.4.3 N 维空间	574
10.4.4 总角动量的线性无关分量	577
10.5 赝球坐标系	580
10.5.1 四维空间赝球坐标系	580
10.5.2 拉普拉斯方程的解	581
10.5.3 五维和六维空间	584
10.6 非欧几里得空间	585
10.6.1 度规张量	585
10.6.2 五维闵可夫斯基空间和四维德西特空间	589
习题	596
附录 10A 超几何方程与超几何函数	598
参考文献	599
外国人名英汉对照表	600
索引	602

第1章 变分法

变分法是数学物理中的一种重要方法,它研究某类特殊的变量——泛函的极大值和极小值问题.这里所讨论的只是变分法的一些最基本的内容以及一些应用.

1.1 泛函和泛函的极值问题

1.1.1 泛函的概念

下面先从几个最简单的例子引进泛函的概念.

例 1 设已给 x 轴上两点 $x = x_0$ 和 $x = x_1$, $y = y(x)$ 是定义在区间 $[x_0, x_1]$ 上的有连续一阶导数的函数,则曲线 $y = y(x)$ 的长为

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.1.1)$$

当函数 $y(x)$ 改变成另一函数 $y_1(x)$ 时, $l[y(x)]$ 也随之改变成代表函数 $y_1(x)$ 的曲线在 $[x_0, x_1]$ 上的弧长 $l[y_1(x)]$. 这就是说,由式 (1.1.1) 定义的变量 l 依赖于“整个函数” $y(x)$.

定义 1 具有某种共同性质的函数集,称为函数类.

例如,把在区间 $[x_0, x_1]$ 上连续的函数的集合记为 $C[x_0, x_1]$. 把在区间 $[x_0, x_1]$ 上有连续一阶导数的函数称为在 $[x_0, x_1]$ 上的 C_1 类函数,这类函数的集合记为 $C_1[x_0, x_1]$. 以此类推,把在区间 $[x_0, x_1]$ 上有连续 n 阶导数的函数称为此区间上的 C_n 类函数,这类函数的集合记为 $C_n[x_0, x_1]$. 如果一个函数 $y(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上 n 次连续可导,它就属于 $C_n[x_0, x_1]$,简记为 $y(x) \in C_n$. 这一记号也用于多元函数,如 $z(x, y) \in C_2(D)$,就意味着函数 $z(x, y)$ 在域 D 上有连续的二阶偏导数.

例 2 设 D 是平面上的已给区域,函数 $z(x, y) \in C_1(D)$,那么与之相应的曲面面积为

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy \quad (1.1.2)$$

显然,变量 S 也是依赖于“整个函数” $z(x, y)$ 的.

现在引进泛函的概念.

定义 2 设 R 是一数域,设 Y 是已给定的某函数集,这一集合记为 $\{y(x)\}$,如果对于 Y 中的每一个函数 $y(x)$,有变量 $J \in R$ 的值与之对应,那么就说变量 J 是

函数 $y(x)$ 的泛函, 记为 $J = J[y(x)]$, 而此函数集称为泛函 $J[y(x)]$ 的定义域, 有时也称为泛函的容许函数. 简言之, 泛函是函数集 Y 到数域 R 上的一个映射, 映射的自变元是一个函数, 而属于 Y 的每一个函数 $y(x)$ 称为容许函数. 读者不难自己类似地给出依赖于多个函数的泛函的定义.

按此定义, 积分式 (1.1.1) 和式 (1.1.2) 分别是在 $C_1[x_0, x_1]$ 和 $C_1(D)$ 上的泛函.

例 3 傅里叶变换

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

就是一个泛函. 这个泛函以 k 为参量. 一旦确定了 k 之后, 对于每一个函数 $f(x)$ 都确定了泛函的一个数值. 函数 $f(x)$ 就是泛函的容许函数. 可以把这个泛函看成自变量 k 的函数, 记做 $F(k)$, 但是 $F(k)$ 的数值并不由函数的定义给出, 而是按照上式根据函数 $f(x)$ 的具体形式给出.

1.1.2 泛函的极值问题

1. 有关泛函极值的概念

变分法的基本问题是关于泛函的极值问题. 例如, 1696 年由约翰·伯努利提出的, 并且对变分法的发展有过重大影响的最速降线问题(又称捷线问题): 在铅直平面内, 所有连接两定点 A 、 B 的曲线中, 求出一条曲线来, 使初速为零的质点在重力作用下, 自 A 点沿着这条曲线下落到 B 点所需时间最短(介质的摩擦和阻力不计).

首先, 若单纯从路程的角度, A 点到 B 点的直线路程是最短的, 但是因为下滑过程并不能较快获得很大的速度, 所以所需时间不是最短的.

如图 1.1 所示, 以 A 点为坐标原点, Ox 轴取水平方向, Oy 轴铅直向下. 设 $y = y(x)$ 是连接点 $A(0,0)$ 和点 $B(a,b)$ 的一条光滑曲线, 质点沿这条曲线下滑. 由于曲线是光滑的, 在质点运动的切线方向上不受力; 而法向作用力只改变运动速

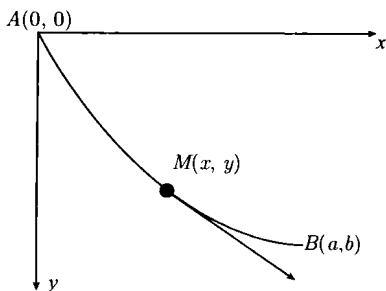


图 1.1

度的方向, 不改变速度的大小. 因初速度为零, 故质点下滑到任意点 $M(x, y)$ 的速率为

$$v = \sqrt{2gy} \quad (1.1.3)$$

其中 g 是重力加速度.

若以 S 表示曲线的弧长, dt 表示时间的微分, 则

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{dt} \quad (1.1.4)$$

所以

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \quad (1.1.5)$$

由此可得质点沿着曲线 $y = y(x)$ 自 A 点下滑到 B 点所需的时间 T 为

$$T[y(x)] = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \quad (1.1.6)$$

这样, 最速降线问题的数学提法是: 求一条满足边界条件

$$y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (1.1.7)$$

的曲线 $y = y(x)$, 使得泛函 $T[y(x)]$ 取最小值.

下面给出泛函极值以类似于函数的极大极小值的定义. 先给出曲线 $y = y(x)$ 的 ε -邻域的概念.

定义 3 定义在 $[x_0, x_1]$ 上的曲线 $y = y(x)$ 的 ε -邻域是指适合下列条件的一切可能的曲线 $y = y_1(x)$ (图 1.2): 它在整个区间 $[x_0, x_1]$ 上, 满足不等式

$$|y_1(x) - y(x)| \leq \varepsilon \quad (1.1.8)$$

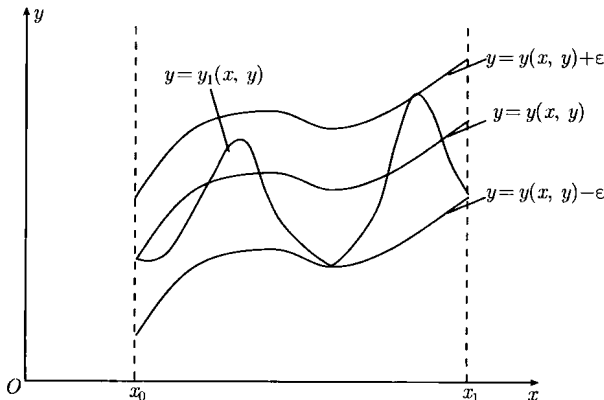


图 1.2