面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学学习指导

尹海东　主编

中国农业出版社

高等数学学习指导　尹海东　主编　中国农业出版社

面向21世纪课程教材

高等数学学习指导

尹海东　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 / 尹海东主编. —北京：中国农业出版社，2005.8

面向 21 世纪课程教材

ISBN 7-109-09920-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 尹…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 075269 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

出版人：傅玉祥

责任编辑　朱　雷

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2002 年 6 月第 1 版　　2005 年 8 月第 2 版

2005 年 8 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本：787mm×960mm 1/16　　印张：13

字数：231 千字

定价：16.50 元

内容提要

本书是与“面向21世纪课程教材”《高等数学》（孟军主编）配套使用的教师参考书和学生指导书.全书共分9章，分别是函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、积分、定积分的应用、多元函数微分学、二重积分和微分方程及其应用.

每章分为5个部分，分别是教学大纲与知识结构图、疑难解析、例题详解、章节自测和章节自测答案.

本书可以作为高等农林水产院校学生的学习指导教材，也可以作为教师的教学参考书使用.

编写人员名单

主　编　尹海东

副主编　葛慧玲　郑　煜　张　虹

参　编　吴秋峰　刘　慧　杜　晶

主　审　孟　军

前 言

农科高等数学是农林水产院校本科生一门重要的公共基础课，是学生后续学习和参与科学研究必备的基础知识．“面向21世纪课程教材”《高等数学》（孟军主编）出版五年以来，受到了广大师生的一致好评，对农业院校的高等数学教学工作和教学改革事业起到了重要的作用．本书是农科高等数学立体化教材建设的一部分，是与该教材配套的教学指导和学习指导书．

全书按蓝本教材的章节进行划分，每章分为5个部分：

一、教学大纲与知识结构图：对农科高等数学教学大纲进行说明，明确章节教学内容和教学重点，引导学生把握正确的学习方向；对章节知识结构绘制图形予以阐释，使学生掌握该章节知识体系和知识脉络．

二、疑难解析：由编者设计提出问题，并进行解答．问题涉及该章节的概念辨析、理论基础、计算手段、应用方向和知识拓展，是学生学习中经常遇到的难以解决问题的汇总，是对农科高等数学课程的进一步考问和剖析．

三、例题详解：对于章节中的计算、应用和证明问题进行归类，在每类中按照由浅入深的顺序编排农科高等数学典型例题，就例题的分析思路和考核内容进行简要分析，并对例题进行详细解答，个别问题对于农科高等数学内容进行了拓宽和延展．

四、章节自测：对于每个章节配备了一套章节自测题目，题目由基本题（60 分）和提高题（40 分）构成，基本题是对该章节内容的总体考核，难度相当于课程考试，提高题难度与研究生入学考试相仿.

五、章节自测答案：就章节自测问题给出答案和简单解题步骤.

本书的编写目的是对学生学习农科高等数学课程做出指导，并可以供教师作为教学参考书. 因此，在编写过程中，我们力求贴近教学实践. 参与编写的教师都是长期在教学一线工作的同志，对教学方向和学生的学习状态有着比较准确的把握. 书中的疑难解析问题大多来自于教师的教学实践和平时积累，而所编选的例题散见于近年出版的同类教材和教学参考书，是对农科高等数学常见问题的一个总结和升华.

本书由东北农业大学的尹海东负责统稿，并负责疑难解析的撰写和例题的选定，葛慧玲负责例题的编排和演算，东北林业大学的郑煜老师负责教学大纲和知识结构图的审定和绘制，黑龙江八一农垦大学的张虹老师负责章节自测部分内容. 吴秋峰、刘慧和杜晶老师协助进行了习题的演算和校对. 全书由孟军教授主审.

本书的编写出版得到了东北农业大学数学系葛家麒教授、姚晓敏教授、王淑艳老师和教材科臧宏科长的大力支持，在此表示真诚的感谢！

编　者

2005 年 6 月于哈尔滨

目 录

第一章　函　　数

一、教学大纲与知识结构图

1. 教学大纲

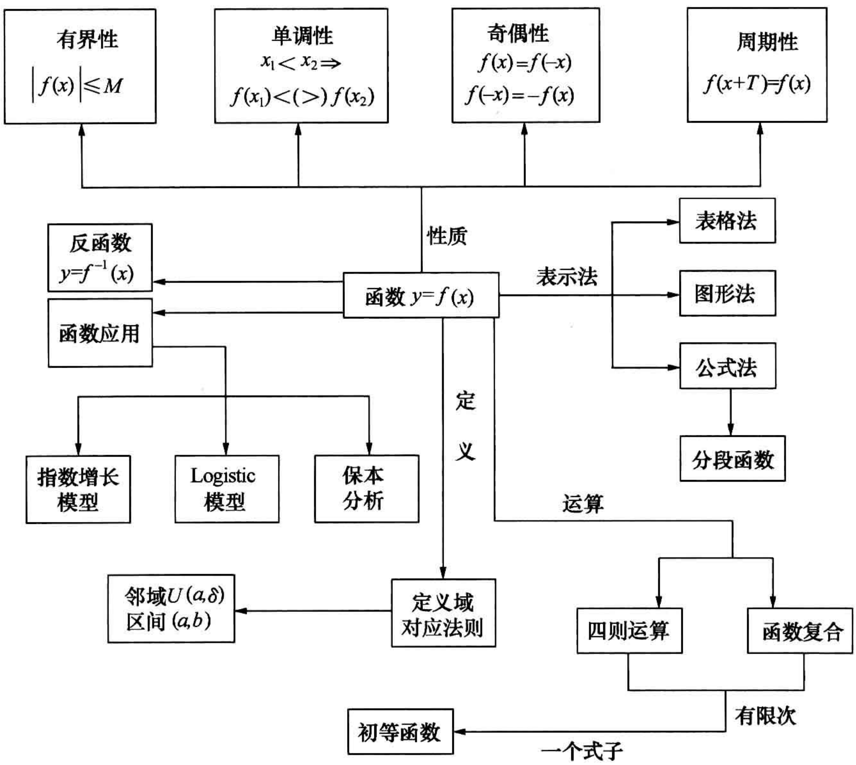
(1) 理解函数的概念，熟练掌握基本初等函数的性质.

(2) 了解反函数的概念.

(3) 掌握复合函数的概念，熟练掌握复合函数的分解方法.

(4) 熟练掌握建立函数模型的一般方法. 掌握现实问题中较为常用的函数模型.

2. 知识结构图



二、疑难解析

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$**与** $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$**是否为同一个函数?**

答 函数关系的确定有两个要素:一个是自变量与因变量之间的对应关系,另一个是自变量的定义域. 只有两个函数的对应关系和定义域都一致时,才可以说两个函数是相同的. 在上述两个函数中,由于 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域是 $[1,+\infty)$,因此,尽管两个函数在 $[1,+\infty)$ 有相同的对应关系,但由于定义域的不同,二者不是同一个函数.

在一般情况下,有时即便两个函数的解析表达式完全相同,但因为定义域的不同,也要对两个函数做出区分. 例如函数 $y=x^2$ 和 $y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$,二者有着相同的解析表达式,但第一个函数没有注明定义域,因此可以认为其定义域为 $\mathbb{R}$,而第二个函数表达式虽然在整个数轴上都有意义,但其指定了定义域为 $[-1,1]$,所以仍然认为两个函数不同. 在这种情况下,我们一般称第二个函数为第一个函数在 $[-1,1]$ 上的限制,而称第一个函数为第二个函数在 $\mathbb{R}$ 上的延拓(扩张).

2. 函数的定义域是否完全取决于函数表达式?

答 这个问题应该从两个方面来说明. 其一,函数的解析表达式只是函数关系的表达方法之一,一个函数还可以用图像或表格的方式来表达,这样,就谈不上定义域是否取决于函数表达式了;其二,即使函数关系确实由表达式给出,但有些问题因为函数产生的实际背景不同,也可能会对定义域在表达式成立的范围内有其他限制,例如研究球的体积时,函数关系为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$,虽然在表达式中 r 的范围可以取全体实数,但结合问题的实际背景,该函数的定义域只能为 $[0,+\infty)$. 因此,笼统地说函数的定义域完全取决于函数表达式是不对的.

3. 是否存在既是奇函数又是偶函数的函数?

答 对于定义于对称区间 D 的函数 $f(x)$ 而言,奇函数的定义是对于任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,而偶函数的定义是对于任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,因此,为了使得一个函数既是奇函数又是偶函数,必须要求 $f(-x)=-f(x)=f(x)$,从而只能 $f(x)=0$,所以 $f(x)=0$ 是唯一的既是奇函数又是偶函数的函数. 事实上,$f(x)=0$ 也是唯一一个关于原点和 y 轴都对称的函数.

4. 常数函数 $f(x)=c$ **是单调函数吗?**

答 教材中关于单调性的定义是对于任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒

有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数单调增加(单调减少情形类似)，这个定义是函数严格单调增加的定义，在这个定义下，常数函数显然不是单调函数. 如果将定义中的 $f(x_1)<f(x_2)$ 改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则所定义的单调性变成非严格的单调增加，也称作单调不减，如果这样，常数函数就可以认为是单调函数. 因此，在严格单调的意义下，常数函数不是单调函数，而在非严格单调的意义下，常数函数就可以认为是单调函数，而且此时常数函数是唯一的既单调增加又单调减少的函数.

5. 周期函数都有最小正周期吗?

答 周期函数的所有周期中，最小的一个正数称为最小正周期，但并非所有的周期函数都有最小正周期. 比较简单的一个例子是常数函数 $f(x)=c$，显然对于任何正数 T，都有 $f(x+T)=f(x)=c$，即任何正数都是该函数的周期，当然就没有最小正周期了；一个复杂一点的例子是狄里克莱函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in \overline{Q}\end{cases}$，容易验证，任何一个有理数 $T\in Q$ 都是该函数的周期，当然也没有最小的正周期了.

6. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是有界函数吗?

答 函数有界是指函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，并且存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$. 因此，在谈论一个函数是否有界时，一般要指明所讨论的区间. 对于上述函数而言，若讨论的区间是 $(1,2)$，则函数显然有界；若讨论的区间是 $(0,1)$，则函数就无界了. 所以，只问函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是否有界不够准确，而应指明讨论的范围. 当然，如果拿到一般的语言环境，可以理解为不指明区间的有界性讨论就代表整个定义域内的有界性，那么也可以说该函数无界.

7. 函数 $y=3x+1$ 的反函数究竟是 $x=\dfrac{y-1}{3}$ 还是 $y=\dfrac{x-1}{3}$?

答 函数与反函数的关系是一种互逆的对应关系，对于用解析式表达的函数，一般地，从原来函数中解出自变量所得的表达式称为原来函数的反函数，在这个定义下，函数 $y=3x+1$ 的反函数应该是 $x=\dfrac{y-1}{3}$，但由于人们习惯将 x 当作自变量，而将 y 当作因变量，所以在反函数中，经常互换两个变量的位置，在这个意义下，$y=\dfrac{x-1}{3}$ 也是 $y=3x+1$ 的反函数，为了表示二者的区别，经常称 $x=\dfrac{y-1}{3}$ 为本意反函数，而称 $y=\dfrac{x-1}{3}$ 为形式反函数. 两种不同方式的表达应用

于不同的场合，在原来函数与反函数图像关于直线 $y=x$ 对称这个性质中，反函数是指形式反函数，因为在同一个坐标系中，本意反函数与原来函数图像是一样的．在第三章关于反函数导数的讨论中，我们将用到本意反函数(详见第三章问题 8)．

8. 如何将函数 $y=x^2$ 与 $y=\sin x$ 进行复合运算？

答 我们一般谈论的函数复合，是指将函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 既作为第一个函数的自变量，又作为第二个函数的因变量，在复合过程中起到桥梁的作用，一般将其称为中间变量．其实，它的表现形式 u 只是一个表象，而既作为第一个函数的自变量又作为第二个函数的因变量才是这个 u 的本质，因此，在函数复合运算中，我们的方法是将第二个函数的因变量作为自变量代入到第一个函数中，并将其称为中间变量，至于这个中间变量表示为什么字母是不重要的．综上，函数 $y=x^2$ 与 $y=\sin x$ 可以复合为 $y=\sin^2 x$，而如果说函数 $y=\sin x$ 与 $y=x^2$ 复合，那么运算结果为 $y=\sin x^2$．

9. 函数 $y=\sqrt{u}$ 和函数 $u=-x^2$ 可以复合吗？两个函数复合的条件是什么？

答 两个函数复合为一个新函数，实质是通过中间变量，将原来的两个函数组合成一个新的函数，一个新的对应关系．当将第二个函数的因变量作为自变量代入到第一个函数时，值得考虑的问题就是第二个函数因变量的取值范围(值域)是否在第一个函数的定义域内．一般来说，函数复合的条件并不要求第二个函数的值域是第一个函数的定义域的子集，但为了这个新的对应关系的存在，我们要求第二个函数的值域与第一个函数的定义域必须有公共元素，即有交集．因此，像 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=-x^2-1$ 就不能复合为 $y=\sqrt{-x^2-1}$，因为这样的函数关系定义域是空集，没有意义；而作为一种极端情况，$y=\sqrt{u}$ 的定义域与 $u=-x^2$ 的值域有唯一的公共元素 0，所以二者可以复合为函数 $y=\sqrt{-x^2}$，这个函数有一个单点集的定义域．事实上，这个函数相当于 $f(x)=0$ 在集合 $\{0\}$ 上的限制．

10. 函数 $y=\sin 2x$ 是复合函数还是简单初等函数的乘积？

答 函数的复合作为一种运算，与函数的四则运算一样，都是在函数与函数之间进行的．有时候一个函数既可以看作是两个函数的复合，又可以表达为函数之间的四则运算的形式．本问题就是如此，一方面，$y=\sin 2x$ 是函数 $y=\sin x$ 和 $y=2x$ 的复合；另一方面，它又可以表达为函数 $\sin x$，$\cos x$，2 的乘积，两种说法都是正确的，如果一定要分别的话，我们不妨认为当函数表达为 $y=\sin 2x$ 时，是一个复合函数，表达为 $y=2\sin x\cos x$ 时，是简单初等函数的乘积，这两种不同结论只是对同一问题的不同观测角度的结果．

11. $y=|x|$ 是初等函数吗？分段函数都不是初等函数吗？

答 所谓初等函数，是指由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算与

复合运算，并用一个解析式子表示的函数.我们在高等数学中接触的函数绝大多数都是初等函数，非初等函数的函数主要是某些分段函数.判定一个函数是否为初等函数的标准不是看它形式上是否满足初等函数的定义，而是看它能否经过恒等变换变化成满足初等函数定义的形式.例如像本问题中提到的绝对值函数，在形式上，绝对值运算不属于四则运算和复合运算，但是如果将该函数变换为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 的形式，就符合了初等函数的定义，因此，该函数是一个初等函数.这样一来，函数 $y=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 就也是一个初等函数了，因为它虽然在形式上不是用一个式子表达的，但它显然等价于一个式子表达的函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$.

除上例外，还有很多分段函数是初等函数，我们不加证明地引入如下结论：如果分段函数在其每一段上都是初等函数，并且在分段点处连续或者没有定义，则这个分段函数是初等函数.举例如下：

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 3-x & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 属于分段点处连续情形，可以表达为：

$$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}\right] \qquad x\in[0,3]$$

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x^2 & x<0\\ \dfrac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$ 属于分段点处没有定义情形，可以表达为：

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)\ln x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2}}{x}+1\right)\frac{\sin x}{x} \qquad (x\neq 0)$$

三、例题详解

1-1 函数的定义域和值域

例 1 求 $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$ 的定义域.

分析： $\arcsin x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$，因此本问题定义域要求 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$，并且分母 $1+x\neq 0$.

解： $\begin{cases}\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1\\ 1+x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2x|\leqslant|1+x|\\ x\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2\leqslant(1+x)^2\\ x\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-2x-1\leqslant 0\\ x\neq -1\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ x\neq -1\end{cases}\Rightarrow x\in[-\frac{1}{3},1],$$

故定义域为$[-\frac{1}{3},1]$.

例 2 求 $y=\lg(\cos\lg x)$的定义域.

分析:对数函数的定义域是真数大于零,本题中有两处对数函数,分别使其大于零,得到 x 的范围,确定定义域.

解:$\begin{cases}\cos(\lg x)>0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{2}<\lg x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ x>0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}<x<10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\\ x>0\end{cases}\Rightarrow 10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}<x<10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}},(k\in\mathbb{Z})$$

故定义域为$(10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}},10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}),(k\in\mathbb{Z})$.

例 3 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,2)$,求 $f(\frac{x}{2}-1)+f(7-x)$的定义域.

分析:所求的定义域要求 $f(\frac{x}{2}-1)$、$f(7-x)$均有定义,由 $f(x)$的定义域即可求得.

解:$\begin{cases}0\leqslant\frac{x}{2}-1<2\\ 0\leqslant 7-x<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\leqslant\frac{x}{2}<3\\ -7\leqslant -x<-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\leqslant x<6\\ 5<x\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow 5<x<6,$

故定义域为$(5,6)$.

例 4 求 $y=\frac{x+1}{x+2}$的值域.

分析:函数的值域是其反函数的定义域,此题中函数容易求出反函数,所以可以通过求 $y=\frac{x+1}{x+2}$的反函数的定义域来求该函数的值域.

解:先求反函数:$y(x+2)=x+1$,则 $x=\frac{1-2y}{y-1}$,可见反函数的定义域为$\{y|y\neq 1\}$

即 $y=\frac{x+1}{x+2}$的值域是$\{y|y\neq 1\}$.

例 5 求 $y=\frac{\sin x-3}{\sin x+3}$的值域.

分析:首先将函数化简,得到 $y=1-\frac{6}{\sin x+3}$,由于 $\sin x$ 是一个有界函数,

故可根据其范围确定题中函数的值域.

解: $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x+3}=\dfrac{\sin x+3-6}{\sin x+3}=1-\dfrac{6}{\sin x+3}$.

$\because -1\leqslant \sin x\leqslant 1$, $\therefore 2\leqslant \sin x+3\leqslant 4$, $\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{6}{\sin x+3}\leqslant 3$.

则 $-2\leqslant 1-\dfrac{6}{\sin x+3}\leqslant -\dfrac{1}{2}$,所以 $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x+3}$的值域是$\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$.

1-2 函数的基本运算

例 6 设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$出现 n 个 f,$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

分析: 本题可利用数学归纳法,分别写出 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$,进而得到$f_n(x)$.

解: $f_2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\dfrac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2{}^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

比较上面两式,由数学归纳法得 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$(证明略).

例 7 设对任一非零实数 x,总有$\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{x}\right)+3f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{17}{x}$,求 $f(x)$.

分析: 注意到已知等式左侧,可以考虑代换,使得$\dfrac{2}{x}$化为$\dfrac{x}{3}$,而将$\dfrac{x}{3}$化为$\dfrac{2}{x}$.得到的新的等式与原等式联立解出 $f\left(\dfrac{2}{x}\right)$或 $f\left(\dfrac{x}{3}\right)$,再作代换解出 $f(x)$.

解: 令 $x=\dfrac{6}{t}$,代入已知等式,得:$\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{t}{3}\right)+3f\left(\dfrac{2}{t}\right)=\dfrac{3}{t}-\dfrac{17t}{6}$.

将式中 t 改为 x 并与已知等式联立得:$\begin{cases}\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{x}\right)+3f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{17}{x}\\[2mm] \dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{3}\right)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{17x}{6}\end{cases}$.

则 $f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{6}{x}$,令$\dfrac{x}{3}=u$,则 $f(u)=u-\dfrac{2}{u}$.

即 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$.

例 8 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & 1< x\leqslant 2\end{cases}$,求 $\varphi(x)$.

分析: 作代换 $x+1=t$ 求出 $\varphi(t)$,注意 x 对应的区间段也相应换作 t 的区间

段,运算完毕换回 x 即可.

解:令 $x+1=t,x=t-1$.

$\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2 & 0\leqslant t-1\leqslant 1\\ 2(t-1) & 1<t-1\leqslant 2\end{cases}$,整理得 $\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2 & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2(t-1) & 2<t\leqslant 3\end{cases}$,

所以 $\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1) & 2<x\leqslant 3\end{cases}$.

例 9 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\leqslant 0\\ x^2+\ln x & x>0\end{cases}$,求 $f(1-x),f(x-1)$.

分析:已知 $f(x)$,如对一般的函数计算 $f(1-x),f(x-1)$,直接将其代入即可,对于分段函数则需讨论 x 的区间.

解:$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x) & 1-x\leqslant 0\\ (1-x)^2+\ln(1-x) & 1-x>0\end{cases}$,

即 $f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x) & x\geqslant 1\\ (1-x)^2+\ln(1-x) & x<1\end{cases}$,

$f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1) & x-1\leqslant 0\\ (x-1)^2+\ln(x-1) & x-1>0\end{cases}$,

即 $f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1) & x\leqslant 1\\ (x-1)^2+\ln(x-1) & x>1\end{cases}$.

1-3 函数的复合

例 10 $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$, $\phi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$,求 $\varphi[\varphi(x)]$, $\phi[\phi(x)]$, $\varphi[\phi(x)]$.

分析:分段函数的复合情形比较复杂,既要将函数解析式复合,又要注意自变量的变化情形.

解:$\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & \varphi(x)\leqslant 0\\ \varphi(x) & \varphi(x)>0\end{cases}$,即 $\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$,

$\phi[\phi(x)]=\begin{cases}0 & \phi(x)\leqslant 0\\ -\phi^2(x) & \phi(x)>0\end{cases}$,当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$\phi(x)\leqslant 0$,

$\therefore \phi[\phi(x)]=0$.

$\varphi[\phi(x)]=\begin{cases}0 & \phi(x)\leqslant 0\\ \phi(x) & \phi(x)>0\end{cases}$,当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$\phi(x)\leqslant 0$

$\therefore \varphi[\phi(x)]=0$.

例 11 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\ x-1 & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\arcsin x & |x|\leqslant 1\\ \arctan x & |x|>1\end{cases}$,