普通高等教育“十二五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材／刘名生　尹景学　主编

数学分析学习辅导I

——收敛与发散

刘名生　冯伟贞　罗世平　编著

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
国家特色专业建设点建设项目
数学分析立体化教材/刘名生 尹景学 主编

数学分析学习辅导 I

——收敛与发散

刘名生 冯伟贞 罗世平 编著

科学出版社

内 容 简 介

本书主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题，内容包括数列的收敛与发散、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散等. 本书深入浅出，表达清楚，可读性和系统性强. 书中主要通过一些疑难解析和大量的典型例题来解析数学分析的内容和解题方法，并提供了一定数量的习题，便于教师在习题课中使用和学生在学习数学分析时练习使用.

本书可以与本立体化教材的主教材相关章节配套使用，还可作为所有学习“微积分”的高等学校学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习辅导. Ⅰ，收敛与发散/刘名生，冯伟贞，罗世平编著. —北京：科学出版社，2013

普通高等教育“十二五”规划教材　国家特色专业建设点建设项目　数学分析立体化教材

ISBN 978-7-03-036797-6

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①刘…　②冯…　③罗…　Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材　②收敛-高等学校-教材　③发散-高等学校-教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 037823 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：张小霞
责任印制：阎　磊 / 封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000 B5
2013 年 3 月第一次印刷　印张：15 1/4
字数：295 000

定价：32.00 元

《数学分析立体化教材》序言

《数学分析立体化教材》通过提供多种教学资源而提出数学分析课程的整体教学解决方案.

本立体化教材包括主教材三册 (纸介质):《数学分析 (一)》、《数学分析 (二)》、《数学分析 (三)》, 学习辅导书两册 (纸介质):《数学分析学习辅导 I—— 收敛与发散》、《数学分析学习辅导 II—— 微分与积分》, 以及《数学分析续论》教材 (纸介质) 和《数学分析网络课程》.

主教材的编写考虑不同教学基础的学校和不同层次的学生在教学方面的不同需求, 在较充分顾及系统的完整性的基础上, 特别标记了选学内容. 对教材中的选学内容可以作灵活取舍及适当调整相关内容的讲授或阅读次序. 我们希望这种编排能更好地帮助教师落实分类、分层教学, 同时使学生获得合理的阅读指引.

在数学分析学习过程中, 学生往往因为欠缺学习自主意识或基础、能力难以驾驭一个较大数学知识体系的学习, 造成自我知识体系零碎、割裂, 这是数学分析教学中存在的主要问题及教学难点. 两册学习辅导书的编写均立足类比, 希望教学双方在求同存异思想的指引下, 打通知识点的关联, 在反复对比中深化对基本数学思想方法的理解及问题解决技巧的掌握, 从而突破教学障碍.

《数学分析续论》是为已有数学分析基础的大学数学专业高年级学生提升整体分析素质、培养提出问题和分析问题的能力、激发他们对泛分析类课程的兴趣而编写的数学分析续论教材. 该书对传统的数学分析领地稍微作了一些扩张, 将简要地介绍广义的 Newton-Leibniz 公式成立的充分必要条件、研究不可导函数极值问题的次微分方法、条件极值问题的惩罚函数方法、泛函条件极值的 Euler-Langrange 方程及其在控制理论中的简单应用、矩阵函数的运算与分析性质、形式幂级数与 Fourier 变换在热方程求解中的应用, 以及一元单调函数和有界变差函数的相关知识, 目的在于扩大学生的视野, 使之较为顺利地过渡到相关课程的学习, 获得进一步的提高.

《数学分析网络课程》由课程简介、课程学习、图形与课件、测试题库、方法论、拓展阅读及学习论坛等模块构成, 为教学双方提供了丰富的教学资源. 我们希望这门网络课程能成为实施数学分析混合学习的理想平台.

本立体化教材的编写得到 “数学与应用数学国家特色专业建设点” 建设项目及 “数学与应用数学广东省高等学校重点专业” 建设项目的资助, 在华南师范大学

数学科学学院 2008 级、2009 级、2010 级和 2011 级中试用.

藉此机会感谢华南师范大学数学科学学院领导和科学出版社领导对本立体化教材的编写和出版的大力支持. 对编辑们付出的辛勤劳动, 在此表示由衷的敬意和诚挚的谢意.

希望使用本立体化教材的同行、学生批评指正, 以使本立体化教材进一步完善, 为数学分析课程建设作出更大的贡献.

刘名生　尹景学

2012 年 11 月于华南师范大学

前　　言

数学分析是数学各专业学生任务最重的课程, 一般要三个学期才能完成教学. 对于学生和教师来说, 都希望有一套好的辅导教材. 我们根据多年的教学经验, 在吸取一些现有数学分析辅导教材的优点基础上, 编写了本套辅导教材.

这套书从收敛与发散、微分与积分两个方向编写数学分析的学习辅导教材. 我们力求在可读性和系统性上能够编出特色.《数学分析学习辅导 I—— 收敛与发散》主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题, 包括点列的收敛与发散、函数极限的存在性、$\mathbb{R}^n$ 的完备性、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散、函数项级数的收敛与一致收敛, 以及函数的展开与级数的求和.《数学分析学习辅导 II—— 微分与积分》主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题, 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学、多元函数及其微分学、多元函数微分法的应用、重积分、曲线积分和曲面积分, 以及各种积分之间的关系.

首先, 在可读性方面, 每一章都编有疑难解析, 使读者通过阅读疑难解析, 对这一章的主要概念有清楚的认识. 然后通过典型例题讲述这一章的各种典型例题和解题方法, 而且在每个例题中均给出了详细的解法, 涉及的定义和定理都明确指出, 还有“分析”或者“注”, 教会读者如何分析问题和解决问题. 在每章后面还有练习题, 供读者练习使用. 书后还附有练习题的答案或提示.

其次, 在系统性方面, 我们理出了“收敛与发散”、“微分与积分”两条主线, 沿着这两条主线, 本着求同存异的思想, 展开对同一维度下的不同模型、不同维度下的同一模型的分析性质的讨论, 使概念、性质及方法的运用共性能够凸显, 并使其中的差异及特点受到关注. 我们将关系较密切的内容放在一起. 例如, 将数列的收敛与发散和点列的收敛与发散放在同一章; 将一元函数极限的存在性和多元函数极限的存在性放在同一章; 将反常积分的收敛与发散和含参变量反常积分的收敛与一致收敛放在同一章; 将函数的展开与级数的求和放在同一章. 这样更容易了解这些内容之间的联系与差别. 我们希望读者通过学习本套教材, 能够清楚理解数学分析中相关内容之间的联系. 例如, 在点列的收敛与发散这一章中, 讲述了数列的收敛与发散和 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛性, 让学生通过学习与比较, 熟悉 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛性与数列的收敛性的关系; 在反常积分的收敛与发散这一章中, 讲述了反常积分的收敛与发散和含参变量反常积分的收敛与一致收敛的内容, 使学生在学习含参变量反常积分的内容前, 要先复习反常积分的内容, 并且在学习中, 学生可以在不断的比

较中掌握它们之间的区别与联系.

本套教材分两册出版.《数学分析学习辅导 I—— 收敛与发散》由刘名生教授、冯伟贞副教授和罗世平博士编写,《数学分析学习辅导 II—— 微分与积分》由刘名生教授、韩彦昌副教授、徐志庭教授和冯伟贞副教授编写. 初稿完成后, 编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改. 全套教材由刘名生教授和冯伟贞副教授负责编写组织工作.

本套教材在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的大力支持, 并得到国家特色专业建设点建设项目和广东省高等学校重点专业建设项目的资助. 我们在华南师范大学数学科学学院 2011 级师范班及 2011 级、2012 级勷勤创新班的数学分析课程中试用了本套教材, 2011 级师范班及 2011 级、2012 级勷勤创新班的学生为本套教材的完善提供了许多宝贵意见, 在此一并致谢. 我们还要感谢科学出版社的热情关注和大力支持才使本套教材得以尽早出版.

本套教材中的不足之处在所难免, 敬请读者批评指正.

编　者

2012 年 11 月于华南师范大学

目　录

《数学分析立体化教材》序言
前言
第 1 章　点列的收敛与发散 …… 1
1.1 疑难解析 …… 1
1.2 典型例题 …… 6
1.2.1 数列收敛的概念 …… 6
1.2.2 数列收敛的判别与数列极限的计算 …… 10
1.2.3 数列发散的概念 …… 19
1.2.4 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛 …… 21
1.2.5 综合举例 …… 23
1.3 练习题 …… 33
第 2 章　函数极限的存在性 …… 35
2.1 疑难解析 …… 35
2.2 典型例题 …… 43
2.2.1 用定义验证一元函数的极限 …… 43
2.2.2 一元函数极限的计算 …… 46
2.2.3 证明一元函数极限不存在 …… 56
2.2.4 函数的连续、间断及一致连续 …… 57
2.2.5 二元函数极限的存在性 …… 65
2.2.6 综合举例 …… 68
2.3 练习题 …… 81
第 3 章　$\mathbb{R}^n$ 的完备性 …… 83
3.1 疑难解析 …… 83
3.2 典型例题 …… 86
3.2.1 确界的概念与确界原理 …… 86
3.2.2 $\mathbb{R}$ 上的完备性 …… 89
3.2.3 $\mathbb{R}^2$ 上的完备性 …… 93
3.2.4 综合举例 …… 94
3.3 练习题 …… 98

第 4 章　反常积分的收敛与发散 …… 100
4.1　疑难解析 …… 100
4.2　典型例题 …… 107
4.2.1　反常积分的计算 …… 107
4.2.2　无穷积分的被积函数在无穷远处的性质 …… 110
4.2.3　反常积分的敛散性判别 …… 113
4.2.4　含参量反常积分的收敛与一致收敛 …… 119
4.2.5　含参量反常积分性质的讨论 …… 124
4.2.6　积分号下运算的可交换性 …… 127
4.3　练习题 …… 132
第 5 章　数项级数的收敛与发散 …… 134
5.1　疑难解析 …… 134
5.2　典型例题 …… 138
5.2.1　数项级数收敛与发散的概念 …… 138
5.2.2　正项级数的收敛与发散 …… 142
5.2.3　一般项级数的收敛与发散 …… 148
5.2.4　综合举例 …… 152
5.3　练习题 …… 160
第 6 章　函数项级数的收敛与一致收敛 …… 162
6.1　疑难解析 …… 162
6.2　典型例题 …… 164
6.2.1　函数列的收敛与一致收敛 …… 164
6.2.2　函数项级数的收敛与一致收敛 …… 170
6.2.3　幂级数和 Fourier 级数的一致收敛性 …… 176
6.2.4　综合举例 …… 178
6.3　练习题 …… 187
第 7 章　函数的展开与级数的求和 …… 189
7.1　疑难解析 …… 189
7.2　典型例题 …… 193
7.2.1　幂级数的收敛区间与收敛域 …… 193
7.2.2　函数的幂级数展开 …… 197
7.2.3　函数的 Fourier 级数展开 …… 201
7.2.4　求幂级数的和函数 …… 208
7.2.5　求数项级数的和 …… 212
7.2.6　综合举例 …… 220

7.3 练习题 ······ 223
练习题的参考答案或提示 ······ 226
参考文献 ······ 234

第 1 章　点列的收敛与发散

1.1　疑 难 解 析

一、数列情况

1. 如何理解数列极限的“ε-N”定义中，ε 的二重性与 N 的二重性？

答：数列的收敛是一个动态的过程，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的直观描述是当 n 无限增大时，a_n 无限接近 a. ε 与 N 的二重性就是从定量的角度描述 a_n 无限接近 a 与 n 无限增大这两个过程.

a_n 逼近 a 时要经历一个无限的过程，但这个无限过程又要一步步地实现，而且每一步的变化都是有限的. ε 的任意性说明 a_n 可以任意逼近 a，要多接近就有多接近. ε 的相对固定性用来实现每一步的有限变化. 由于 ε 表示 a_n 逼近 a 的程度，一般只考虑较小值的 ε(因为对于较小值的 ε 成立，对于较大值的 ε 必然成立)，所以在论证极限时，可以根据需要，限制 ε 小于某个正数，如限制 $\varepsilon < 1$ 等，也可以用 $\varepsilon/2, 3\varepsilon$ 或 ε^5 等来代替 ε.

n 无限增大也要经历一个无限的过程，由于 n 要经过除有限个外的所有正整数，所以关键是要找出那除外的有限个的最大值，即 N 的存在性是最重要的，显然 N 不是唯一的. 事实上，如果 N 满足定义要求，那么 $N+1$ 也满足定义要求. 在证明数列收敛的时候，并不需要找出满足要求的最小的正整数 N.

2. 如果对任意 $\varepsilon > 1$，都存在正整数 N，使当 $n > N$ 时都有 $|a_n - a| < \varepsilon$，能否推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$? 为什么？

答：不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 因为 $\varepsilon > 1$，这样不能达到当 n 无限增大时，a_n 无限接近 a 的效果.

这里容易举出反例. 例如，取 $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $a = 0$，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0 = a$，但是对任意 $\varepsilon > 1$，都存在正整数 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon - 1}\right] + 1$，使当 $n > N$ 时都有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

3. 应用适当放大法时，如果放大后的式子 A_n 以一个正数 b 为极限，能否对任意 $\varepsilon > 0$，由 $A_n < \varepsilon$ 解出 $n > N$? 为什么？

答：此时不能对任意 $\varepsilon > 0$，由 $A_n < \varepsilon$ 解出 $n > N$. 例如，取 $A_n = 1 + \dfrac{1}{n}$，则当 $0 < \varepsilon < 1$ 时，由 $A_n < \varepsilon$ 解得 n 不存在，即不等式 $1 + \dfrac{1}{n} < \varepsilon$无解. 所以进行放大时

$|a_n - a| < A_n$, 放大后的式子 A_n 必须以 0 为极限, 即不能放得太大, 否则放大法失效.

4. 下列说法是否与数列极限的“ε-N”定义等价?

(1) $\forall\varepsilon \in (0,1), \exists N > 0, \forall n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$;

(2) $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geqslant N$, 有 $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$;

(3) $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon^3$, 其中 M 正常数;

(4) $\forall\varepsilon > 0$, 在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 外只有 $\{a_n\}$ 的有限项;

(5) 对任意有理数 $\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$;

(6) 对无穷多个 $\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geqslant N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$;

(7) $\forall\varepsilon > 0$, 在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内含有 $\{a_n\}$ 的无穷多项;

(8) $\forall\varepsilon > 0$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$;

(9) $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使 $|a_n - a| < \varepsilon$;

(10) $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时, $\forall\varepsilon > 0$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

答: (1)~(5) 与数列极限的“ε-N”定义等价,(6)~(10) 与数列极限的“ε-N”定义不等价. (8),(9) 与 (10) 是学生容易出的典型错误.

首先说明 (8),(9) 与 (10) 为什么是错误的. (9) 中虽然写了 $\exists N > 0$, 但是没有说明它的作用 (没有写“当 $n > N$ 时”), 写了等于白写. (8), (9) 实际上都等价于 $a_n \equiv a$, 即 $\{a_n\}$ 是常数列, 这显然是错误的. (10) 等价于当 $n > N$ 时, 有 $a_n = a$, 即 $\{a_n\}$ 从第 $[N]+1$ 项开始是常数列, 这当然也是错误的.

“ε-N”定义必须是先有“$\forall\varepsilon > 0$”, 后有“$\exists N > 0$”, 然后就说明“ε, N”的作用, 即当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 按照这个顺序, 四句合在一起, 就是数列极限的“ε-N”定义. 缺少了一句及以上 (如 (8), (9)), 以及颠倒写法 (如 (10)) 都是错误的.

其次证明 (6) 与 (7) 的情况. 只需要举一反例, 例如, 取 $a_n = (-1)^n, a = 1$, 则对任意 $\varepsilon > 2, \exists N = 1 > 0, \forall n \geqslant N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 且 $\forall\varepsilon > 0$, 在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内含有 $\{a_n\}$ 的所有偶数项 (无穷多项), 即 (6), (7) 都成立, 而显然 $a_n = (-1)^n$ 不收敛于 $a = 1$. 所以 (6), (7) 与数列极限的“ε-N”定义不等价.

再证明 (5) 的情况, 类似可以证明其他情况. 显然 (5) 是 a_n 收敛于 a 的必要条件, 下面证明 (5) 也是 a_n 收敛于 a 的充分条件. 事实上, $\forall\varepsilon > 0$, 若 ε 是有理数, 由条件知, $\exists N > 0, \forall n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$; 若 ε 是无理数, 则存在有理数 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$, 于是由条件知, 对 ε_1, $\exists N > 0, \forall n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon_1 < \varepsilon$, 所以根据数列极限的“$\varepsilon$-$N$”定义得, a_n 收敛于 a, 即 (5) 也是 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充分条件. 故 (5) 与数列极限的“ε-N”定义等价.

5. 下列推理是否正确? 为什么?

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{个}}=0.$$

答: 不正确, 因为相加的项数随着 n 无限增大而趋于无穷, 不满足数列极限的运算法则. 另一方面, 直接计算知, $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$. 所以不能随便对无穷个收敛数列的和使用数列极限的运算法则.

6. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\{b_n\}$ 是有界数列, 能否推出数列 $\{a_nb_n\}$ 收敛? 为什么?

答: 不能推出数列 $\{a_nb_n\}$ 收敛, 因为有界数列 $\{b_n\}$ 可能发散. 例如, 取 $a_n=1, b_n=(-1)^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, $\{b_n\}$ 是有界数列, 但是数列 $\{a_nb_n\}=\{(-1)^n\}$ 发散.

7. 发散数列是否有四则运算? 发散数列与其子列的敛散性有什么关系?

答: 发散数列没有四则运算, 即两个发散数列的和、差、积和商可能发散, 也可能收敛.

例如, 数列$\{a_n\}=\{(-1)^n\}$, $\{b_n\}=\{2(-1)^n\}$, $\{c_n\}=\{-(-1)^n+1\}$, $\{d_n\}=\{2(-1)^n+1\}$ 都发散, 但是数列 $\{a_n+b_n\},\{a_n-b_n\},\{a_nc_n\},\left\{\dfrac{b_n}{d_n}\right\}$ 都发散, 而数列 $\{a_n+c_n\},\{b_n-d_n\}$, $\{a_nb_n\},\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 都收敛.

发散数列与其子列的敛散性有如下关系: 数列 $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 至少存在一个发散子列.

8. 试给出下列概念的正面陈述:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a; (2) 数列 $\{a_n\}$ 不收敛.

答: (1) 若存在 $\varepsilon_0>0$, $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 存在 $n_0>N$, 满足 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$, 则称数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a;

(2) 若对任意实数 a, 存在 $\varepsilon_a>0$, $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 存在 $n_0>N$, 满足 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_a$, 则称数列 $\{a_n\}$ 不收敛.

9. 一个数集无上界、无下界或无界如何定义?

答: 设数集 A 非空. 如果对任意实数 M, 存在 $x\in A$, 使得 $x>M$, 那么称数集 A 无上界; 如果对任意实数 M_1, 存在 $y\in A$, 使得 $y<M_1$, 那么称数集 A 无下界; 如果对任意正实数 M_2, 存在 $z\in A$, 使得 $|z|>M_2$, 那么称数集 A 无界.

注意, 这里 M 可以限制为正实数, M_1 可以限制为负实数.

10. 数集的上界与上确界有什么联系和区别? 数集的下界与下确界有什么联系和区别?

答: 一个非空数集 A 的上确界也是它的上界, 且是其最小的上界, 这是数集的上界与上确界的联系. 它们的区别: 非空数集 A 的上界有无穷个, 而上确界只有一个.

一个非空数集 A 的下确界也是它的下界, 且是其最大的下界, 这是数集的下界与下确界的联系. 它们的区别: 非空数集 A 的下界有无穷个, 而下确界只有一个.

11. 试给出非空数集 S 无最大值、无最小值的精确定义?

答: 如果对任何 $x \in S$, 都存在 $y \in S$, 使 $y > x$, 则称数集 S 无最大值. 如果对任何 $x \in S$, 都存在 $y \in S$, 使 $y < x$, 则称数集 S 无最小值.

12. 试问无最大值的数集是否无上界? 无最小值的数集是否无下界?

答: 不一定. 例如, 设 $S = (a, b)$, 其中 $a < b$, 则易验证 S 既无最大值, 也无最小值, 但是 S 有上界 b 和下界 a.

13. 如果 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 那么能否推出数列 $\{c_n\}$ 收敛?

答: 不能推出数列 $\{c_n\}$ 收敛, 因为数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 可能发散, 即它并不满足迫敛性定理的所有条件.

例如, 设 $a_n = n$, $b_n = n + \dfrac{2}{n}$, $c_n = n + \dfrac{1}{n}$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 但是数列 $\{c_n\} = \left\{n + \dfrac{1}{n}\right\}$ 发散. 所以使用迫敛性定理时, 要保证满足它的所有条件.

14. 对单调数列 $\{a_n\}$, $\{a_n\}$ 收敛是否等价于 $\{a_n\}$ 是有界数列?

答: 是的, 对单调数列 $\{a_n\}$, $\{a_n\}$ 收敛等价于 $\{a_n\}$ 是有界数列. 特别地, 单调递增数列 $\{a_n\}$ 收敛等价于 $\{a_n\}$ 是有上界数列; 单调递减数列 $\{a_n\}$ 收敛等价于 $\{a_n\}$ 是有下界数列. 所以对于单调数列, 单调有界定理是判别其收敛的有效方法.

15. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 总有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, 那么数列 $\{a_n\}$ 是否收敛? 为什么?

答: 数列 $\{a_n\}$ 不一定收敛, 因为它并不满足 Cauchy 收敛准则. 例如, 对于数列 $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$, 它满足上面的条件, 但是它发散.

16. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 总有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, 那么数列 $\{a_n\}$ 是否收敛? 为什么?

答: 数列 $\{a_n\}$ 不一定收敛, 因为 N 可以与 p 有关, 它也不满足 Cauchy 收敛准则. 例如, 对于数列 $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$, 它满足上面的条件, 但是它发散.

17. 判别数列收敛有哪些方法?

答: 判别数列收敛有如下方法:

(1) 利用数列极限的 "ε-N" 定义验证;

(2) 利用收敛数列的四则运算法则, 包括根式有理化及拆项法等;

(3) 利用无穷小数列的性质, 如无穷小数列与有界数列的积仍是无穷小数列;

(4) 利用收敛数列与其子列的关系;

(5) 利用迫敛性定理;

(6) 对单调数列, 利用单调有界定理;

(7) 利用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$;

(8) 利用 Cauchy 收敛准则.

18. 证明数列的发散有哪些方法?

答: 证明数列的发散主要有如下方法:

(1) 利用数列发散的定义或者数列收敛的否定说法;

(2) 利用数列收敛的必要条件"收敛数列必有界", 即证明数列无界;

(3) 利用收敛数列与其子列的关系;

(4) 利用 Cauchy 收敛准则的否定形式;

(5) 其他方法, 如反证法等.

二、$\mathbb{R}^n$ 中点列的情况

19. 怎样定义 $\mathbb{R}^2$ 中点列的收敛性? 这个定义与数列收敛有什么关系?

答: 设 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个点列. 如果存在点 $P_0(x_0,y_0)$, 对于任意给定的正数 ε, 存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时, 总有

$$P_n\in U(P_0;\varepsilon)\quad \text{或者}\quad \|P_n-P_0\|<\varepsilon,$$

则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于点 P_0, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 或 $P_n\to P_0$, 当 $n\to\infty$.

这个定义与数列收敛的关系是: 点列 $\{P_n\}$ 收敛于点 P_0 等价于数列 $\{\|P_n-P_0\|\}$ 收敛于 0.

20. 怎样定义 $\mathbb{R}^n$ 中点列的有界性、点列的收敛性?

答: 设 $\{P_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列. 如果存在 $M>0$, 使对任意正整数 k, 有 $\|P_k\|\leqslant M$, 则称点列 $\{P_k\}$ 是有界的.

如果存在点 $P_0\in\mathbb{R}^n$, 对于任意给定的正数 ε, 存在正整数 N, 使当 $k>N$ 时, 总有 $P_k\in U(P_0;\varepsilon)$, 则称点列 $\{P_k\}$ 收敛于点 P_0.

21. 收敛数列的性质定理对 $\mathbb{R}^2$ 中的收敛点列仍然成立吗? 为什么?

答: 有些性质成立. 例如, 极限的唯一性、线性性质和有界性定理对 $\mathbb{R}^2$ 中的收敛点列仍然成立. 但是, 对 $\mathbb{R}^2$ 中的收敛点列没有保不等式性定理和保号性定理.

22. $\mathbb{R}^2$ 中是否仍有单调有界定理?

答: $\mathbb{R}^2$ 中没有单调有界定理, 因为 $\mathbb{R}^2$ 中的点不能比较大小.

23. $\mathbb{R}^2$ 中点列收敛的 Cauchy 准则是怎样的?

答: $\mathbb{R}^2$ 中点列收敛的 Cauchy 准则是: 设 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个点列, 则点列 $\{P_n\}$ 收敛的充分必要条件是对于任意给定的正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $m,n>N$ 时, 总有 $\|P_m-P_n\|<\varepsilon$.

24. $\mathbb{R}^2$ 中怎样定义"子列"?

答: 设 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个点列. 如果 $\{n_k\}$ 是正整数列 $\{n\}$ 的子列, 则称 $\{P_{n_k}(x_{n_k},y_{n_k})\}$ 为点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 的一个子列.

1.2 典型例题

1.2.1 数列收敛的概念

利用数列极限的"ε-N"定义验证常数 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 关键是证明满足条件 ($\forall n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$) 的 N 存在, 而证明 N 的存在性总是通过考察不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$, 设法把 N 找出来. 下面通过一些例子介绍找 N 的常用方法.

1. *解不等式法*

例 1　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+2n}=1$.

证明　$\forall\varepsilon>0$, 要找 N, 使 $\forall n>N$, 有 $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+2n}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 由于

$$\left|\frac{n^2-2}{n^2+2n}-1\right|=\frac{2n+2}{n^2+2n},$$

所以 $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+2n}-1\right|<\varepsilon$ 等价于

$$\frac{2n+2}{n^2+2n}<\varepsilon\Longleftrightarrow n^2+2\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)n-\frac{2}{\varepsilon}>0.$$

注意到 $n>0$, 解上述不等式得, $n>\sqrt{1+\dfrac{1}{\varepsilon^2}}-1+\dfrac{1}{\varepsilon}$.

于是取 $N=\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{\varepsilon^2}}-1+\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1\in\mathbb{N}_+=\{1,2,\cdots\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2-2}{n^2+2n}-1\right|<\varepsilon,$$

因此根据定义得, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+2n}=1$. □

注 在例 1 中, 找 N 的方法是直接解不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$. 用此方法找 N 的困难是这个不等式不一定能解出来, 并且有时虽然能解, 但是比较麻烦. 一般地, 为了简单, 常用适当放大法.

2. 适当放大法

所谓适当放大法, 就是把 $|a_n-a|$ 适当放大的方法, 即在限制 $n>N_1$ 下, 进行放大 $|a_n-a|\leqslant A_n$, 这样要使 $|a_n-a|<\varepsilon$, 只要 $A_n<\varepsilon$. 若能放大到较简单的式子 A_n, 就易从不等式 $A_n<\varepsilon$ 解出 $n>\varphi(\varepsilon)>0$, 再令 $N=\max\{N_1,[\varphi(\varepsilon)]\}$ 便可.

例 2 用适当放大法验证例 1.

证明 $\forall\varepsilon>0,\forall n\geqslant 1$, 由于

$$\left|\frac{n^2-2}{n^2+2n}-1\right|=\frac{2n+2}{n^2+2n}<\frac{4n}{n^2}=\frac{4}{n},$$

所以要使 $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+2n}-1\right|<\varepsilon$ 成立, 只要 $\dfrac{4}{n}<\varepsilon$, 即 $n>4/\varepsilon$.

于是取 $N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]+1\in\mathbb{N}_+$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2-2}{n^2+2n}-1\right|<\varepsilon,$$

因此根据定义得, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+2n}=1$. □

注 显然例 2 的解题过程比例 1 简单, 且例 2 的方法适应于更复杂的数列极限 (见后面的例 3～ 例 5). 但是必须注意, 这种放大要适当. 放大的原则:

(1) 放大后的式子较简单, 例如 $A_n=\dfrac{b}{n^k}\,(k>0,b>0)$ 等;

(2) 放大后的式子当 $n\to\infty$ 时以 0 为极限.

例 3 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+1}{3n^5+n^3-3n+2}=\dfrac{1}{3}$.

证明 由于当 $n>2$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^5+1}{3n^5+n^3-3n+2}-\frac{1}{3}\right|&=\left|\frac{n^3-3n-1}{3(3n^5+n^3-3n+2)}\right|\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{n^3-3n-1}{3n^5+n(n^2-3)+2}\\&<\frac{n^3}{9n^5}=\frac{1}{9n^2},\end{aligned}$$