 光电信息科学与工程类专业规划教材

# 光波导理论

## 基础教程

李淑凤 李成仁 宋昌烈 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY <http://www.phei.com.cn>

013030637

TN252  
10

光电信息科学与工程类专业规划教材

# 光波导理论基础教程

李淑凤 李成仁 宋昌烈 编 著



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING



北航

C1638874

TN252

10

## 内 容 简 介

本书以几何光学和波动光学理论为基础,系统阐述了介质光波导的分析方法和光传输特性。波导涉及阶跃式折射率分布和渐变式折射率分布的二维薄膜波导、三维条形波导及光纤,主要内容涵盖各种波导的解析与数值分析方法、模式分类与特征、模式场的分布与传输特性、模耦合理论等,并介绍了几种无源光波导器件和光波导放大器的工作原理及特性,同时对光子晶体波导也做了介绍。每章都附有一定数量的习题。

本书可作为光学工程、光电子、光通信等专业的研究生及高年级本科生的教材,也可供相关专业的教师和科研人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

光波导理论基础教程 / 李淑凤, 李成仁, 宋昌烈编著. —北京: 电子工业出版社, 2013.4  
ISBN 978-7-121-19714-7

I. ①光… II. ①李… ②李… ③宋… III. ①光波导—高等学校—教材 IV. ①TN252

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第039933号

责任编辑: 韩同平 特约编辑: 张庆杰

印 刷: 涿州市京南印刷厂

装 订: 涿州市京南印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 11.75 字数: 330千字

印 次: 2013年3月第1次印刷

印 数: 2000册 定价: 39.90元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线:(010)88258888。

# 前 言

21 世纪人类已进入以光通信和信息网络为主要特征的信息时代, 社会和科技领域对于获取信息、传输信息、处理信息和存储信息的要求越来越高。与信息有关的光通信、光电子、光传感、光集成、半导体激光等各种新技术, 正以空前的速度和规模迅猛发展。随着光传输技术和半导体激光技术的发展而逐步建立起来的光波导理论是光通信与光电子技术的主要理论基础, 一直受到科技人员的重视。掌握该理论对有关专业的研究工作者和技术人员理解新概念、掌握新方法、发现新现象和创造新技术都是十分必要和有益的。

目前国内外许多高校都为光学工程、光学、光电子、光通信等相关专业的研究生和高年级本科生开设了光波导理论课程。本书是作者在十余年讲授研究生课程“光波导理论基础”的基础上, 结合课程讲义和作者的科研成果而完成的。

本书共 12 章, 系统地介绍了分析光波导的几何光学理论和波动光学理论, 所选择的内容都是光波导的基础理论部分, 对光波导的场模式理论、传输理论、光无源器件、光有源器件等都做了详尽论述。为体现学科前沿成果, 保证教材质量, 在内容上充分吸收国内外相关研究成果, 并融入编著者近年来在无源/有源光波导领域的部分研究成果, 突出思想性、针对性、科学性和系统性。在教材的编写上, 作者力求理论体系完整、物理概念清晰明确、内容简明扼要、数学推导简洁严整。

本书第 1 章~第 8 章、第 11 章由李淑凤、宋昌烈编写, 第 9 章由李成仁和李淑凤编写, 第 10 章、第 12 章由李成仁编写, 李淑凤统编全稿。宋昌烈教授在编写课程讲义和详细教材大纲中付出了大量心血。研究生冯希会、杜雨洲和梁翠翠做了部分数值计算、习题编写和校对工作。赵明山教授认真审阅了全部书稿, 并提出了许多宝贵建议。

本教材是在大连理工大学研究生院教改基金资助下完成的, 同时得到了物理与光电工程学院以及光学工程学科的大力支持。

由于作者水平有限, 书中难免有不妥和错误之处, 恳请读者批评指正。

作 者  
于大连理工大学

# 目 录

<b>第 1 章 电磁场理论</b> .....	(1)
1.1 麦克斯韦方程.....	(1)
1.2 电磁场边界条件.....	(2)
1.3 单色平面电磁波.....	(3)
1.4 坡印亭矢量和传输功率.....	(4)
1.5 亥姆霍兹方程.....	(5)
1.6 平面电磁波的反射和折射.....	(6)
1.7 光的全反射与倏逝波.....	(7)
1.8 全反射相移与古斯-汉森位移.....	(8)
习题.....	(10)
<b>第 2 章 几何光学</b> .....	(11)
2.1 程函方程.....	(11)
2.2 光传播路径分析.....	(12)
2.2.1 光线方程.....	(12)
2.2.2 光线方程应用举例.....	(12)
2.3 费马原理.....	(13)
习题.....	(14)
<b>第 3 章 光波导几何分析</b> .....	(15)
3.1 均匀介质薄膜波导.....	(15)
3.2 折射率渐变薄膜波导中的光线.....	(16)
3.3 阶跃光纤中的光线.....	(17)
3.3.1 子午光线.....	(18)
3.3.2 偏斜光线.....	(19)
3.4 梯度光纤中的光线.....	(20)
3.4.1 柱坐标的光线方程.....	(20)
3.4.2 光线不变量.....	(21)
3.4.3 光线判据函数.....	(21)
3.4.4 光线分析.....	(22)
3.5 传播时延与色散特性.....	(24)
3.5.1 均匀介质波导的时延差.....	(24)
3.5.2 折射率渐变介质波导的时延差.....	(25)
3.5.3 光纤的色散.....	(27)
习题.....	(28)
<b>第 4 章 薄膜波导模式理论</b> .....	(30)
4.1 均匀薄膜波导特征方程.....	(30)
4.2 薄膜波导电磁场方程.....	(31)
4.3 TE 模分析.....	(33)
4.4 TM 模分析.....	(35)
4.5 导模特性.....	(36)



4.5.1	导模截止	(36)
4.5.2	导模定则	(37)
4.5.3	导模数量	(38)
4.5.4	单模传输	(39)
4.5.5	截止波长	(39)
4.5.6	归一化参量与薄膜波导色散曲线	(40)
4.6	导模光强和功率	(41)
4.6.1	导模光强	(41)
4.6.2	传输功率	(42)
	习题	(43)
<b>第 5 章</b>	<b>三维光波导</b>	(44)
5.1	三维光波导结构	(44)
5.2	马卡提里近似法	(45)
5.3	场方程与形式解	(46)
5.4	$E_{mn}^x$ 模特征方程	(47)
5.5	$E_{mn}^y$ 模特征方程	(49)
5.6	模式特性	(50)
5.6.1	导模条件与模截止	(50)
5.6.2	单模传输	(52)
5.6.3	截止波长	(52)
5.6.4	矩形波导色散曲线与模场分布	(53)
5.7	有效折射率法	(54)
5.7.1	矩形波导	(54)
5.7.2	脊波导	(55)
5.7.3	条载波导及四层平板波导	(56)
	习题	(58)
<b>第 6 章</b>	<b>光纤模式理论</b>	(59)
6.1	光纤的电磁场方程	(59)
6.2	阶跃光纤电磁场方程的矢量解法	(61)
6.2.1	芯区和包层的电磁场	(61)
6.2.2	导模特征方程	(64)
6.2.3	导模分类	(64)
6.2.4	导模截止条件与单模传输	(66)
6.2.5	模色散曲线	(71)
6.2.6	导模电磁场分布	(72)
6.3	光纤的线偏振模	(75)
6.3.1	场的直角分量与场方程的标量解法	(75)
6.3.2	线偏振模及简并度	(77)
6.3.3	LP <sub>mn</sub> 模的矢量模组成	(79)
6.3.4	LP 模光强和功率	(80)
6.3.5	阶跃多模光纤的导模数量	(82)
6.4	梯度光纤模场分析	(83)
6.4.1	梯度光纤场方程及标量解	(83)
6.4.2	传播常数	(86)
6.4.3	模式群和导模数量	(86)

习题 .....	(87)
<b>第 7 章 电磁场分析的有限元法 .....</b>	<b>(89)</b>
7.1 微分方程边值问题 .....	(89)
7.1.1 边值问题 .....	(89)
7.1.2 Ritz 方法 .....	(90)
7.1.3 Galerkin 方法 .....	(91)
7.1.4 本征值方程 .....	(92)
7.2 有限元分析 .....	(92)
7.2.1 区域离散和单元划分 .....	(93)
7.2.2 线性插值函数与基函数 .....	(93)
7.2.3 单元方程的扩展——全局方程的建立 .....	(94)
7.2.4 二阶单元与基函数 .....	(96)
7.3 光波导模式问题的应用举例 .....	(96)
7.3.1 单元大小对计算结果的影响 .....	(96)
7.3.2 脊波导模场的有限元计算 .....	(97)
7.3.3 伪模 .....	(99)
习题 .....	(99)
<b>第 8 章 模式耦合理论 .....</b>	<b>(100)</b>
8.1 模式的正交性与完备性 .....	(100)
8.1.1 横场方程 .....	(100)
8.1.2 模式的正交性及归一化 .....	(101)
8.1.3 展开式的完备性 .....	(103)
8.2 模耦合方程 .....	(103)
8.2.1 理想正规模式展开的模耦合方程 .....	(103)
8.2.2 本地正规模式展开的模耦合方程 .....	(105)
8.3 模耦合方程的微扰解——双向模耦合 .....	(106)
习题 .....	(107)
<b>第 9 章 无源光器件 .....</b>	<b>(108)</b>
9.1 光纤光栅 .....	(108)
9.1.1 光纤光栅耦合方程 .....	(109)
9.1.2 光纤光栅传输特性 .....	(111)
9.1.3 光纤光栅滤波特性 .....	(112)
9.2 平面波导光栅 .....	(114)
9.3 双波导定向耦合器 .....	(117)
9.4 波分复用/解复用器 .....	(120)
9.4.1 角色散型 .....	(120)
9.4.2 干涉型 .....	(122)
9.4.3 F-P 腔光滤波型 .....	(124)
9.4.4 阵列波导光栅 .....	(125)
9.5 光开关 .....	(126)
习题 .....	(129)
<b>第 10 章 光波导放大器 .....</b>	<b>(130)</b>
10.1 概述 .....	(130)
10.2 铒离子的光谱特性 .....	(131)
10.2.1 $\text{Er}^{3+}$ 能级结构 .....	(131)

10.2.2	Er <sup>3+</sup> 的光致发光机制 .....	(133)
10.3	速率方程 .....	(134)
10.3.1	光放大原理及光泵浦波长 .....	(134)
10.3.2	铽-钇共掺系统的速率方程 .....	(136)
10.3.3	钇离子荧光特性 .....	(138)
10.3.4	粒子数反转 .....	(139)
10.4	光波传输方程 .....	(140)
10.5	放大器增益特性 .....	(141)
	习题 .....	(144)
<b>第 11 章</b>	<b>光子晶体波导</b> .....	(146)
11.1	光子晶体理论 .....	(146)
11.1.1	光子晶体结构与两种晶格 .....	(146)
11.1.2	平面波展开法 .....	(149)
11.1.3	二维光子晶体带隙结构 .....	(151)
11.2	光子晶体波导 .....	(153)
11.2.1	二维光子晶体波导 .....	(153)
11.2.2	二维平板光子晶体波导 .....	(154)
	习题 .....	(156)
<b>第 12 章</b>	<b>光波导的制备</b> .....	(157)
12.1	概述 .....	(157)
12.2	光纤制造 .....	(158)
12.3	薄膜制备 .....	(158)
12.3.1	蒸发法 .....	(159)
12.3.2	直流磁控溅射法 .....	(159)
12.3.3	中频、射频磁控溅射法 .....	(160)
12.3.4	脉冲激光沉积法 .....	(160)
12.3.5	薄膜制备的化学方法 .....	(161)
12.3.6	薄膜的退火 .....	(162)
12.4	薄膜的表征 .....	(163)
12.4.1	X 射线衍射仪 .....	(163)
12.4.2	扫描电镜 .....	(164)
12.4.3	电子探针 .....	(165)
12.5	三维光波导的制作 .....	(166)
12.5.1	光刻技术 .....	(166)
12.5.2	加工技术 .....	(167)
	习题 .....	(169)
<b>附录 A</b>	<b>Bessel 方程与 Bessel 函数</b> .....	(170)
A.1	Bessel 方程与 Bessel 函数 .....	(170)
A.2	各类 Bessel 函数的渐近展开式 .....	(171)
A.3	Bessel 函数的递推关系 .....	(171)
<b>附录 B</b>	<b>LP<sub>mn</sub> 模特征方程与其组成的矢量模特征方程的等价性</b> .....	(173)
<b>附录 C</b>	<b>自伴算符</b> .....	(174)
C.1	二维散度定理 .....	(174)
C.2	自伴算符 .....	(174)
<b>参考文献</b>	.....	(175)



# 第 1 章 电磁场理论

## 1.1 麦克斯韦方程

19 世纪 60 年代, 英国物理学家麦克斯韦(Maxwell)在前人成就的基础上, 提出了涡旋电场和位移电流假设, 并凭借他高深的数学造诣, 将电磁场理论用简洁、对称、完美的数学形式表示出来, 经后人整理和改写, 成为完整描述客观电磁场的一套基本方程, 称为麦克斯韦方程。根据这组方程, 麦克斯韦预言了电磁波的存在, 并确认光波的电磁本质。迄今为止, 麦克斯韦的经典电磁理论仍然是分析光的传输问题的理论基础。

电磁场可以用电场强度  $\vec{E}$ 、电位移矢量  $\vec{D}$ 、磁场强度  $\vec{H}$  以及磁感应强度  $\vec{B}$  四个场矢量描述, 它们是位置矢量  $\vec{r}$  和时间  $t$  的函数, 场矢量随空间和时间的变化规律由如下麦克斯韦方程给出

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1-1a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (1.1-1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1-1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1-1d)$$

式中,  $\vec{J}$  为传导电流密度,  $\rho$  为自由电荷密度。

实际应用中, 为完全确定电磁场矢量随时间和空间的变化, 除此基本方程外, 还必须借助于电磁场与介质的相互作用关系, 即物质方程

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (1.1-2a)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.1-2b)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.1-2c)$$

式中,  $\gamma$  为介质的电导率,  $\vec{P}$  为介质的极化强度,  $\vec{M}$  为磁化强度,  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空介电常数和真空磁导率。如果是各向同性的线性介质, 则其极化强度和磁化强度分别与电场强度和磁场强度成线性关系, 即

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (1.1-3a)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (1.1-3b)$$

式中,  $\chi_e$  和  $\chi_m$  分别是介质的极化率和磁化率, 则物质方程可简化为

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1-4a)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (1.1-4b)$$

式中,  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ ,  $\mu_r = 1 + \chi_m$ , 分别是介质的相对介电常数和相对磁导率,  $\epsilon$  和  $\mu$  分别是介质的介电常数和磁导率。介质的折射率  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , 对非铁磁性介质,  $\mu_r \approx 1$ , 因此认为一般情况下介质的折射率为  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 。

在各向异性介质中, 介质的极化强度和磁化强度与电磁场的方向有关, 即  $\chi_e$  和  $\chi_m$  不再是

常数，因此 $\epsilon$ 和 $\mu$ 也不再是常数，它们都要用二阶张量表示。物质方程在直角（笛卡儿）坐标系中需写成

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1.1-5a)$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1.1-5b)$$

当介质无吸收和无旋光性时， $\epsilon_{ij}$  是实数，并且介电张量是对称的，即 $\epsilon_{ij}=\epsilon_{ji}$ 。式(1.1-5a)经主轴变换后，介电张量只有三个对角分量，在主轴坐标系中物质方程可表示为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1.1-6)$$

对于非磁性各向异性介质， $\vec{B}$  和  $\vec{H}$  的关系与各向同性的介质是一样的，所以通常介质的各向异性主要表现在对电磁波中电场的作用。

## 1.2 电磁场边界条件

在利用麦克斯韦方程解决有限空间的电磁场问题，或者涉及两种及两种以上介质内的电磁场问题时，除了考虑物质方程外，还必须考虑介电常数不连续处的边界条件。因为物理量在界面上发生跃变，微分形式的麦克斯韦方程不再适用，需利用如下麦克斯韦方程的积分形式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.2-1a)$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{L} = \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.2-1b)$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \quad (1.2-1c)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.2-1d)$$

如图 1.1 所示，设两种介质的电磁参数分别为 $\epsilon_1$ 、 $\mu_1$  和  $\epsilon_2$ 、 $\mu_2$ ，折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ ，分界面法线方向的单位矢量为  $\vec{n}$ ，切向单位矢量为  $\vec{\tau}$ 。在界面附近沿界面的切向取一个小的狭长矩形回路，如图 1.1 (a) 所示。回路两个长边分别在两种介质内，平行并无限靠近界面，短边趋于零，则回路所围曲面面积趋于零，利用式(1.2-1a)和式(1.2-1b)，可得

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.2-2a)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \quad (1.2-2b)$$

式中， $\vec{J}_S$  为面电流密度。

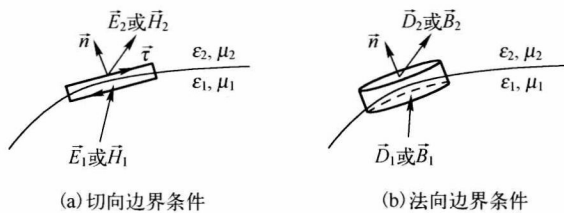


图 1.1 电磁场边值关系示意图

在两种介质的分界面附近取一小的扁平状圆柱，如图 1.1(b) 所示。圆柱的两个底面分别在两种介质内，平行并无限靠近界面，柱高趋于零，则侧面面积趋于零，利用式 (1.2-1c) 和式 (1.2-1d)，可得

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s \quad (1.2-2c)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.2-2d)$$

式中， $\sigma_s$  为电荷面密度。

对非导电介质， $\sigma_s = 0$ ， $J_s = 0$ ，四个电磁场矢量的边界条件可简化为

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.2-3a)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (1.2-3b)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad (1.2-3c)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.2-3d)$$

该边界条件表明，在界面上，电位移矢量和磁感应强度的法向分量连续，电场强度和磁场强度的切向分量连续，即

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1.2-4a)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1.2-4b)$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad (1.2-4c)$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad (1.2-4d)$$

对各向同性的线性介质，式 (1.2-4a) 也经常写作  $n_1^2 E_{1n} = n_2^2 E_{2n}$ 。

### 1.3 单色平面电磁波

一定频率的电磁波，电磁场对时间的依赖关系是  $e^{i\omega t}$ ，所以单色电磁波的基本表示式为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (1.3-1a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (1.3-1b)$$

因而  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = i\omega \vec{E}$ ， $\frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = i\omega \vec{H}$ 。对于各向同性的线性光学介质（通常为非导体）， $\rho = 0$ ， $J = 0$ ， $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ， $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ，由此，麦克斯韦方程式 (1.1-1) 可简化为不含时间因子的形式，即

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \quad (1.3-2a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} \quad (1.3-2b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.3-2c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3-2d)$$

上式为单色电磁波的基本方程。这组方程只有前两式是独立的，其他两式可以由前两式取散度运算导出。虽然对于非磁性介质， $\mu_r \approx 1$ ， $\mu \approx \mu_0$ ，但为了方程形式上的完美和对称，这里仍用  $\mu$  表示，只是涉及到具体数值运算时用  $\mu_0$  代替  $\mu$ 。

按照激发形式的不同和传播介质及其边界条件的限制，电磁波的场强  $\vec{E}(\vec{r})$  和  $\vec{H}(\vec{r})$  可以有各种不同的形式。单色平面电磁波是电磁波的最单纯、最基本的理想形式，其特征是等相位面为平面，电磁波有确定的传播方向。场量可表示为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.3-3a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.3-3b)$$

式中,  $\vec{E}_0$ 、 $\vec{H}_0$  为振幅矢量,  $\vec{K}$  为波矢, 其方向为波的传播方向。将上面二式代入基本方程式 (1.3-2a) 和式 (1.3-2b), 得

$$\vec{K} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (1.3-4a)$$

$$\vec{K} \times \vec{H}_0 = -\omega \varepsilon \vec{E}_0 \quad (1.3-4b)$$

可见平面电磁波的  $\vec{K}$ 、 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$  三矢量彼此正交, 进而说明均匀介质中的平面电磁波是横电磁波 (TEM 波)。由上式可得

$$KE_0 = \omega \mu H_0 \quad (1.3-5a)$$

$$KH_0 = \omega \varepsilon E_0 \quad (1.3-5b)$$

将式 (1.3-5a) 与式 (1.3-5b) 相除, 得

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu H_0}{\varepsilon E_0} \quad (1.3-6)$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (1.3-7)$$

式中,  $\sqrt{\mu/\varepsilon}$  为介质的波阻抗, 用  $Z$  表示, 也可以写作  $Z=Z_0/n$ , 其中  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.7\Omega$ , 称作真空波阻抗。

将式 (1.3-5a) 与式 (1.3-5b) 相乘, 得

$$K^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \quad (1.3-8)$$

或者

$$K = n \frac{\omega}{c} = nK_0 \quad (1.3-9)$$

$$K_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda \quad (1.3-10)$$

$\lambda$  和  $K_0$  分别代表电磁波在真空中的波长和波数。

## 1.4 坡印亭矢量和传输功率

电磁场的瞬态能量密度为

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \mu H^2(\vec{r}, t) \quad (1.4-1)$$

电磁波传输的能流密度, 即单位时间内通过单位面积的能量, 由坡印亭 (Poynting) 矢量表示为

$$\vec{S} = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1.4-2)$$

对式 (1.3-1) 表示的单色电磁波, 因为含有时间因子项  $e^{i\omega t}$ , 所以上式表示的是电磁场的瞬态能流密度。为了得到实际能流密度, 需要进行适当的时间平均。现有电磁理论中,  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  除时间因子外,  $E(\vec{r})$  和  $H(\vec{r})$  也往往用复数形式表示, 所以对它们的二次形式的运算必须进行实数化处理, 将式 (1.4-2) 写作

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}, t)] \times \text{Re}[\vec{H}(\vec{r}, t)] \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r})e^{-i\omega t}] \times \frac{1}{2} [(\vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r})e^{-i\omega t})] \end{aligned} \quad (1.4-3)$$

注意到在式 (1.4-3) 展开式的 4 项中,  $\vec{E} \times \vec{H}$  和  $\vec{E}^* \times \vec{H}^*$  两项分别含有  $e^{i2\omega t}$  和  $e^{-i2\omega t}$  因子, 因而时间平均值为零, 所以可得到平均能流密度

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{4} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] \quad (1.4-4)$$

这也是文献中经常引用的公式。单位时间通过某曲面  $S$  的能流，即通过  $S$  面的传输功率为

$$P = \iint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] \cdot \vec{n} dS \quad (1.4-5)$$

在直角坐标系中，当光波沿  $z$  轴传播时，坡印亭矢量只有  $z$  分量。光强可表示为

$$I = |\vec{S}_z| = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[E_x(x, y)H_y^*(x, y) - E_y(x, y)H_x^*(x, y)] \quad (1.4-6)$$

传输功率的表达式为

$$P = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy \quad (1.4-7)$$

对于单色平面波，平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \varepsilon E_0^2 + \frac{1}{4} \mu H_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \quad (1.4-8)$$

平均能流密度和光强分别为

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \quad (1.4-9)$$

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{\bar{w} c}{n} \quad (1.4-10)$$

## 1.5 亥姆霍兹方程

在各向同性的线性光学介质中，考虑到非均匀情况，介电常数  $\varepsilon$  依赖于空间位置，即  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ ，但磁导率  $\mu$  总是近似等于真空磁导率  $\mu_0$ 。为得到  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  各自独立的方程，对与时间无关的基本方程式 (1.3-2a)： $\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}$  和式 (1.3-2b)： $\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E}$  进行微分运算，得

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\nabla \times \vec{H} \quad (1.5-1a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = i\omega\nabla \times \varepsilon\vec{E} \quad (1.5-1b)$$

再利用矢量微分公式： $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ ，将上面二式化为

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = K^2 \vec{E} \quad (1.5-2a)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = i\omega\varepsilon\nabla \times \vec{E} + i\omega\nabla \varepsilon \times \vec{E} \quad (1.5-2b)$$

同时注意到  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，则有  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ 。再由  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ ，可得

$$\nabla \cdot \varepsilon\vec{E} = \nabla \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E} \quad (1.5-3)$$

由此得到非均匀介质中关于电场和磁场的独立的微分方程，即亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 K_0^2 \vec{E} + \nabla \left( \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E} \right) = 0 \quad (1.5-4a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2 K_0^2 \vec{H} + \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\nabla \times \vec{H}) = 0 \quad (1.5-4b)$$

对于非均匀介质，上面两方程中含  $\nabla \varepsilon_r / \varepsilon_r$  的附加项不能随意舍弃，由于方程的复杂性，求解是很困难的。但在研究光波导中的光传输特性时，所涉及的介质要么分区均匀，要么介质折射率或相对介电常数随空间位置变化缓慢。当介质均匀时， $\nabla \varepsilon_r = 0$ ，式 (1.5-4) 简化为



$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 K_0^2 \vec{E} = 0 \quad (1.5-5a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2 K_0^2 \vec{H} = 0 \quad (1.5-5b)$$

这是标准的常系数亥姆霍兹方程。当介质缓慢变化时，如在电磁场的波长 $\lambda$ 范围内，满足条件 $|\nabla \varepsilon_r / \varepsilon_r| \lambda \ll 1$ ，这种介质称作缓变介质。以方程(1.5-4b)为例，比较第三项与第二项的大小，因为一般空间矢量算符 $\nabla$ 作用于某一场量时，形式上可等效于 $i\vec{k}$ 对场量作用，由此，两项大小之比为

$$\frac{|\nabla \varepsilon_r \times (\nabla \times \vec{H}) / \varepsilon_r|}{n^2 K_0^2 H} \leq \frac{|\nabla \varepsilon_r K / \varepsilon_r|}{n^2 K_0^2} = \frac{|\nabla \varepsilon_r|}{\varepsilon_r n K_0} = \frac{|\nabla \varepsilon_r| \lambda}{\varepsilon_r} \frac{1}{2\pi n}$$

方程(1.5-4a)的第三项与第二项大小之比也有同样的结果。可见，对缓变介质，这一比值一般小于 $10^{-2}$ 。实际波导和光纤，介质的非均匀性通常满足缓变条件，所以，忽略式(1.5-4)两个方程中的最后一项，仍可保持较高精度的近似。从而得到变系数的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2(\vec{r}) K_0^2 \vec{E} = 0 \quad (1.5-6a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2(\vec{r}) K_0^2 \vec{H} = 0 \quad (1.5-6b)$$

## 1.6 平面电磁波的反射和折射

电磁波入射到介质分界面时，将发生反射和折射现象。如图 1.2 所示，设电磁波以入射角 $\alpha$ 从介质 1 射向介质 2， $x=0$  平面为分界面，反射角为 $\alpha'$ ，折射角为 $\gamma$ 。入射波、反射波和折射波三个平面波分别表示为

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}, \quad \vec{E}_3 = \vec{E}_{30} e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}}$$

根据边界条件式(1.2-3a)，有

$$\vec{n} \times (\vec{E}_{10} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + \vec{E}_{20} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}) = \vec{n} \times \vec{E}_{30} e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}} \quad (1.6-1)$$

由于 $\vec{k} \cdot \vec{r} = K_x x + K_y y + K_z z$ ，特别地，在 $x=0$ 界面上， $\vec{k} \cdot \vec{r} = K_y y + K_z z$ 。若要求在 $x=0$ 平面上满足式(1.6-1)，即电场强度 $\vec{E}$ 的切向分量在 $x=0$ 平面上处处保持连续，必有

$$K_{1y} = K_{2y} = K_{3y} \quad (1.6-2)$$

$$K_{1z} = K_{2z} = K_{3z} \quad (1.6-3)$$

如入射波矢在 $xOz$ 平面内，则 $K_{1y} = K_{2y} = K_{3y} = 0$ ，说明入射波、反射波和折射波在同一平面内。

由式(1.6-3)很容易得出 $\alpha = \alpha'$ ， $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$ ，即所熟知的反射定律和折射定律。

由上述结果，简化式(1.6-1)，得

$$\vec{n} \times \vec{E}_{10} + \vec{n} \times \vec{E}_{20} = \vec{n} \times \vec{E}_{30} \quad (1.6-4)$$

同样，根据磁场强度 $\vec{H}$ 的切向分量处处保持连续的边界条件式(1.2-3b)，有

$$\vec{n} \times \vec{H}_{10} + \vec{n} \times \vec{H}_{20} = \vec{n} \times \vec{H}_{30} \quad (1.6-5)$$

由于每一束平面电磁波都有两个独立的偏振态，下面按两种偏振状态分别处理。如图 1.2 所示，一种为电场振动方向垂直于入射面，称 TE 偏振；一种为磁场振动方向垂直于入射面，称 TM 偏振。

- 当电磁波呈 TE 偏振态时， $\vec{E}$  矢量垂直于入射面，电场切向分量 $E_y$ 和磁场切向分量 $H_z$ 连续，因此

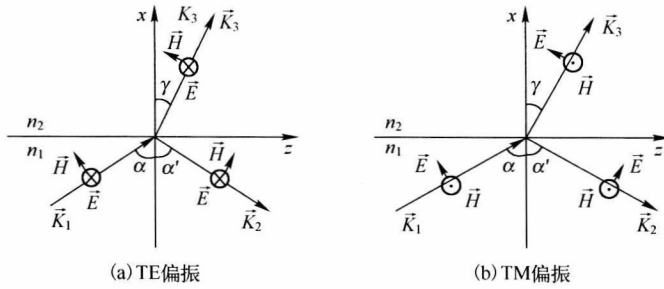


图 1.2 电磁波在介质界面上的反射与折射

$$E_{10} + E_{20} = E_{30} \quad (E_y \text{ 连续}) \quad (1.6-6)$$

$$H_{10} \cos \alpha - H_{20} \cos \alpha = H_{30} \cos \gamma \quad (H_z \text{ 连续}) \quad (1.6-7)$$

根据式(1.3-7),  $E_0/H_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , 且  $\mu = \mu_0$ , 式(1.6-7)可写成

$$n_1 E_{10} \cos \alpha - n_1 E_{20} \cos \alpha = n_2 E_{30} \cos \gamma \quad (1.6-8)$$

由式(1.6-6)和式(1.6-8)可得 TE 偏振下的反射系数和折射系数, 分别为

$$r_{\text{TE}} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \gamma}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \gamma} = -\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)} \quad (1.6-9)$$

$$t_{\text{TE}} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \gamma} = \frac{2 \cos \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} \quad (1.6-10)$$

- 当电磁波呈 TM 偏振态时,  $\vec{H}$  矢量垂直于入射面, 磁场切向分量  $H_y$  和电场切向分量  $E_z$  连续, 因此

$$H_{10} + H_{20} = H_{30} \quad (H_y \text{ 连续}) \quad (1.6-11)$$

$$E_{10} \cos \alpha - E_{20} \cos \alpha = E_{30} \cos \gamma \quad (E_z \text{ 连续}) \quad (1.6-12)$$

同样根据  $E_0/H_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , 式(1.6-11)可写成

$$n_1 E_{10} + n_1 E_{20} = n_2 E_{30} \quad (1.6-13)$$

由式(1.6-12)和式(1.6-13)可得 TM 偏振下的反射系数和折射系数, 分别为

$$r_{\text{TM}} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \gamma}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \gamma} = \frac{\tan(\alpha - \gamma)}{\tan(\alpha + \gamma)} \quad (1.6-14)$$

$$t_{\text{TM}} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \gamma} = \frac{2 \cos \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)} \quad (1.6-15)$$

上述表示入射波、反射波及折射波的振幅关系的公式称为菲涅耳(Fresnel)公式, 两种偏振状态下的反射率和透射率分别为

$$R_{\text{TE}} = |r_{\text{TE}}|^2 \quad (1.6-16)$$

$$T_{\text{TE}} = |t_{\text{TE}}|^2 \quad (1.6-17)$$

$$R_{\text{TM}} = |r_{\text{TM}}|^2 \quad (1.6-18)$$

$$T_{\text{TM}} = |t_{\text{TM}}|^2 \quad (1.6-19)$$

并且对 TE 和 TM 偏振, 均有

$$R + T = 1 \quad (1.6-20)$$

## 1.7 光的全反射与倏逝波

设两种介质的折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 光波由介质 1 向介质 2 入射时, 若  $n_1 > n_2$ , 根据折射定律, 折射角  $\gamma$  将大于入射角  $\alpha$ 。当  $\gamma = 90^\circ$  时, 入射角

$$\alpha_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (1.7-1)$$

若入射角再增大, 折射角将失去实数意义, 折射光波会表现出不同于一般折射光波的物理特性。这时反射率  $R=1$ , 所以称作全反射。 $\alpha_c$  为全反射临界角, 产生全反射的条件是  $\alpha > \alpha_c$ 。

入射光、反射光、折射光三个光束的相应波数分别是  $K_1 = n_1 K_0$ 、 $K_2 = n_1 K_0$ 、 $K_3 = n_2 K_0$ 。发生全反射时, 介质分界面两侧电磁场的边值关系仍然成立, 这里分析折射光波的波矢分量, 由式(1.6-3)得

$$K_{3z} = K_{1z} = n_1 K_0 \sin \alpha \quad (1.7-2)$$

$$K_{3x} = \sqrt{K_3^2 - K_{3z}^2} = K_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (1.7-3)$$

当发生全反射时,  $\sin \alpha > n_2/n_1$ , 所以  $K_{3x}$  为虚数, 即

$$K_{3x} = \pm i K_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2} = \pm i K_0 \delta \quad (1.7-4)$$

其中

$$\delta = \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2} \quad (1.7-5)$$

此时折射光可表示为

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = \vec{E}_{30} e^{-K_0 \delta x} e^{-i K_{3z} z} \quad (1.7-6)$$

注意, 这里为保证场沿  $x$  轴正向不为无穷大, 式(1.7-4)取负号。所以, 当  $\sin \alpha > n_2/n_1$  时, 折射光沿表面传播( $z$  方向), 并在垂直表面方向( $x$  方向)迅速衰减, 该折射光波被称作“倏逝波(Evanescent wave)”, 或“消逝波”、“隐逝波”、“表面波”, 这时正常的折射光消失。

倏逝波在第二种介质中的透射深度, 定义为在垂直表面方向振幅减小为表面处振幅的  $1/e$  的距离, 即

$$d = \frac{1}{K_0 \delta} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}} \quad (1.7-7)$$

## 1.8 全反射相移与古斯-汉森位移

全反射条件下, 菲涅耳公式不成立,  $\cos \gamma$  不存在, 因此反射光束和入射光束之间的关系也必须重新确定。仍采用图 1.2 的坐标系, 设入射面为  $xOz$  平面, 下面分别讨论两种偏振状态。

TE 偏振下, 电磁波的场分量只有  $E_y$ 、 $H_x$ 、 $H_z$ , 其余分量均为零。根据切向分量连续的边界条件, 有

$$E_{1y} + E_{2y} = E_{3y} \quad (1.8-1)$$

$$H_{1z} + H_{2z} = H_{3z} \quad (1.8-2)$$

由平面波方程式(1.3-4a):  $\vec{K} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}$ , 得

$$K_x E_y = \omega \mu H_z \quad (1.8-3)$$

将该式代入式(1.8-2), 得

$$K_{1x} E_{1y} + K_{2x} E_{2y} = K_{3x} E_{3y} \quad (1.8-4)$$

其中  $K_{1x} = n_1 K_0 \cos \alpha$ ,  $K_{2x} = -n_1 K_0 \cos \alpha$ , 并且

$$K_{3x} = -i K_0 \delta \quad (1.8-5)$$

由此可得

$$n_1 K_0 \cos \alpha (E_{1y} - E_{2y}) = -i K_0 \delta (E_{1y} + E_{2y})$$

所以, 全反射条件下的反射系数为

$$\frac{E_{2y}}{E_{1y}} = \frac{n_1 \cos \alpha + i\delta}{n_1 \cos \alpha - i\delta} = \frac{e^{i\Phi_{TE}}}{e^{-i\Phi_{TE}}} = e^{i2\Phi_{TE}} \quad (1.8-6)$$

其中

$$\Phi_{TE} = \arctan \frac{\delta}{n_1 \cos \alpha} \quad (1.8-7)$$

即

$$\Phi_{TE} = \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_2^2/n_1^2}}{\cos \alpha} \quad (1.8-8)$$

上述推导表明反射波与入射波振幅相等，相位差为  $2\Phi_{TE}$ 。所以 TE 偏振下全反射相移为

$$\Gamma = 2\Phi_{TE} \quad (1.8-9)$$

TM 偏振下，电磁波的场分量只有  $H_y$ 、 $E_x$ 、 $E_z$ ，其余分量均为零。同样根据切向分量连续的边界条件，有

$$H_{1y} + H_{2y} = H_{3y} \quad (1.8-10)$$

$$E_{1z} + E_{2z} = E_{3z} \quad (1.8-11)$$

由平面波方程式(1.3-4b)： $\vec{K} \times \vec{H} = -\omega\epsilon\vec{E}$ ，得

$$K_x H_y = -\omega\epsilon_0 n^2 E_z \quad (1.8-12)$$

将该式代入式(1.8-11)，得

$$\frac{1}{n_1^2} K_{1x} H_{1y} + \frac{1}{n_1^2} K_{2x} H_{2y} = \frac{1}{n_2^2} K_{3x} H_{3y} \quad (1.8-13)$$

结合式(1.8-10)，有

$$n_1 K_0 \cos \alpha (H_{1y} - H_{2y}) = -i K_0 \delta \frac{n_1^2}{n_2^2} (H_{1y} + H_{2y}) \quad (1.8-14)$$

从而得到 TM 偏振波在全反射条件下的反射系数

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{H_{2y}}{H_{1y}} = \frac{n_1 \cos \alpha + i\delta n_1^2/n_2^2}{n_1 \cos \alpha - i\delta n_1^2/n_2^2} = \frac{e^{i\Phi_{TM}}}{e^{-i\Phi_{TM}}} = e^{i2\Phi_{TM}} \quad (1.8-15)$$

其中

$$\Phi_{TM} = \arctan \frac{n_1^2 \delta}{n_2^2 n_1 \cos \alpha} \quad (1.8-16)$$

即

$$\Phi_{TM} = \arctan \left( \frac{n_1^2 \sqrt{\sin^2 \alpha - n_2^2/n_1^2}}{n_2^2 \cos \alpha} \right) \quad (1.8-17)$$

同样表明反射波与入射波振幅相等，相位差为  $2\Phi_{TM}$ 。所以 TM 偏振下全反射相移为

$$\Gamma = 2\Phi_{TM} \quad (1.8-18)$$

全反射相移  $\Gamma$  与入射角  $\alpha$  有关，图 1.3 示出了在几种确定折射率比的情况下，两种偏振状态  $\Gamma$  对  $\alpha$  的依赖关系：入射角从全反射临界角增至  $90^\circ$ ，全反射相移从 0 增至  $\pi$ 。

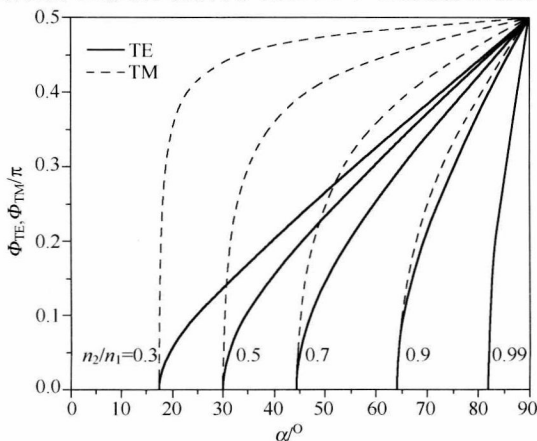


图 1.3 全反射相移与入射角的关系