


大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（一）

微积分学习指导 （第三版）

（经济类与管理类）

周誓达 编著

 中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学习指导/周暂达编著. —3 版. —北京: 中国人民大学出版社, 2012. 7
大学本科经济应用数学基础特色教材系列
ISBN 978-7-300-16123-5

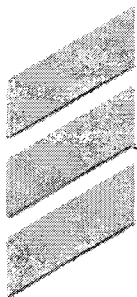
I. ①微… II. ①周… III. ①微积分-高等学校-教学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 158363 号

大学本科经济应用数学基础特色教材系列
经济应用数学基础 (一)
微积分学习指导 (第三版)
(经济类与管理类)
周暂达 编著

出版发行	中国人民大学出版社	邮政编码	100080
社 址	北京中关村大街 31 号		
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	三河市汇鑫印务有限公司	版 次	2005 年 7 月第 1 版
规 格	170 mm×228 mm 16 开本		2012 年 8 月第 3 版
印 张	11.75	印 次	2012 年 8 月第 1 次印刷
字 数	209 000	定 价	24.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换



第三版前言

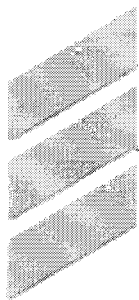
大学本科经济应用数学基础特色教材系列是为大学本科经济类与管理类各专业编著的教材与辅导书，包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》及《微积分学习指导》、《线性代数与线性规划学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》。这是一套特色鲜明的教材系列，其特色是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂。

《微积分学习指导》是经济应用数学基础（一）《微积分》的辅导书，包括两部分内容：各章学习要点与全部习题详细解答。本书引导读者在全面学习的基础上抓住重点，明确主要内容，深入理解主要概念与主要理论，熟练掌握主要运算方法，把好钢用在刀刃上，达到事半功倍的效果，快乐地学习微积分。

本着对读者高度负责的精神，本书整个书稿都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现零差错。欢迎广大读者提出宝贵意见，本书将不断改进与完善，坚持不懈地提高质量，突出自己的特色，更好地为教学第一线服务。

周哲达

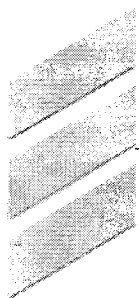
2012年6月28日于北京



目 录

第一章	函数与极限	1
	一 学习要点.....	1
	二 习题一详细解答.....	5
第二章	导数与微分	23
	一 学习要点	23
	二 习题二详细解答	27
第三章	导数的应用	47
	一 学习要点	47
	二 习题三详细解答	51
第四章	不定积分	76
	一 学习要点	76
	二 习题四详细解答	81

第五章 定积分	101
一 学习要点.....	101
二 习题五详细解答.....	108
第六章 二元微积分	127
一 学习要点.....	127
二 习题六详细解答.....	133
第七章 无穷级数与一阶微分方程	151
一 学习要点.....	151
二 习题七详细解答.....	156



第一章

函数与极限

一 学习要点

1. 函数奇偶性

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 对于任意点 $x \in D$, 若恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数; 若恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

当然, 许多函数既不是奇函数, 也不是偶函数, 称为非奇非偶函数.

2. 函数有界性

已知函数 $f(x)$ 在区间 I (可以是开区间, 也可以是闭区间或半开区间) 上有定义, 若存在一个常数 $M > 0$, 使得对于所有点 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界; 否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

3. 极限的概念

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 成立等价于极限

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \end{cases}$$

同时成立.

根据这个结论, 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 中只要有一个不存在, 或者虽然都存在但不相等, 则极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在.

极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 成立等价于

$$\begin{cases} \text{左极限 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \\ \text{右极限 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \end{cases}$$

同时成立.

根据这个结论, 左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 中只要有一个不存在, 或者虽然都存在但不相等, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

由于在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 恒有 $x \neq x_0$, 因而在一般情况下, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义都不影响它在点 x_0 处的极限情况.

4. 极限基本运算法则

法则 1 如果极限 $\lim u$ 与 $\lim v$ 都存在, 则极限

$$\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$$

法则 2 如果极限 $\lim u$ 与 $\lim v$ 都存在, 则极限

$$\lim uv = \lim u \lim v$$

法则 3 如果极限 $\lim u$ 与 $\lim v$ 都存在, 且极限 $\lim v \neq 0$, 则极限

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$$

法则 4 如果极限 $\lim u(x)$ 存在, 且函数值 $f(\lim u(x))$ 有意义, 则极限

$$\lim f(u(x)) = f(\lim u(x))$$

法则 5 如果函数 $f(x)$ 是定义域为 D 的初等函数, 且有限点 $x_0 \in D$, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

推论 1 如果有限个变量 u_1, u_2, \dots, u_m 的极限都存在, 则极限

$$\lim(u_1 + u_2 + \dots + u_m) = \lim u_1 + \lim u_2 + \dots + \lim u_m$$

推论 2 如果有限个变量 u_1, u_2, \dots, u_m 的极限都存在, 则极限

$$\lim u_1 u_2 \cdots u_m = \lim u_1 \lim u_2 \cdots \lim u_m$$

推论 3 如果极限 $\lim v$ 存在, k 为常数, 则极限

$$\lim kv = k \lim v$$

5. 无穷大量与无穷小量的概念

若变量 y 的绝对值在变化过程中无限增大, 则称变量 y 为无穷大量; 若极限 $\lim y = 0$, 则称变量 y 为无穷小量, 无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量.

如果变量 y 为无穷大量, 则变量 $\frac{1}{y}$ 为无穷小量; 如果变量 $y \neq 0$ 为无穷小量, 则变量 $\frac{1}{y}$ 为无穷大量.

如果极限 $\lim u \neq 0, \lim v = 0$, 且变量 $v \neq 0$, 则极限

$$\lim \frac{u}{v} = \infty$$

6. 无穷小量的阶

已知变量 α, β 都是无穷小量, 以无穷小量 β 作为比较标准, 那么:

- (1) 若极限 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称无穷小量 α 是比 β 较高阶无穷小量;
- (2) 若极限 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称无穷小量 α 是比 β 较低阶无穷小量;
- (3) 若极限 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$, 则称无穷小量 α 与 β 是同阶无穷小量;
- (4) 特别地, 若极限 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 则进而称无穷小量 α 与 β 是等价无穷小量.

7. 未定式极限

(1) 已知函数 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都是多项式, 当 $x \rightarrow x_0$ (有限值) 时, 若 $P(x) \rightarrow 0$ 且 $Q(x) \rightarrow 0$, 则有理分式极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限.

解法: 分子 $P(x)$ 、分母 $Q(x)$ 分解因式, 约去使得分子、分母同趋于零的 $x - x_0$ 的正整次幂非零公因式.

(2) 已知函数 $R(x)$ 与 $S(x)$ 中至少有一个含二次根式, 当 $x \rightarrow x_0$ (有限值) 时, 若 $R(x) \rightarrow 0$ 且 $S(x) \rightarrow 0$, 则无理分式极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{S(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限.

解法: 分子 $R(x)$ 、分母 $S(x)$ 同乘以它们的有理化因式, 约去使得分子、分母同趋于零的 $x - x_0$ 的正整次幂非零公因式.

(3) 已知函数 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都是多项式, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 当然也有 $P(x) \rightarrow \infty$ 与 $Q(x) \rightarrow \infty$, 则有理分式极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限.

解法:分子 $P(x)$ 、分母 $Q(x)$ 同除以它们中 x 的最高次幂,并应用极限基本运算法则 3 及关于无穷大量与无穷小量之间关系的结论.

应用上述解法,得到一般的结果:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_l x^l + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} = \begin{cases} \infty, & l > m, \\ \frac{a_l}{b_m}, & l = m, \\ 0, & l < m, \end{cases}$$

(l, m 为正整数; $a_l, \cdots, a_0, b_m, \cdots, b_0$ 为常数,且 $a_l \neq 0, b_m \neq 0$)

8. 第一个重要极限

第一个重要极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

可以推广为

$$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

它具有两个特征:

特征 1 角度一定趋于零;

特征 2 分子是角度的正弦函数,分母一定是这个角度本身.

第一个重要极限应用于求含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限,所求 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限同时满足两个特征时,极限值就等于 1.

9. 第二个重要极限

第二个重要极限为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

可以推广为

$$\lim_{u(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$$

它也具有两个特征:

特征 1 底一定是数 1 加上无穷小量;

特征 2 指数一定是底中无穷小量的倒数.

第二个重要极限应用于求 1^∞ 型未定式极限,所求 1^∞ 型未定式极限同时满足两个特征时,极限值就等于 e .

10. 函数的连续性

已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处及其左右有定义, 若有关系式 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界, 存在最大值与最小值;

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = 0 \quad (a < \xi < b)$$

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且 $f(x) \neq 0$, 则对于开区间 (a, b) 内所有点 x , 函数 $f(x)$ 同号.

二 习题一详细解答

1.01 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = 2^x - 2^{-x}$$

解: 由于关系式

$$f(-x) = 2^{-x} - 2^{-(-x)} = 2^{-x} - 2^x = -f(x)$$

所以函数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ 为奇函数.

$$(2) f(x) = x^2 \cos x$$

解: 由于关系式

$$f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$$

所以函数 $f(x) = x^2 \cos x$ 为偶函数.

1.02 判断函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内的有界性.

解: 在区间 $(1, 2)$ 内, 无论自变量 x 取值等于多少, 都使得不等式 $|x| > 1$ 恒成立, 因而恒有 $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内有界.

1.03 一块正方形纸板的边长为 a , 将其四角各截去一个大小相同的边长为 x 的小正方形, 再将四边折起做成一个无盖方盒, 试将无盖方盒容积 V 表示为所截小正方形边长 x 的函数.

解: 已设所截小正方形边长为 x , 从而无盖方盒底边长为 $a - 2x$, 如图 1-1.

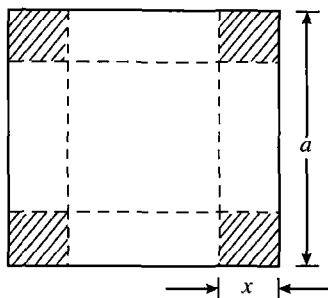


图 1—1

由于盒底面积为 $(a-2x)^2$,盒高为 x ,所以无盖方盒容积

$$V = V(x) = x(a-2x)^2$$

由于高 $x > 0$;又由于底边长 $a-2x > 0$,得到 $0 < x < \frac{a}{2}$,因而函数定义域为

$$0 < x < \frac{a}{2}.$$

1.04 欲做一个容积为 72m^3 的长方体带盖箱子,箱子底长 $x\text{m}$ 与宽 $u\text{m}$ 的比为 $1:2$,试将长方体带盖箱子表面积 $S\text{m}^2$ 表示为底长 $x\text{m}$ 的函数.

解:已设长方体带盖箱子底长为 $x\text{m}$ 、宽为 $u\text{m}$,再设箱高为 $h\text{m}$,如图 1—2.

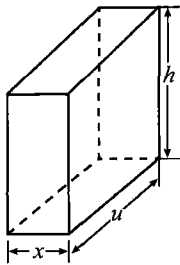


图 1—2

由于箱子底长 x 与宽 u 的比为 $1:2$,得到

$$u = 2x$$

由于箱子容积为 72m^3 ,因而有关系式 $xuh = 72$,即 $2x^2h = 72$,得到

$$h = \frac{36}{x^2}$$

所以长方体带盖箱子表面积

$$\begin{aligned}
 S &= S(x) = 2(xu + xh + uh) = 2\left(2x^2 + x \cdot \frac{36}{x^2} + 2x \cdot \frac{36}{x^2}\right) \\
 &= 4x^2 + \frac{216}{x} (\text{m}^2) \quad (x > 0)
 \end{aligned}$$

1.05 欲做一个容积为 $250\pi\text{m}^3$ 的圆柱形无盖蓄水池, 已知池周围材料价格为 a 元/ m^2 , 池底材料价格为池周围材料价格的 2 倍, 试将所用材料费 T 元表示为池底半径 $r\text{m}$ 的函数.

解: 已设圆柱形无盖蓄水池池底半径为 $r\text{m}$, 再设池高为 $h\text{m}$, 如图 1—3.

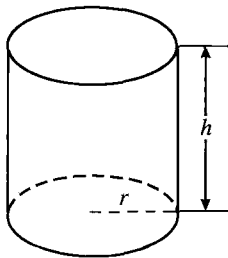


图 1—3

由于蓄水池容积为 $250\pi\text{m}^3$, 因而有关系式 $\pi r^2 h = 250\pi$, 得到

$$h = \frac{250}{r^2}$$

注意到池周围材料价格为 a 元/ m^2 , 从而池底材料价格为 $2a$ 元/ m^2 . 由于池周围面积为 $2\pi rh\text{m}^2$, 池底面积为 $\pi r^2\text{m}^2$, 所以所用材料费

$$\begin{aligned}
 T &= T(r) = 2\pi rha + \pi r^2 \cdot 2a = 2\pi a(rh + r^2) = 2\pi a\left(r \cdot \frac{250}{r^2} + r^2\right) \\
 &= 2\pi a\left(\frac{250}{r} + r^2\right) (\text{元}) \quad (r > 0)
 \end{aligned}$$

1.06 某厂每批生产 $Q\text{t}$ 某商品的平均单位成本函数为

$$\bar{C} = \bar{C}(Q) = Q + 4 + \frac{10}{Q} (\text{万元}/\text{t})$$

商品销售价格为 p 万元/ t , 它与批量 $Q\text{t}$ 的关系为

$$5Q + p - 28 = 0$$

试将每批商品全部销售后获得的总利润 L 万元表示为批量 $Q\text{t}$ 的函数.

解: 从已知销售价格 p 与批量 Q 的关系式 $5Q + p - 28 = 0$ 得到销售价格

$$p = p(Q) = 28 - 5Q$$

每批生产 $Q\text{t}$ 商品, 以价格 p 万元/ t 销售, 总收益为

$$R = R(Q) = Qp(Q) = Q(28 - 5Q) = 28Q - 5Q^2$$

又生产 Q 商品的总成本为

$$C = C(Q) = Q\bar{C}(Q) = Q\left(Q + 4 + \frac{10}{Q}\right) = Q^2 + 4Q + 10$$

所以每批商品全部销售后获得的总利润

$$\begin{aligned} L &= L(Q) = R(Q) - C(Q) = (28Q - 5Q^2) - (Q^2 + 4Q + 10) \\ &= -6Q^2 + 24Q - 10 \text{ (万元)} \end{aligned}$$

由于批量 $Q > 0$; 又由于销售价格 $p > 0$, 即 $28 - 5Q > 0$, 得到 $0 < Q < \frac{28}{5}$, 因而

函数定义域为 $0 < Q < \frac{28}{5}$.

1.07 某产品总成本 C 为月产量 x 的函数

$$C = C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 20$$

产品销售价格为 p , 需求函数为

$$x = x(p) = 160 - 5p$$

试将:

- (1) 平均单位成本 \bar{C} 表示为月产量 x 的函数;
- (2) 每月产品全部销售后获得的总收益 R 表示为销售价格 p 的函数.

解: (1) 平均单位成本

$$\bar{C} = \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{5}x + 4 + \frac{20}{x} \quad (x > 0)$$

- (2) 每月生产 x 产品, 以价格 p 销售, 所以每月产品全部销售后获得的总收益

$$R = R(p) = px(p) = p(160 - 5p) = 160p - 5p^2$$

由于销售价格 $p > 0$; 又由于产量 $x > 0$, 即 $160 - 5p > 0$, 得到 $0 < p < 32$, 因而函数定义域为 $0 < p < 32$.

1.08 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} 10^{\frac{1}{x}}$$

解: 根据极限基本运算法则 4, 得到极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 10^{\frac{1}{x}} = 10^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = 10^0 = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x+4} + 3}$$

解: 根据极限基本运算法则 5, 得到极限

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{5+4}+3} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x}$$

解:根据极限基本运算法则 5,得到极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \arctan x$$

解:根据极限基本运算法则 5,得到极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

1.09 已知分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$$

求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

解:注意到分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=1$ 左右的数学表达式不一样,因而应分别计算左极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 与右极限 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$,只有左极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 与右极限 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 都存在且相等,极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 才存在.

考虑到 $x \rightarrow 1^-$ 意味着点 x 从点 1 的左方无限接近于点 1,从而在 $x \rightarrow 1^-$ 的过程中,恒有 $x < 1$,这时函数 $f(x) = 3x-1$,因此左极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2$$

考虑到 $x \rightarrow 1^+$ 意味着点 x 从点 1 的右方无限接近于点 1,从而在 $x \rightarrow 1^+$ 的过程中,恒有 $x > 1$,这时函数 $f(x) = x^2+1$,因此右极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+1) = 2$$

由于左极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 与右极限 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 都等于 2,所以极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

1.10 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

解:当 $x \rightarrow 0$ 时,变量 x 为无穷小量,这时由于角度 $\frac{1}{x}$ 的绝对值 $\left| \frac{1}{x} \right|$ 无限增大

而使得变量 $\cos \frac{1}{x}$ 振荡无极限,但恒有 $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$,说明变量 $\cos \frac{1}{x}$ 为极限不存在的有界变量.根据无穷小量的性质,积 $x \cos \frac{1}{x}$ 仍为无穷小量,所以极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x}{x}$$

解:当 $x \rightarrow 0$ 时,由于分子 10^x 的极限为 1,分母 x 的极限为零,所以分式的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x}{x} = \infty$$

1.11 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} & \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x+5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} & \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+2} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

1.12 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{5x-1}-3)(\sqrt{5x-1}+3)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{\sqrt{5x-1}+3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+1}-2} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x-2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x-2}+1} = 2 \end{aligned}$$

1.13 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 1}{3x^2 + 2x}$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 1}{3x^2 + 2x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right)$$

$$= \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1)(5x - 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1)(5x - 2)}{(x^2 + 1)^2} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right)$$

$$= 5$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+1} \sin x$$

解: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有理分式 $\frac{x+2}{x^2+1}$ 的极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限, 其极限等于零,

说明有理分式 $\frac{x+2}{x^2+1}$ 为无穷小量, 这时由于角度 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大而使得变量 $\sin x$ 振荡无极限, 但恒有 $|\sin x| \leq 1$, 说明变量 $\sin x$ 为极限不存在的有界变量.

根据无穷小量的性质, 积 $\frac{x+2}{x^2+1} \sin x$ 仍为无穷小量, 所以极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+1} \sin x = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5}{7n^2 + 4n + 3}$$

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5}{7n^2 + 4n + 3} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right)$$

$$= \frac{2}{7}$$

1.14 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \sin x = 1 \times 0 = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$