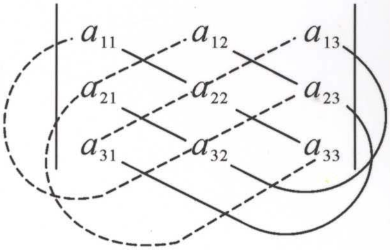


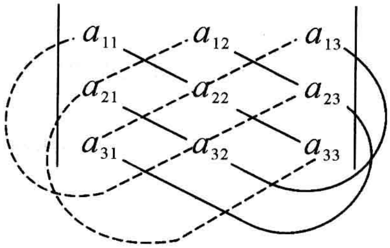

高等学校应用型本科经管类基础课“十二五”规划教材

# 线性代数

## XIANXING DAISHU

主编 强静仁 陈 芬 孟晓华

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com




高等学校应用型本科经管类基础课“十二五”规划教材

# 线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　强静仁　陈　芬　孟晓华

编　委（按姓氏笔画排序）

马建新　许　芳　朱家砚

陈　芬　何友鸣　吴小霞

邹顺华　孟晓华　强静仁

華中科技大學出版社

http://www.hustp.com

中国 · 武汉

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/强静仁　陈　芬　孟晓华　主编.—武汉：华中科技大学出版社，2012.6

ISBN 978-7-5609-7996-0

Ⅰ.线…　Ⅱ.①强…　②陈…　③孟…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 103614 号

线性代数　　强静仁　陈　芬　孟晓华　主编

责任编辑：史永霞
封面设计：龙文装帧
责任校对：张　琳
责任监印：张正林
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437
录　　排：武汉市兴明图文信息有限公司
印　　刷：仙桃市新华印务有限责任公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：14.25
字　　数：263 千字
版　　次：2012 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：28.50 元

华中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

# 序

课本乃一课之“本”。虽然高校的教材一般不会被称为“课本”，其分量也没有中小学课本那么重，但教材建设实为高校的基本建设之一，这大概是多数人都接受或认可的。

无论是教还是学，教材都是不可或缺的。一本好的教材，既是学生的良师益友，亦是教师之善事利器。应该说，这些年来，我国的高校教材建设工作取得了很大的成绩。其中，举全国之力而编写的“统编教材”和“规划教材”，为千百万人的成才作出了突出的贡献。这些“统编教材”和“规划教材”无疑具有权威性；但客观地说，随着我国社会改革的深入发展，随着高校的扩招和办学层次的增多，以往编写的各种“统编教材”和“规划教材”，就日益显露出其弊端和不尽如人意之处。其中最为突出的表现在于两个方面。一是内容过于庞杂。无论是“统编教材”还是“规划教材”，由于过分强调系统性与全面性，以至于每本教材都是章节越编越长，内容越写越多，不少教材在成书时接近百万字，甚至超过百万字，其结果既不利于学，也不便于教，还增加了学生的经济负担。二是重理论轻技能。几乎所有的“统编教材”和“规划教材”都有一个通病，即理论知识的分量相当重甚至太重，技能训练较少涉及。这样的教材，不要说“二本”、“三本”的学生不宜使用，就是一些“一本”的学生也未必合适。

现代高等教育背景下的本专科合格毕业生应该同时具备知识素质和技能素质。改革开放以后，人们都很重视素质教育；毫无疑问，素质教育中少不了知识素质的培养，但是仅注重学生知识素质的培养而轻视实际技能的获得肯定是不对的。我们都知道，在任何国家和任何社会，高端的研究型人才毕竟是少数，应用型、操作型的人才才是社会所需的大量人才。因此，对于“二本”尤其是“三本”及高职高专的学生来说，在大学阶段的学习中，其知识素质与技能素质的培养具有同等的重要性。从一定意义上说，为了使其动手能力和实践能力明显强于少数日后从事高端研究的人才，这类学生技能素质的培养甚至比知识素质的培养还要重要。

学生技能素质的培养涉及方方面面，教材的选择与使用便是其中重要的一环。正是基于上述考虑，在贯彻落实科学发展观的活动中，我们结合“二本”尤其是“三本”及高职高专学生培养的实际，组织编写了这一套系列教材。这一套教材与以往的“统编教材”和“规划教材”有很大的不同。不同在哪里？其一，体例与内容有所不同。每本教材一般不超过 40 万字。这样，既利于学，亦便于

教。其二，理论与技能并重。在确保基本理论与基本知识不能少的前提下，注重专业技能的训练，增加专业技能训练的内容，让“二本”、“三本”及高职高专的学生通过本专科阶段的学习，在动手能力上明显强于研究生和“一本”的学生。当然，我们的这些努力无疑也是一种摸索。既然是一种摸索，其中的不足和疏漏甚至谬误就在所难免。

中南财经政法大学武汉学院在本套教材的组织编写活动中，为了确保质量，成立了以主管教学的副院长徐仁璋教授为主任的教材建设委员会，并动员校内外上百名专家学者参加教材的编写工作。在这些学者中，既有曾经担任国家“规划教材”、“统编教材”的主编或撰写人的老专家，也有教学经验丰富、参与过多部教材编写的年富力强的中年学者，还有很多博士、博士后及硕士等青年才俊。他们之中不少人都已硕果累累，因而仅就个人的名利而言，编写这样的教材对他们并无多大意义。但为了教育事业，他们都能不计个人得失，甘愿牺牲大量的宝贵时间来编写这套教材，精神实为可嘉。在教材的编写和出版过程中，我们还得到了众多前辈、同仁及方方面面的关心、支持和帮助。在此，对为本套教材的面世而付出辛勤劳动的所有单位和个人表示衷心的感谢。

最后，恳请学界同仁和读者对本套教材提出宝贵的批评和建议。

中南财经政法大学武汉学院院长

覃有土

2011.7.16

# 前 言

随着高等院校的教育教学观念的不断更新、教学改革的不断深入和办学规模的不断扩大，作为数学教学三大基础之一的线性代数开设的专业覆盖面也在不断扩大. 针对这一发展现状，本教材在编写时，既做到教学内容在深度和广度方面达到教育部高等学校"线性代数"教学的基本要求，又注重线性代数概念的直观性引入，加强学生分析和解决实际问题能力的培养，力求做到易教、易学.

本书主要特点如下.

• 理论与实际应用有机结合. 大量的实际应用贯穿于理论讲解的始终，体现了线性代数在各个领域中的广泛应用.

• 习题安排科学合理. 每一节的后面给出简单易算的习题，各章后面还有总习题，使学生有更多的演练机会，达到触类旁通的效果.

• 紧密结合数学软件 Matlab. 最后一章介绍了目前国际公认的最优秀的工程应用开发软件——Matlab 的基本用法及与线性代数相关的基本命令.

• 数学名家介绍. 每章最后都介绍了一位数学名家的趣事，以增强读者的学习兴趣.

本教材由强静仁、陈芬、孟晓华主编. 在教材的编写过程中，我们得到了许多同行的支持和帮助，在此表示感谢.

教材中难免有错误和不妥之处，希望广大读者批评指正.

编 者

2012 年 4 月

# 目　　录

# 第1章 行 列 式

一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.

——马克思

行列式是在求解线性方程组的过程中产生的，现已成为线性代数的一个重要组成部分.行列式不仅是研究矩阵和线性方程组等数学问题的重要工具，而且在经济、管理及工程技术等领域也有着极其广泛的应用.

本章以2阶与3阶行列式为基础，引入 $n$ 阶行列式的概念，研究其性质并给出利用行列式求解线性方程组的克莱姆(Cramer) 法则.

## 1.1 2阶、3阶行列式

### 1.1.1 2阶行列式

称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

为**2阶行列式**，其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为2阶行列式 $D$ 的**元素**，横排称为**行**，竖排称为**列**.元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 的第一个下标称为**行标**，第二个下标称为**列标**，表明该元素位于行列式的第 $i$ 行第 $j$ 列.

例如，元素 $a_{12}$ 位于行列式的第1行第2列，元素 $a_{22}$ 位于行列式的第2行第2列.

从左上角到右下角的实线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的虚线称为行列式的**次对角线**.2阶行列式等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积，这种计算方法称为**对角线法则**.

**例1** 计算2阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

**解**　$D=\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{vmatrix}=3\times3-4\times2=1.$

**例 2**　试问 $x$ 取何值时，2 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}x & x-1\\2 & x+5\end{vmatrix}=0$?

**解**　由 $D=\begin{vmatrix}x & x-1\\2 & x+5\end{vmatrix}=x\cdot(x+5)-2\cdot(x-1)=0$

得一元二次方程

$$x^2+3x+2=0,\quad 即\quad (x+1)(x+2)=0,$$

故当 $x_1=-1$ 或 $x_2=-2$ 时，有 $D=\begin{vmatrix}x & x-1\\2 & x+5\end{vmatrix}=0$ 成立.

### 1.1.2　3 阶行列式

称

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$
$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\quad(1.1.1)$$

为 3 阶行列式.

式(1.1.1)所确定的 3 阶行列式可以利用"对角线法则"(见图 1-1)或"沙漏法则"(见图 1-2)来描述，每条实线上的三个元素的乘积带正号，每条虚线上的三个元素的乘积带负号.

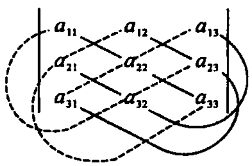



图 1-1

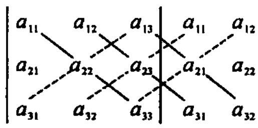



图 1-2

**例 3**　计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 2 & 1\\1 & 3 & 3\end{vmatrix}$ 的值.

**解**　利用"沙漏法则"计算，有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 2 & 1\\1 & 3 & 3\end{vmatrix}=1\times2\times3+3\times1\times1+(-1)\times2\times3$$

$$-(-1)\times2\times1-1\times1\times3-3\times2\times3=-16.$$

**例 4**　解方程 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.$

**解**　由 3 阶行列式的定义得

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3x^2-2x-1=0,$$

即
$$(x-1)(3x+1)=0,$$

故
$$x=1 \quad 或 \quad x=-\frac{1}{3}.$$

## 习题 1.1

1. 计算下列 2 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$；　　(8) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}$；　　(10) $\begin{vmatrix} \frac{t+2}{1-t} & \frac{1}{1+t} \\ 1+t^3 & 1-t^2 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列 3 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \log_b a \\ 0 & \log_a b & 0 \end{vmatrix}$ $(a>0, b>0$ 且 $a\neq 1, b\neq 1)$.

3. 试问 $x$ 为何值时，3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$?

4. 解下列方程

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$;　　(2) $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;

(3) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

# 1.2 $n$ 阶行列式

为了定义 $n$ 阶行列式，首先引入排列的相关概念.

## 1.2.1 排列与逆序

**定义 1.2.1** 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的有序数组称为一个 $n$ 级排列(简称排列).

例如，2314 和 4123 都是 4 级排列，6732415 是一个 7 级排列.

**定义 1.2.2** 在一个 $n$ 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，若数 $i_s > i_t$(前面的数大于后面的数)，则称 $i_s$ 与 $i_t$ 构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.

**例 1** 计算 5 级排列 41253 和排列 35124 的逆序数.

**解** 排在 4 后且比 4 小的数有 3 个，排在 1 后比 1 小的数有 0 个，排在 2 后比 2 小的数有 0 个，排在 5 后比 5 小的数有 1 个，3 在最后不需考虑，故该排列的

逆序数

$$\tau(41253) = 3+0+0+1 = 4.$$

同理可得 $\tau(35124) = 5.$

**定义 1.2.3**　逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如，例 1 中的排列 41253 是偶排列，排列 35124 是奇排列.

**定义 1.2.4**　将排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中的某两个数 $i_s$ 与 $i_t$ 的位置互换，其余的数不动，即可得到一个新的排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这一变换称为**对换**.

例如，在排列 41253 中将 5 与 1 的位置互换，得到新的排列 45213，其逆序数为 7，它是一个奇排列.

**定理 1.2.1**　对换改变排列的奇偶性.

### 1.2.2　$n$ 阶行列式的定义

观察 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32},$$

易见：

(1) 左端由 $3^2$ 个数排成 3 行 3 列；

(2) 右端共有 3!项，每项都是不同行不同列的 3 个元素的乘积；

(3) 带正号的项和带负号的项的个数相同，且所带符号与下标有关——每一项的 3 个元素的行标所成的排列都是 123，列标所成的排列是偶排列则带正号，否则带负号.

于是，3 阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

由此，给出 $n$ 阶行列式的定义.

**定义 1.2.5**　将 $n^2$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 $n$ 行 $n$ 列，称

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2.1}$$

为 $n$ 阶行列式，记为 $D_n=|a_{ij}|$ 或 $D_n=\det(a_{ij})$. 不需要指出行列式的阶数时，省略下标 $n$，即 $D=|a_{ij}|$. 数 $a_{ij}$ 称为行列式的元素，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式 $D$ 的项，其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和. 当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$.

**例 2**　判断 $-a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{62}$ 是否为 6 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的项.

**解**　显然 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{62}$ 是 6 阶行列式中不同行不同列的 6 个元素的乘积，且行标组成的排列为 123456，列标组成的排列为 134562，该排列为偶排列，故 $-a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{62}$ 不是 6 阶行列式中的项.

**例 3**　计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

**解**　由定义 1.2.5 得

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

和式中只有当 $j_1=4,j_2=2,j_3=1,j_4=3$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$，所以

$$D=(-1)^{\tau(4213)}a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}=(-1)^4\times 1\times 2\times(-1)\times 4=-8.$$

**例 4**　证明下三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

**证明**　由定义 1.2.5 得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

和式中只有 $j_1=1,j_2=2,\cdots,j_n=n$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$，所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地，上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

特别地，对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

利用排列对换的性质，得到行列式的等价定义.

**定义 1.2.5′**　$n$ 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 还可以写成

$$\begin{aligned} D=|a_{ij}| &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

**例 5**　分别计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

**解**　(1) 由定义 1.2.5′ 知，只有当 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}a_{i_4j_4}a_{i_5j_5}$ 中的每一个元素都不为零时，该项才不等于零，故我们从含有零元素最多的行开始选取元素，得到 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 不等于零的项是 $(-1)^{\tau(45321)+\tau(31425)}a_{43}a_{51}a_{34}a_{22}a_{15}$ 和 $(-1)^{\tau(45321)+\tau(31452)}a_{43}a_{51}a_{34}a_{25}a_{12}$，因此

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(45321)+\tau(31425)}a_{43}a_{51}a_{34}a_{22}a_{15}$$

$$+(-1)^{\tau(45321)+\tau(31452)}a_{43}a_{51}a_{34}a_{25}a_{12}$$
$$=2\times4\times2\times1\times1-2\times4\times2\times5\times2=-144.$$

(2) 类似(1) 的解法，从含有零元素最多的列开始选取元素，可以得到 $\begin{vmatrix}1&0&0&0&1\\2&1&4&-5&5\\-4&0&0&2&0\\-1&0&2&3&1\\4&0&0&0&1\end{vmatrix}$ 不等于零的项是 $(-1)^{\tau(24315)+\tau(23415)}a_{22}a_{43}a_{34}a_{11}a_{55}$ 和 $(-1)^{\tau(24315)+\tau(23451)}a_{22}a_{43}a_{34}a_{15}a_{51}$，因此

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0&1\\2&1&4&-5&5\\-4&0&0&2&0\\-1&0&2&3&1\\4&0&0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(24315)+\tau(23415)}a_{22}a_{43}a_{34}a_{11}a_{55}$$
$$+(-1)^{\tau(24315)+\tau(23451)}a_{22}a_{43}a_{34}a_{15}a_{51}$$
$$=-1\times2\times2\times1\times1+1\times2\times2\times1\times4=12.$$

利用行列式的等价定义很容易证明：一行或者一列的元素全是零的行列式必等于零. 进一步，若 $n$ 阶行列式中零的个数多于 $n^2-n$，则行列式的值等于零.

## 习题 1.2

1. 判断下列排列的奇偶性：

(1)523614； (2)52341； (3)625134； (4)$n(n-1)\cdots21$.

2. 确定 $k$ 与 $s$ 使得 $-a_{11}a_{2k}a_{34}a_{4s}a_{56}a_{62}$ 为 6 阶行列式的项.

3. 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}0&4&0&0\\0&2&1&0\\3&0&0&0\\0&0&4&3\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&1\\3&2&0&0\\1&2&0&0\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&2&1&0\\3&1&0&1\\0&0&4&3\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&2&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\n&\cdots&0&0\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

4. 试求函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & x & -x \\ 2x & 2 & 1 & 5x \\ x & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & x & 3x \end{vmatrix}$ 中 $x^4$ 的系数.

## 1.3　行列式的性质

当行列式的阶数较大时，直接利用定义计算行列式的值几乎是不可能的. 以计算一个 15 阶行列式为例，要做乘法运算 $15 \times 15! \approx 1.96 \times 10^{13}$ 次以上，用一台计算速度很快的计算机进行计算，也需要十几年的时间，因此需要找到计算行列式更为行之有效的方法. 本节将讨论行列式的性质并利用这些性质简化行列式的计算.

**定义 1.3.1**　将行列式 $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ 的各行换为同序号的列得到的新行列式称为 $D$ 的**转置行列式**，记为 $D^{\mathrm{T}}$，即

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**性质 1**　行列式与其转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

**证明**　设 $D = |a_{ij}|$ 的转置行列式 $D^{\mathrm{T}} = |b_{ij}|$，则 $b_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$. 由式(1.2.1) 和式(1.2.2) 得，

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D.$$