名师随堂

漓江出版社
广西师范大学出版社

高二数学

名师教案精品　同步辅导精华

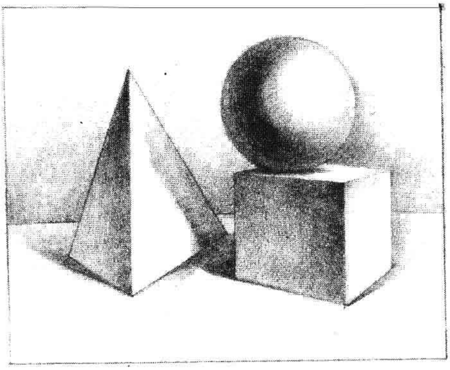
课课通　节节通

主编　黄金标

本册主编　岑志林

高二数学

名师随堂



漓　江　出　版　社
广西师范大学出版社

名师随堂

高二数学

本册主编　岑志林

漓江出版社（广西桂林市南环路159—1号）邮政编码：541002
广西师范大学出版社（广西桂林市中华路36号）邮政编码：541001
出版
全国各地新华书店经销　　贵港市人民印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张:8.875　插页:　字数:350000
1998年9月第1版　1998年9月第1次印刷
印　数:　1—20000册
ISBN 7—5407—2326—2/G·783

定价:8.50元

前　言

目前中学生负担过重,这是有目共睹的现象。对此,应该怎么办? 这是亟待解决的问题。

一些在教育第一线工作几十年的老同志常常在一起研讨学生负担过重的原因,大多数人认为有两个主要因素:其一,教材问题。现行教材分“必修”和“选修”,与高考的要求距离较大;在高中阶段进行两次循环,广大师生难以接受。于是,重点高中普遍采用“一步到位”的教学方式(将必修与选修教材综合起来讲授)。还有不少地区(包括北京地区)自编地方性教材。现行统编教材存在的一些问题或多或少都会给中学教学带来一些不良影响,都会影响到统编教材的权威性,造成学生负担过重。其二,师资情况。由于历史上的原因,目前中学师资“青黄不接”的情况比较严重,老教师年纪大了,而且人数少,青年教师比较多,但经验不足,大多数学校都出现明显的“中间断代”现象。青年教师教学上要适应目前高考要求,而处理现行教材难度又很大,于是只得发起“题海”战(这是应试教学中最低劣的战术),学生的负担怎能不重呢!

我们编写的《名师随堂》(高中部分),其目的就是想解决上述两项矛盾,即让老师在备课中有一本好的教学参考书,让学生在学习中有一本较好的学习辅导用书,使“教”与“学”中所需解决的问题,在书

中都能得到较为满意的解答。

这套书在内容上注意了如下统一安排并力求突出其特点:

[教材剖析] 对知识点做精辟分析,并从知识结构上阐述各知识点的地位以及要求掌握的程度。

[能力训练举例] 指出本节的能力要求并举出典型训练例题,让读者从中悟出解题(思路)的一般规律,以起较强的示范作用。

[随堂练习] 根据能力训练要求,选编一定量的课后练习题。题中涉及的知识点力求做到内容全、题型全。

[章末验收试题] 不经过验收,心中便没有底数,通过验收,能肯定成绩,找出不足,达到不可低估的强化作用。

[参考答案] 对练习和试题提供准确答案,对难题有较详细的提示,以便读者对照检查。

由于编写比较仓促,书中难免存在错漏,敬请广大读者批评指正。

编 者

1998年5月于沈阳

目 录

◉代数部分

◉平面解析几何部分

代数部分

第5章

不等式

本章要求学生掌握不等式的性质及其证明,掌握证明不等式的几种常用方法,掌握两个(或三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一定理,并能运用上述性质、定理和方法解决一些问题.

在熟练掌握一元一次不等式(组)、一元二次不等式的解法的基础上初步掌握其他一些简单的不等式的解法.

会用不等式$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$解一些简单问题.

◉5.1~5.2 不等式的概念和性质

教材剖析

本节由实数大小的比较和不等式的性质两部分组成.

实数大小的比较:$a\geqslant b\Leftrightarrow a-b\geqslant 0$及$a<b\Leftrightarrow a-b<0$是研究不等式的最基本的原理,是推证不等式的性质的依据.不等式的性质

是整个不等式的证明、解法及应用的理论根据.

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$ 是比较两个解析式大小关系的根据,是不等式证明中的差比法的根据.推证 $a-b>0$ 要用差式变形,变形的方法,常用的是配方和因式分解,变形后再确定各因式符号.

能力训练举例

例1 $a\in\mathbf{R}$,比较 a^2+10 与 $6a$ 的大小.

解: $\because\quad a^2+10-6a=a^2-6a+9+1=(a-3)^2+1>1$,

$\therefore\quad a^2+10>6a$.

此例为作差后应用配方法.

例2 若 a,b 为实数,下列命题正确的是(　　).

(A)若 $a>b$,则 $a^2>b^2$　　(B)若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$

(C)若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$　　(D)若 $a^2>b^2$,则 $a>b$

解: 在(A)中,若 $b<0$ 且 $|b|>|a|$,结论不对;由 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,当 $a+b<0$ 时,结论不对.

在(B)中,若 $|b|>|a|$,结论不对.

在(D)中,$a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0$,当 $a+b<0$ 时,$a=b<0$ 也不对.

在(C)中,因为 $a>|b|$,$|a|>|b|$,所以 $a^2>b^2$.故选(C).

例3 已知 $a>0$,$a^2-2ab+c^2=0$,$bc>a^2$,试比较 a,b,c 的大小.

解: $\because\quad bc>a^2>0$,　$\therefore\quad bc$ 同号.

$\because\quad b=\dfrac{a^2+c^2}{2a}>0$,　$\therefore\quad c>0$.

又 $(a-c)^2=a^2+c^2-2ac=2ab-2ac=2a(b-c)>0$,

而 $a>0$,　$\therefore\quad b>c$.

由 $\begin{cases}b=\dfrac{a^2+c^2}{2a},\\ bc>a^2,\end{cases}$　得 $\dfrac{a^2+c^2}{2a}\cdot c>a^2$.

$\therefore\quad a^2c+c^3>2a^3.$

$\therefore\quad a^3-a^2c+a^3-c^3<0$,即$(a-c)(a^2+a^2+ac+c^2)<0.$

$\therefore\quad a-c<0.\quad \therefore\quad a<c.$

综上所述:$a<c<b$.

随堂练习

一、填空题

1. $a,b\in\mathbf{R}^+$,则$\dfrac{a+b}{2}$______$\sqrt{ab}$.

2. $a^2>b^2$,且 $ab>0$,则$\dfrac{1}{a}$______$\dfrac{1}{b}$.

二、选择题

1. $a,b\in\mathbf{R}$,两个不等式 $a>b,\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$同时成立的充要条件是(　　).

(A)$a>b>0$　　(B)$a>0>b$

(C)$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}<0$　　(D)$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

2. 若 $a>b,c>d$,则下列不等式不成立的是(　　).

(A)$a-c>b-c$　　(B)$a-d>b-c$

(C)$a+d>b+c$　　(D)$a-c<a-d$

3. 若 $a\geqslant b$,则(　　).

(A)$(ac)^2>(bc)^2$　　(B)$\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}$

(C)$ac^2\geqslant bc^2$　　(D)$\dfrac{c^2}{a}>\dfrac{c^2}{b}$

4. 下列命题正确的是(　　).

(A)若 $ac>bc$,则 $a>b$　　(B)若 $ac=bc$,则 $a=b$

(C)若 $a>b$,则$\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$　　(D)$ac^2>bc^2$,则 $a>b$

5. 若 $a>b>c$,则下列结论正确的是(　　).

(A)$a|c|>b|c|$　　(B)$ab>ac$

(C)$a-c>b-c$　　(D)$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

三、解答题

1. 比较$(\lg x+1)^2$与$(\lg x-1)^2$的大小.

2. $a>b$,比较$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小.

◉5.3 不等式的证明

教材剖析

本节由定理1、2及其推论给出了几个基本不等式,这是证明不等式的理论根据.由几个例题给出证明不等式的基本方法:比较法、综合法、分析法,其中例3给出了用不等式知识求最大、最小值的方法.

不等式证明的方法主要是:比较法(差比法,商比法)、综合法、分析法、反证法、数学归纳法、另外还有换元法、放缩法、判别式法等.不等式证明的题目涉及到的知识点很多,综横联系广泛,方法灵活,技巧性强.

1.比较法(有差比法、商比法)

(1)差比法:欲证 $A>B$,即证 $A-B>0$.

步骤:作差式;差式变形;证差式取正值.

关键是第二步,通常将差式变形为积、商形式或平方和形式,变形的方法常用的有分解因式、通分或配方等.多项式不等式或分式不等式常用差比法证明.

(2)商比法:若 $B>0$,欲证 $A\geqslant B$,只须证$\frac{A}{B}>1$.

步骤:作商式;商式变形;证商值大于1.

指数不等式常用商比法证明,证商值大于1有时要用到指数函数性质,如当 $a>1$,且 $x>0$,则 $a^x>1$ 等.

2.综合法

从已知条件或基本不等式出发,运用不等式的有关性质推导出所要证明的不等式,这是“由因导果”的方法,其中常用的基本不等式有:

(1) $a^2\geqslant 0\ (a\in \mathrm{R})$;$(a\pm b)^2\geqslant 0\ (a,b\in \mathrm{R})$.

(2) $a,b\in \mathrm{R}$，$a^2+b^2\geqslant \pm 2ab$，即 $a^2+b^2\geqslant 2|ab|$.

(3) 当 $a,b,c\in \mathrm{R}^+$，有

$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立）；

$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立）；

$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立）.

(4) $a,b,c\in \mathrm{R}$ 时，有 $a^2+b^2+c^2\geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2\geqslant ab+bc+ac$（当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立）.

3. 分析法

从求证的不等式出发，寻求此不等式成立的充分条件，只要使不等式成立条件具备，就可断定此不等式成立. 这是一种"执果索因"的方法，运用时注意书写格式. 要证不等式 A，只须证 B，即证 C. 要证 C，又只须证 D，即不等式 M 成立.

$\because$ 不等式 M 成立，$\therefore$ 原不等式 A 成立.

4. 反证法

从否定结论出发，从而推出与已知或与公理、定理等相矛盾的结果，从而断定原不等式成立. 如，若 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\in \mathrm{N})$ 的证明即是此种方法.

此外，最大值和最小值定理：

若 $x,y\in \mathrm{R}^+$，

(1) 当 $xy=p$ 为定值时，则 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$，当且仅当 $x=y$ 时取得此最小值.

(2) 当 $x+y=s$ 为定值时，则 xy 有最大值 $\frac{s^2}{4}$，当且仅当 $x=y$ 时取得此最大值.

要注意三点：①$x,y\in \mathrm{R}^+$；②和或积为定值；③当且仅当 $x=y$ 时，才能取得相应的最值. 三者缺一不可.

另外，若当 $x^2+y^2=Q$ 为定值时，由 $(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)=2Q$，$xy\leqslant \frac{Q}{2}$，$x+y$ 或 xy 按上述相应条件也可取得最大值，这是应用不等式知识求最值问题的一个重要方法.

能力训练举例

例 1 设 $x>1, y_1=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}, y_2=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$,试比较 y_1 与 y_2 的大小.

解: $\because\ x>1,\quad \therefore\ y_1>0, y_2>0.$

则
$$\begin{aligned}\frac{y_1}{y_2}&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\\&=(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\\&>(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})\\&=1.\end{aligned}$$

$\therefore\ y_2<y_1.$

本题采用商比法时,运用了分母有理化,与放缩技巧.

例 2 设 a,b,c 均为非负实数,求证:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

证明: $\because\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{4},$

$\therefore\ \sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}.$

同理 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\dfrac{b+c}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{c^2+a^2}\geqslant\dfrac{c+a}{\sqrt{2}},$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\\&\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+b+c+c+a)\\&=\sqrt{2}(a+b+c).\end{aligned}$$

注意: 当 $a,b\in\mathrm{R}^+$ 时,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

该不等式及其变形是经常用的基本不等式.

例 3 已知：$a,b,c\in\mathrm{R}^{+}$，求证：

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geqslant a+b-2\sqrt{ab}.$$

证明：$\because$ $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}-(a+b-2\sqrt{ab})$

$$=c+2\sqrt{ab}-3\sqrt[3]{abc}$$

$$=c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}-3\sqrt[3]{abc}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{c\cdot\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}-3\sqrt[3]{abc}$$

$$=3\sqrt[3]{abc}-3\sqrt{abc}=0,$$

$\therefore$ $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geqslant a+b-2\sqrt{ab}$.

此题用差比法入手用到 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ 这一基本不等式.

例 4 求以下各题的最值：

(1) $x>0$, $y=x+\dfrac{1}{x^2}$ 的最小值；

(2) $x>0$, $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 的最小值；

(3) $x>1$, $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的最小值；

(4) $0<x<2$, $y=6x(4-x^2)$ 的最大值；

(5) 半径为 R 的球内接圆锥体积的最大值.

解：(1) $y=x+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}}=3\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

当且仅当 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{x^2}$，即 $x^3=2$, $x=\sqrt[3]{2}$ 时，等号成立，即 y 的最小值为 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$.

(2) $y=x^2+\dfrac{1}{x}=x^2+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$.

当且仅当 $x^2=\dfrac{1}{2x}$，即 $x^3=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ 时，y 取得此最小值.

注意：上述两题均要将其中一项拆成两项，拆时一定要保证各项

为正,积为定值,各项能够相等.

(3)$y=\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$

$=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$

$\geqslant 2+2=4.$

当且仅当 $x-1=\dfrac{1}{x-1}$,即$(x-1)^2=1$时,y取得最小值.

$\because$ $x>1$,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时,y 的最小值为 4.

(4)$\because$ $0<x<2$, $\therefore$ $4-x^2>0$.

$\therefore$ $y=6x(4-x^2)=6\sqrt{x^2(4-x^2)(4-x^2)}$

$=3\sqrt{2}\sqrt{2x^2\cdot(4-x^2)(4-x^2)}$

$\leqslant 3\sqrt{2}\sqrt{\left(\dfrac{2x^2+4-x^2+4-x^2}{3}\right)^3}$

$=3\sqrt{2}\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^3}=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.

当且仅当 $2x^2=4-x^2$,即 $3x^2=4$,$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时,y 取得最大值 $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.

(5)设球心为 O,圆锥底面圆心为 O',半径为 r,高为 h,$OO'=x$,则

$$r^2=R^2-x^2=(R+x)(R-x),\quad h=R+x.$$

$\therefore$ 圆锥体积 $V=\dfrac{\pi}{3}r^2h$

$$=\frac{\pi}{3}(R-x)(R+x)(R+x)$$

$$=\frac{\pi}{6}(2R-2x)(R+x)(R+x)$$

$$\leqslant\frac{\pi}{6}\left(\frac{2R-2x+R+x+R+x}{3}\right)^3$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{32\pi}{81}R^3.$$

当且仅当 $2R-2x=R+x$，即 $x=\frac{R}{3}$ 时，V 取得此最大值.

随堂练习

一、选择题

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，下列不等式一定成立的是(　　).

(A) $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(B) $\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(C) $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(D) $\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\frac{a+b}{2}$

2. 已知 $a>b>0$，则下列不等式一定成立的是(　　).

(A) $a^ab^b<a^bb^a$　　(B) $a^ab^b>a^bb^a$

(C) $a^ab^b\geqslant a^bb^a$　　(D) $a^ab^b\leqslant a^bb^a$

3. 设 $a>b>0$，则下列各式正确的是(　　).

(A) $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$　　(B) $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a$

(C) $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　(D) $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a$

4. 设 $a,b,m\in\mathbf{R}^+$，且 $a<b$，则下列不等式恒不成立的是(　　).

(A) $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$　　(B) $\frac{a}{b}\geqslant\frac{a+m}{b+m}$

(C) $\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+m}{b+m}\leqslant1$　　(D) $1<\frac{b+m}{a+m}<\frac{b}{a}$

5. $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=4$，则下列各式中正确的是(　　).

(A) $\frac{1}{ab}\geqslant\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant1$

(C) $\sqrt{ab}\geqslant2$　　(D) $\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{4}$

6. 已知 $x>y>0$，$u=x+\frac{1}{(x-y)\cdot y}$，则 u 的最小值为(　　).