中學各科綱要叢書

代　　數

仲光然編

商務印書館發行

中學各科綱要叢書

代　　　　數

仲光然編

商務印書館發行

編輯大意

1. 本書之目的,在使讀者於短少時期內,將代數復習而整理之,以便應付專門以上各學校入學試驗及高等檢定試驗等之用.

2. 本書內容以簡潔明瞭為主旨,故主要事項雖網羅殆盡,而枝節事項則從略.

3. 本書依據一定之標準及系統,綜合而整理之,以便推考及合理的記憶,且有應用方面的效果.

4. 讀本書時,希望注意下列各項:

A. 列舉各類代表問題,乃在試驗讀者之實力.

B. 例解乃示模範,着眼點則記述一般事項,供集中要點之一助.

C. 了解例題後,即可領會其後問題之種類及其解法.

D. 每讀完一章,須將例題之種類及解法整理而記憶之.

E. 通讀全書後,須牢記內容之大綱,且須通讀數次為妙.

F. 問題稍困難時,可參考教科書而研究之.

G. 答案部對於較難之問題,附記有暗示或略解.

目　　次

第 一 章　數及代數式 ……………………………………1
第 二 章　剩餘定理 ……………………………………3
第 三 章　未定係數與完全平方式及完全立方式 ……………8
第 四 章　因子分解 ……………………………………12
第 五 章　倍數及約數 …………………………………22
第 六 章　恆等式 ………………………………………28
第 七 章　一次方程式 …………………………………36
第 八 章　不等式 ………………………………………42
第 九 章　一元二次方程式根之判別 ……………………48
第 十 章　根與係數的關係 ………………………………53
第十一章　一元二次方程式根之大小,正負……………59
第十二章　一元高次方程式 ……………………………63
第十三章　分數方程式 …………………………………67
第十四章　無理式 ………………………………………71
第十五章　無理方程式 …………………………………78
第十六章　二元二次聯立方程式 ………………………82
第十七章　多元高次聯立方程式 ………………………88
第十八章　比及比例 ……………………………………93
第十九章　變數法 ………………………………………97
第二十章　等差級數 (A. P.) ………………………101
第二十一章　等比級數 (G. P.) ……………………106
第二十二章　調和級數 (H. P.) ……………………111
第二十三章　雜級數 ……………………………………113
第二十四章　對數 ………………………………………116
第二十五章　指數方程式及對數方程式 ………………119
答　　案 …………………………………………………121

代　　數

第一章　數及代數式

$$\text{數}\begin{cases}\text{實數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數 (包含 0)}\\ \text{分數 (包含小數)}\end{cases}\\ \text{無理數}\end{cases}\\ \text{虛數}\end{cases}$$

平方之不能爲正亦不能爲 0 的數,稱爲虛數, 如 $\sqrt{-3}$ 等是, 虛數的一般形狀爲 $a+b\sqrt{-1}$, 即 $a+bi$ (b 不爲 0).

對於虛數而言,平方之爲正或爲 0 的數,稱爲實數.

非整數,亦非分數,若用小數則可表示其近似值,且可近似至非常之近,這種數稱爲無理數,如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\pi=3.141592\cdots\cdots$ 等.

$$\text{代數式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{無理式}\end{cases}$$

用運算記號 (加,減,乘,除,冪,開方), 括弧等結合數字及文字後所得的東西,稱爲代數式, 或簡稱爲式.

式中的文字,不含加,減,乘以外的運算,則此式稱爲整式; 式中若有文字或整式 (含有文字的整式) 的除法而不含開方運算,則此式稱爲分式.

整式及分式都稱爲有理式,非整式亦非分式的式,稱爲無理式.

例如 $\frac{1}{2}ax^2$, $\sqrt{3}a^2-5m(b+c)$ 等都是整式, $\frac{ax+by}{a^2+b^2}$ 爲分式, $ax-\sqrt{a^2+b^2}$ 爲無理式.

若式中只某文字爲重, 則其某文字以外的文字都作數字看待, 然後照上

述的規則命名之.

例如 $\frac{x-a}{b}+\frac{y-b}{a}$, 就 x, y 言之,則爲整式,就 a, b 言之,則爲分式;又 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{ax+by}$, 就 a, b 言之爲分式,就 x, y 言之爲無理式.

第二章　剩餘定理

〔定理〕

以 $x-a$ 除 x 的有理整式 P，其剩餘等於以 a($x-a=0$ 的根) 代式中 x 所得之值.

〔定理〕

以 $ax-b$ 除 x 的有理式 P，其剩餘等於以 $\dfrac{b}{a}$($ax-b=0$ 的根) 代式中 x 所得之值.

〔系〕

$x-a$ 能整除 x 的有理整式 P 的充要條件，爲以 a 代式中之 x 所得之值爲 0.

(例 1)　若 x^3+ax^2+bx-2 以 $x-2$ 除之恰能整除，以 $x-3$ 除之剩餘爲 4，求 a, b 之值.

〔着眼點〕 x 的有理整式 x^3+ax^2+bx-2 爲 x 的一次式 $x-2$ 整除，及以 $x-3$ 除之，則剩餘爲 4，故知宜應用剩餘定理.

〔解〕 因 $x-2$ 能整除 x^3+ax^2+bx-2，故以 $x=2$ 代入必爲 0，又以 $x-3$ 除之，剩餘爲 4，故以 $x=3$ 代入必爲 4. 卽

$$8+4a+2b-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

及

$$27+9a+3b-2=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

簡化 (1) 得 $2a+b=-3$；簡化 (2)，得 $3a+b=-7$.

故　　$a=-4$,　$b=5$.

〔類題〕

1. 若 $2x-3$, $3x+1$ 都能整除 $ax^3+bx^2+32x+15$, 求 a, b 之值.

2. 若 $x-a$, $x-2a$ 都能整除 x^3-[illegible]x^2+2x+8, 求 a 之值.

3. 若 $x-4$, $x+1$ 都能整除 px^2+qx+r, 求 $p:q:r$ 的連比.

4. 若 $x^4+px^2+qx+a^2$ 能爲 x^2-1 所整除, 則亦能爲 x^2-a^2 所整除, 試證之.

〔例 2〕 有 x 的二次整式, 若以 $x-1$ 除之, 能整除; 以 $x-2$ 除之, 剩餘爲 1; 以 $x-3$ 除之, 剩餘爲 6; 求此二次式.

〔着眼點〕 設其二次式爲 ax^2+bx+c, 然後求 a, b, c; 作關於 a, b, c 的三個方程式卽可.

〔解〕 設所求的二次式爲 ax^2+bx+c, 則依剩餘定理得:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 4a+2b+c=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ 9a+3b+c=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

解 (1), (2), (3), 得 $a=2,\ b=-5,\ c=3.$

故所求的二次式爲 $2x^2-5x+3.$

〔類題〕

1. 有一 x 的三次式, 以 $x-2$, $x-1$, $x+1$, $x+2$ 除之, 其剩餘各爲 7, -4, -2, -1; 求此式.

2. 有一 x 的整式, 若以 $x-2$ 除之, 其剩餘爲 5, 以 $x-3$ 除之, 其剩餘爲 9, 問以 $(x-2)(x-3)$ 除之, 其剩餘爲多少?

〔例 3〕 若 $x^2-(p+q)x+pq$ 能整除 $x^3+(p-q)x^2-3q^2x+2p^2q$, 則 $p=q$ 或 $2p+3q=0$, 試證之.

〔着眼點〕 (1) 實行除算, 求剩餘爲 0 的充要條件.

或 (2) 因除數能分解爲一次因子, 故可用剩餘定理.

〔解〕 能爲 $x^2-(p+q)x+pq$ 所整除, 卽爲 $(x-p)(x-q)$ 所整除, 故能爲 $x-p$, $x-q$ 所整除, 由剩餘定理, 原式之 x 以 p 代入, 或以 q 代入皆爲 0. 卽

$$p^3+(p-q)p^2-3q^2p+2p^2q=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$q^3+(p-q)q^2-3q^3+2p^2q=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

自 (1), 得 $$2p^3+p^2q-3pq^2=0,$$

即 $$p(2p^2+pq-3q^2)=0,$$

即 $$p(2p+3q)(p-q)=0.$$

$$\therefore\quad p=0,\ 2p+3q=0,\ 或\ p-q=0.$$

自 (2), 得 $$pq^2-3q^3+2p^2q=0,$$

即 $$q(pq-3q^2+2p^2)=0,$$

即 $$q(2p+3q)(p-q)=0.$$

$$\therefore\quad q=0,\ 2p+3q=0,\ 或\ p-q=0.$$

若 p, q 中有一爲 0 (如 $q=0$),

則所設之式一爲　x^3+px^2,　即　$x^2(x+p)$;

一爲　x^2-px,　即　$x(x-p)$.

不能整除,故得　$p=q$,　或　$2p+3q=0$.

〔類題〕

1. a, b, c 爲實數,若 $x^3-3b^2x+2c^3$ 能爲 $x-a$, $x-b$ 所整除,則 $a=b=c$, 或 $a=-2b=-2c$, 試證之.

2. $x^n+py^n+qz^n$, 若有 $x^2-(ay+bz)x+abyz$ 的因子,則有下面的關係式,試證之:

$$\frac{p}{a^n}+\frac{q}{b^n}+1=0.$$

3. x^3+ax^2+bx+c 及 x^2+bx+c 皆能爲 $x+h$ 所整除,則 $(a-1)^2-b(a-1)+c=0$, 試證之.

(例 4)　$nx^{n+1}-nx^n+x^n+1$ 能爲 $(x-1)^2$ 所整除,試證之(設 n 爲正整數).

〔着眼點〕 (1)　$(x-1)^2=(x-1)(x-1)$, 故以 $x-1$ 除之,所得的商,再證能爲 $x-1$ 所整除.

(2)　已知有 $x-1$ 的因子,因子分解之.

(3)　再證 $x-1$ 外之因子能爲 $x-1$ 整除.

〔解〕　$nx^{n+1}-nx^n-x^n+1$

$$=nx^n(x-1)-(x^n-1)$$

$$=nx^n(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)$$

$$=(x-1)\{nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)\}$$

$nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)$ 中之 x 以 1 代入,得

$$n-(1+1+1+\cdots\cdots+1+1)=n-n=0.$$

故 $nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)$ 能爲 $x-1$ 整除,又括弧外有 $x-1$ 因子,故原式能爲 $(x-1)^2$ 整除.

〔類題〕

1. l, m, n 爲正整數時,

$$n(x^l-1)(x^m-1)-2l(x^m-1)(x^n-1)+m(x^n-1)(x^l-1)$$

能爲 $(x-1)^3$ 整除,試證之.

2. $x^{n+1}-px^n-p^nx+p^{n+1}$ 能爲 $(x-p)^2$ 整除,試證之.

(例 5) 一 x 的有理整式,以 $x-1$ 除之,剩餘爲 4, 更以 $x-2$ 除其所得的商,剩餘爲 3, 試求原式以 $x-2$ 及 $(x-1)(x-2)$ 除之的剩餘.

〔着眼點〕 用 被除數 = 商 × 除數 + 剩餘 的關係式,譯題意,將原式表出之.

〔解〕 設 x 的有理整式爲 P, 以 $x-1$ 除之,其商爲 Q, 再以 $x-2$ 除 Q, 其商爲 Q'; 則

$$P=(x-1)Q+4,\quad Q=(x-2)Q'+3.$$

$$\therefore\quad P=(x-1)\{(x-2)Q'+3\}+4$$

$$=(x-1)(x-2)Q'+3x+1.$$

由剩餘定理,知以 $x-2$ 除之,其剩餘爲 7; 以 $(x-1)(x-2)$ 除之,其剩餘爲 $3x+1$.

〔類題〕

1. 有一 x 的有理整式,以 $x-a$ 除之,其剩餘爲 p, 更以 $x-b$ 除其商,剩餘爲 q, 更以 $x-c$ 除其第二次所得之商,剩餘爲 r; 試求原式以 $x^2-(a+b)x+ab$ 及 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ 除之的剩餘 (a, b, c 互爲素整數).

2. 有一 x 的有理整式,以 $x-3$ 除之,其剩餘爲 -1; 以 $x-4$ 除之,其剩餘爲 2; 求以 $x^2-7x+12$ 除之的剩餘.

3. 有一 x 的三次式,以 $2x-3$ 除之,剩餘爲 -3; 以 $2x^2-5x+3$ 除之,得商爲 $3x+4$, 剩餘爲不含 x; 求此三次式.

(例 6) 有一五位整數,以 9 除之所得的剩餘,等於以 9 除數字之和所

得的剩餘,試證之.

〔着眼點〕 (1) 以 9 除, $9=10-1$, 注意此二點.

(2) 五位整數(五位以上同樣).

例如 $$23547=20000+3000+500+40+7$$
$$=2\times10^4+3\times10^3+5\times10^2+4\times10+7.$$

故若以 x 代 10, 則爲
$$23547=2x^4+3x^3+5x^2+4x+7.$$

〔解〕 以 x 表 10; a, b, c, d, e 表 0 或任意之基數(惟 a 不可爲 0), 則五位之整數可以
$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
表之.

此式以 $x-1$ 除之, 所得的剩餘爲 $a+b+c+d+e$, 故五位之整數以 9 除之所得的剩餘,等於以 9 除各數字之和所得的剩餘.

〔類題〕

1. n 爲正整數時, $9\times(81)^n+1$ 能爲 10 整除,試證之.

2. 有一五位整數, 奇數位數字的和與偶數位數字的和, 其差若能爲 11 整除,則原數亦能爲 11 整除,試證之.

3. $7^{2n+1}+1$ 能爲 8 整除, $5^{2n}-1$ 能爲 24 整除,試證之 (n 爲正整數).

第三章　未定係數與完全平方式及完全立方式

〔定理〕

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n.$$

x 任爲何值常能成立之充要條件爲

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\cdots\cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ a_n=b_n.$$

〔證〕將上式之右邊移至左邊，則爲

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$+(a_{n-1}-b_{n-1})x+a_n-b_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

x 任爲何值常能成立，故設 $x=0$，則

$$a_n-b_n=0,\qquad\therefore\quad a_n=b_n.$$

在 (1) 式中，若 $a_n-b_n=0$，則 (1) 式成爲

$$\{(a_0-b_0)x^{n-1}+(a_1-b_1)x^{n-2}+\cdots\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})\}x=0\cdots\cdots(2)$$

此 (2) 式 x 之值爲 2 時，爲 3 時亦非成立不可，

$$\therefore\quad(a_0-b_0)x^{n-1}+(a_1-b_1)x^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$+(a_{n-2}-b_{n-2})x+(a_{n-1}-b_{n-1})=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此 (3) 式 $x=0$ 時非成立不可，

$$a_{n-1}-b_{n-1}=0,\qquad\therefore\quad a_{n-1}=b_{n-1}.$$

依此理推之欲 (1) 式成立，x 各冪的係數及絕對項必須爲 0，故欲原式成立之必要條件，爲

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\cdots\cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ a_n=b_n.$$

逆言之，若此條件成立，則 x 任爲何值，

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

與
$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

常相等,故又爲充分條件.

(例 1)　$x^4+3x^3+px^2+qx+r$, 若爲 x^3+2x^2+x+2 整除, 則 p, q, r 之值如何?

〔着眼點〕 (1)　雖云整除,因除式爲三次式,故不能應用剩餘定理.

(2)　用係數比較.

〔解〕 第一式 x 之四次式,能以第二式 x 之三次式整除,故其商必爲 x 之一次式,且商之 x 的係數必爲 1, 故其商爲 $x+a$ 之形. 卽

$$x^4+3x^3+px^2+qx+r=(x+a)(x^3+2x^2+x+2),$$

卽
$$x^4+3x^3+px^2+qx+r=x^4+(2+a)x^3+(1+2a)x^2+(2+a)x+2a.$$

此式爲恆等式,故兩邊 x 同冪的係數各相等,

$$3=2+a\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad p=1+2a\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$q=2+a\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\qquad r=2a\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此四式爲 a, p, q, r 的四元一次方程式,解之得

$$p=3,\quad q=3,\quad r=2.$$

〔附言〕 如此例, 比較恆等式兩邊 x (或其他某文字) 各冪之係數,求尙未決定之係數的方法,稱爲未定係數法.

〔類題〕

1.　Ax^4+Bx^3+1 能爲 $(x-1)^2$ 整除,求 A 及 B 之值.

2.　$(x^2+x+2)(x^2-2x+1)-(ax^2+bx+c)=x^4-x^3+x+1$, 若爲 x 的恆等式,則 a, b, c 之值如何?

3.　$y^2+5xy+mx^2+x+y-2$, 若能分解爲兩個 x 的一次因子,則 m 之値須如何?

4.　$x^3=A(x-1)(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)+D$, 欲使成立,則 A, B, C, D 之值如何 (A, B, C, D 爲不含 x 的數字)?

5.　x^4+1 以 x^2+ax+b 除之,求其商及剩餘; 若能整除,則 a, b 之値如何 (a, b 爲實數)?

6.　x 之二次三項式 $x^2-2px+24a^2$, 若能分解爲二個一次因子 $(x-ma), (x-na)$, 則 p 之值須如何 (m, n 爲正整數)?

（例 2） m 爲何值時，$6x^2+mxy-3y^2+3x+10y-3$ 能分解爲兩個 x, y 的一次因子.

〔着眼點〕 x, y 之一次式，其一般形雖爲 $ax+by+c$，本題着手時，先括出 x^2 之係數 6，則

$$原式=6(x+py+q)(x+p'y+q'),$$

然後應用未定係數法爲是.

〔解〕 設 $6x^2+mxy-3y^2+3x+10y-3=6(x+py+q)(x+p'y+q')$.

展開右邊，則

右邊 $=6x^2+6(p+p')xy+6pp'y^2+6(q+q')x+6(pq'+p'q)y+6qq'$.

因此式爲恆等式，

$$\therefore\quad 6(p+p')=m,\ 6pp'=-3,\ 6(q+q')=3,$$
$$6(pq'+p'q)=10,\ 6qq'=-3.$$

q 與 q' 設想隨便那一個較大都可，今設 $q\geqq q'$，則自第三及第五式，得 $q=1$, $q'=-\dfrac{1}{2}$；以之代入第四式，則得 $-3p+6p'=10$，自此式與第四式，

$$p=-3,\ p'=\frac{1}{6};\ 或\ p=-\frac{1}{3},\ p'=\frac{3}{2}.$$

故自第一式，得
$$m=6\left(-3+\frac{1}{6}\right)=-17,$$

或
$$m=6\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=7.$$

答：$m=-17$ 或 7.

〔類題〕

1. k 取如何數值，則 $x^2-y^2+3x-7y+k$ 可分爲二個一次因子.

2. $x^2+y^2-1+k(x^2+2axy-y^2)$ 若能分解爲二個 x, y 之一次因子，則 a, k 之間有何種關係？

（例 3） $4x^4-Ax^3+Bx^2-40x+16$ 若爲完全平方式，則 A, B 之值如何？

〔着眼點〕 所設之式爲 x 的四次式，且初項爲 $4x^4$，故其完全平方式必爲 $(2x^2+ax+b)^2$，然後用未定係數法.

〔解〕 設 $4x^4-Ax^3+Bx^2-40x+16=(2x^2+ax+b)^2$.

展開右邊，則

$$\text{右邊} = 4x^4 + 4ax^3 + (4b + a^2)x^2 + 2abx + b^2.$$

故　$4a = -A$ ……………(1)　　$4b + a^2 = B$ ……………(2)

　　$2ab = -40$ ……………(3)　　$b^2 = 16$ ……………(4)

自 (4) 式，　　$b = \pm 4$.

若 $b=4$，則自 (3) 式得 $a=-5$；自 (1) 式得 $A=20$；自 (2) 式得 $B=41$.

若 $b=-4$，則自 (3) 式得 $a=5$；自 (1) 式得 $A=-20$；自 (2) 式得 $B=9$.

〔類題〕

1. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + px + q$ 若爲完全平方式，則 p, q 之值如何？

2. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 若爲完全平方式，則 a, b, c, d 間有下面的關係式，試證之：

$$a^3 + 8c = 4ab, \quad c^2 = a^2 d.$$

3. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 若爲完全立方式，則 $b^2 = 3ac$, $c^2 = 3bd$；試證之.

4. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 爲 x 的完全立方式，則 $\dfrac{bc}{ad}$ 之值如何（設 $a \neq 0$, $d \neq 0$）？

5. $4x^4 - 260x^3 + 4273x^2 - 1560x + 144$ 爲完全平方式，試證之；又 $x = 26$ 時，求此式之平方根.

6. $x^6 - 8x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 - 44x + 4$ 若爲完全平方式，則 a, b, c 之值如何？

〔注意〕 關於完全平方式，以後在一元二次方程式根之判別式處，尚有說明.

第四章　因子分解

因子分解基本公式

1. $ma+mb+mc+\cdots\cdots=m(a+b+c+\cdots\cdots)$.

2. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

4. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$.

5. $$\begin{cases} x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b), \\ acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d). \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} ax^2+bx+c=a\left\{x+\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}, \\ ax^2+2b'x+c=a\left\{x+\dfrac{b'+\sqrt{b'^2-ac}}{a}\right\}\left\{x+\dfrac{b'-\sqrt{b'^2-ac}}{a}\right\}. \end{cases}$$

7. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

8. $$\begin{cases} a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3, \\ a^3\pm 3ab(a\pm b)\pm b^3=(a\pm b)^3. \end{cases}$$

9. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

10. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

因子分解之方針

第一　若有公因子,先將此公因子括出(公式 1).

第二　所設之式若為某文字(或某式)的二次式,則常能分解為此文字(或此式)的二個一次因子.

若用公式 (2), (3), (4), (5) 感到困難,則可用公式 (6).

第三　所設之式若為某文字(或某式)的三次式,則用公式 (7), (8), (9).

第四 原式爲某文字(或某式)的高次式,則用剩餘定理,或未定係數法,有時可分解之.

公式 1. $ma+mb+mc+\cdots\cdots=m(a+b+c+\cdots\cdots)$.

(例) $(a-2b)a^3-(b-2a)b^3$ 分解爲因子.

〔着眼點〕 (1) 不去括弧,則無公因子,先撤去括弧.

(2) 適當組合之,使得公因子

〔解〕 $(a-2b)a^3-(b-2a)b^3$

$$=a^4-2a^3b-b^4+2ab^3$$

$$=a^4-b^4-2a^3b+2ab^3$$

$$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)-2ab(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2-2ab)$$

$$=(a+b)(a-b)^3.$$

〔類題〕

1. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$ 分解爲因子.

2. $n^2x-xy-n^4y+2n^2y^2-y^3$ 分解爲因子.

3. $(x-1)(x-2)^2-(x-1)^3$ 分解爲因子.

公式 2. $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

公式 3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(例) $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$ 分解爲因子.

〔着眼點〕 (1) 非撤去括弧不可.

(2) $1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$ 式中有平方項,且有兩對同符號之項,故想法湊成爲和或差的平方.

〔解〕 $(1-a^2)(1-b^2)-4ab=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$$=(a^2b^2+1-2ab)-(a^2+b^2+2ab)$$

$$=(ab-1)^2-(a+b)^2$$

$$=(ab-1+a+b)(ab-1-a-b).$$

〔試題〕 次諸式,分解爲因子:

1. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.

2. $x^3(x+2y)-y^3(2x+y)$.

3. $a^4+a^2b^2+b^4$.