

全面突破考研数学



2014 年

考研数学 新编考试参考书

主编 / 李恒沛 高文森

- ✓ 理工经济通用，权威命题专家亲自编写
- ✓ 针对历年考研试题概念性强、综合性强、运算性强，灵活考查考生推理与应用能力的特点，全面精讲精练，重点突出
- ✓ 例题选择多样化，典型性强，解析透彻，侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用
- ✓ 每章后精选习题，与例题相互补充，深化内容



中国人民大学出版社

2014^年

考研数学

新编考试参考书

主 编/李恒沛 高文森

编 者/李恒沛 高文森

侯书会 陆淑珍

陶其武

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2014 年考研数学新编考试参考书/李恒沛, 高文森主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2013. 4
ISBN 978-7-300-17299-6

I. ①2… II. ①李… ②高… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 063656 号

2014 年考研数学新编考试参考书

主编 李恒沛 高文森

2014 Nian Kaoyan Shuxue Xinbian Kaoshi Cankaoshu

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511398 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.1kao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

版 次 2013 年 4 月第 1 版

印 张 43.25

印 次 2013 年 4 月第 1 次印刷

字 数 95

定 价 69.00 元

版

印装差错 负责调换

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

遵循考试大纲规定的内容，全书分高等数学（第一至八章）、线性代数（第九章）、概率论与数理统计（第十章）三部分共十章。每章下面分节，每节又分“内容摘要与考查重点”和“例题分析”两部分。第一部分简明扼要地把本节考查内容介绍出来，并指出考查重点；第二部分列举典型例子分析解题思路，并表明考试题型。这些例子侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用，可以使考生触类旁通、举一反三。书末有三个附录，附录1为差分方程简介（仅供报考“数学三”的考生使用），附录2、附录3分别为2013年和2012年研究生入学考试数学试题及参考解答，便于广大考生复习使用。本书也可供在读本科生加深理解学习内容、复习备考以及教师教学参考使用。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有如下特点：（1）概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。（2）综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。（3）运算性强。正确的运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运算自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力。这是必不可少的能力，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书内容紧扣大纲，全面而不烦琐，条理清晰，重点突出；再现考题，例题选择多样化，典型性强，解析透彻；章章小结，前后照应，便于掌握；每章之后附有习题，便于考生自我测试。本书中例题和习题互相补充，起到深化内容的作用，要求考生不仅要看懂例题，还要演算习题，两者都是很重要的。

本书由李恒沛、高文森、侯书会、陆淑珍、陶其武编写，全书由李恒沛统稿。编著者均长期在重点大学从事数学教学和科研工作，有的参加过多年全国统考数学试题的命制，有的从事过多年考研辅导，并都参与过历年考研数学试卷的评阅和分析，积累了丰富的教学经验，对考研命题有深入的研究，考研辅导效果显著。编著者愿本书的出版对考研学子有所裨益。

编者建议预备报考硕士研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关规定和要求，配合有关教材，认真阅读本书。在阅读完本书之后，建议考生把本书中的全部习题做上 1~2 遍，从而达到熟练、正确解答的水平。

本书在编辑、出版过程中，得到有关编辑的大力支持和帮助，在此表示感谢。

祝愿考生胸有成竹，心想事成。

编著者

于北京，2013 年 2 月

读考研书 找人大社

一、2014 人大社考研英语类图书

书 名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
研究生入学考试复试英语口语全书	任林静	16K	39.00	2012.12
考研英语新教程	张锦芯	16K	59.00	2013.1
考研英语模拟考场	张锦芯	16K	39.00	2013.9
历年考研英语真题名家详解	张锦芯	16K	46.00	2013.3
考研英语阅读理解技巧进阶	白洁	16K	39.00	2013.3
考研英语历年真题全新解读	白洁	16K	45.00	2013.2
考研英语模拟考场（英语二）	白洁	16K	22.00	2013.8
考研英语词汇活学活用巧链记	白洁	32K	26.00	2013.1
考研英语阅读理解高分强化训练 100 篇	白洁	16K	49.00	2013.3
考研英语阅读 200 篇	郭庆民	16K	69.00	2013.1
考研英语阅读 100 篇（英语二）	郭庆民	16K	49.00	2013.1
考研英语词汇复习指南	谢振元	16K	56.00	2012.12
考研英语高分词汇精记速记	谢振元	32K	48.00	2012.12
考研英语阅读完形翻译全突破	赵小冬 袁秉政	16K	49.00	2012.12
考研英语短文写作及英汉翻译	刘鸿飞 孙艺之	16K	46.00	2012.12
考研英语大纲词汇分类精读笔记	蒋军虎	16K	49.00	2012.12
考研英语大纲核心词汇必备	王建华	16K	26.00	2013.1
2004—2013 十年考研英语真题详解	王建华	16K	26.00	2013.1
考研英语经典专项阅读 120 篇	王建华	16K	56.00	2013.1
考研英语写作经典范文 100 篇	王建华	16K	28.00	2013.6

二、2014 人大社考研政治类图书

书 名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研政治理论复习导本	李淮春	16K	66.00	2012.12
最新考研政治真题命题研究与高分策略	余学本 郭务本 肖秀荣	16K	42.00	2013.4
硕士研究生入学考试思想政治理论课复习指导	余学本等	16K	52.00	2013.1
考研政治 1000 客观题突破 200 核心考点	阳光考研命题研究中心	16K	29.00	2012.12
考研政治真题解析与预测考点背诵	阳光考研命题研究中心	16K	59.00	2013.2
考研政治高分练习题库	阳光考研命题研究中心	16K	52.00	2012.12
考研政治核心考点解析	阳光考研命题研究中心	16K	42.00	2013.2
考研政治 2000 精准金题	阳光考研命题研究中心	16K	46.00	2012.12
考研政治精选实用教程	李海洋	16K	59.00	2013.1
考研政治历年真题精析	李海洋	16K	48.00	2013.2
考研政治考点同步 1600 题	李海洋	16K	48.00	2013.3
考研政治冲刺考点精华	李海洋	16K	19.00	2013.9

书 名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研政治形势与政策解读及命题热点	李海洋	16K	12.00	2013.9
考研政治全真模拟 4 套卷	李海洋	16K	12.00	2013.9
考研政治大纲要点 5 天速记	李海洋	16K	12.00	2013.9
考研政治百天辅导教程	芦欣	16K	56.00	2013.1
考研政治多项选择题强化特训 800 题	芦欣	32K	20.00	2013.2
考研政治十年真题专项超精解	芦欣	16K	22.00	2013.2
考研政治分析题黄金模板 23 例	芦欣	32K	12.00	2013.9
考研政治冲刺必背 36 计	芦欣	32K	12.00	2013.9
考研政治冲刺必备六韬三略——六大密押专题与终极预测 3 套卷	芦欣	32K	20.00	2013.9
考研政治形势与政策核心预测 50 点	芦欣	32K	20.00	2013.9
考研政治精准预测 900 题	蔡桂娟	16K	28.00	2013.4
考研政治高分解题技巧	蔡桂娟	16K	22.00	2013.3
考研政治速背 15 天	蔡桂娟	32K	12.00	2013.9
考研政英数三科终极 20 题	蔡桂娟 张培 姜晓千	16K	12.00	2013.11
考研政治专题经典教程	蔡桂娟	16K	42.00	2013.3
考研政治 20 年真题大讲评	蔡桂娟	16K	45.00	2013.3
考研政治形势与政策聚焦及热点剖析	蔡桂娟	32K	12.00	2013.11

三、2014 人大社考研数学类图书

书 名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研历届数学真题题型解析（数学一）	黄先开 曹显兵	16K	56.00	2013.3
考研历届数学真题题型解析（数学二）	黄先开 曹显兵	16K	42.00	2013.3
考研历届数学真题题型解析（数学三）	黄先开 曹显兵	16K	48.00	2013.3
考研数学高分复习全书（数学一、二）	黄先开 曹显兵	16K	69.00	2013.1
考研数学高分复习全书（数学三）	黄先开 曹显兵	16K	68.00	2013.1
考研数学最新精选 600 题（经济类）	黄先开 曹显兵	16K	36.00	2013.3
考研数学最新精选 600 题（理工类）	黄先开 曹显兵	16K	42.00	2013.3
考研数学经典冲刺 5 套卷（数学一）	黄先开 曹显兵	16K	12.00	2013.9
考研数学经典冲刺 5 套卷（数学二）	黄先开 曹显兵	16K	12.00	2013.9
考研数学经典冲刺 5 套卷（数学三）	黄先开 曹显兵	16K	12.00	2013.9
考研数学新编考试参考书	李恒沛	16K	69.00	2013.4
考研数学真题名家解析与指导	李恒沛	16K	42.00	2013.4
考研数学新编考试参考书（经济类）	严守权	16K	52.00	2013.4

四、2014 人大社考研专业课类图书

书 名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研教育学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研 命题研究中心	16K	48.00	已出
考研心理学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研 命题研究中心	16K	59.00	已出

书 名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
考研计算机命题思路及名校真题详解	翔高教育考研 命题研究中心	16K	48.00	已出
考研管理学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研 命题研究中心	16K	36.00	已出
考研法学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研 命题研究中心	16K	39.00	已出
考研新闻学命题思路及名校真题详解	翔高教育考研 命题研究中心	16K	68.00	已出
考研俄语指南	钱晓蕙	16K	79.00	2013.3
考研日语指南	易友人	16K	58.00	2013.4
考研西医综合科目辅导讲义	于吉人	16K	76.00	2013.4

五、2014 人大社法硕（1 月份考试）图书

书 名	作者	开本	定/估价	计划出版时间
全国法律硕士专业学位研究生入学联考试指南（第十四版）	全国法硕指导委员会	16K	119.00	2013.9
2014 年法律硕士联考历年试题汇编	编写组	16K	56.00	2013.9
2014 年法律硕士联考试大纲配套练习	朱力宇等	16K	76.00	2013.9
2014 年法律硕士联考标准化题库	白文桥等	16K	76.00	2013.3
2014 年法律硕士联考重要知识点深度解析及模拟试卷	法硕联考命题研究组	16K	88.00	2013.9
2014 年法律硕士联考五年真题归类详解及知识清单	北京万国学校	16K	39.00	2013.5
2014 年法律硕士联考重要法条释解	朱力宇等	16K	42.00	2013.5
2014 年法律硕士联考最新试题分析及考点解析	白文桥等	16K	42.00	2013.5
2014 年法律硕士联考专业基础课必备经典案例分析	刘守芬等	16K	39.00	2013.3
2014 年法律硕士联考模拟试卷	朱力宇等	16K	66.00	2013.10
2014 年法律硕士联科大串讲	朱力宇等	16K	62.00	2013.10
2014 年法律硕士联考前最后 5 套题	刘守芬等	16K	29.00	2013.11
2014 年法律硕士联考点集锦	白文桥	16K	42.00	2013.10
2014 年法律硕士联考专题讲座	郭志京	16K	86.00	2013.6
2014 年法律硕士（法学）联考大纲要点解析及应试策略	白文桥	16K	58.00	2013.4
2014 年法律硕士（法学）联考大纲配套练习	白文桥	16K	68.00	2013.4

中国 1 考网：www.1kao.com.cn

咨 询 电 话：(010) 62515978

咨 询 信 箱：lity@crup.com.cn

读者服务部：(010) 62514148 62516566（人大院内）

邮 购 电 话：(010) 82501766

目 录

第一章 函数、极限、连续性	1
§1 函数	1
§2 极限	5
§3 连续性	21
小结与习题	30
第二章 一元函数微分学	36
§1 导数与微分	36
§2 微分中值定理	51
§3 导数的应用	76
小结与习题	88
第三章 一元函数积分学	95
§1 不定积分	95
§2 定积分	113
§3 定积分的应用	134
§4 广义积分	144
小结与习题	149
第四章 向量代数和空间解析几何	158
§1 空间直角坐标系与向量代数	158
§2 平面与直线	163
§3 二次曲面	173
小结与习题	176
第五章 多元函数微分学	180
§1 多元函数微分法	180
§2 多元函数微分学的应用	196
小结与习题	211
第六章 多元函数积分学	216
§1 二重积分与三重积分	216
§2 曲线积分	236

§ 3 曲面积分	251
小结与习题	266
第七章 无穷级数	273
§ 1 常数项级数	273
§ 2 幂级数	289
§ 3 傅里叶(Fourier)级数	306
小结与习题	312
第八章 常微分方程	319
§ 1 一阶微分方程	319
§ 2 高阶微分方程降阶解法	333
§ 3 线性微分方程	337
§ 4 微分方程的应用	351
小结与习题	360
第九章 线性代数	364
§ 1 行列式	364
§ 2 矩阵及其运算	376
§ 3 向量	390
§ 4 线性方程组	409
§ 5 矩阵的特征值和特征向量	434
§ 6 二次型	456
小结与习题	471
第十章 概率论与数理统计	492
§ 1 随机事件和概率	492
§ 2 随机变量及其分布	503
§ 3 多维随机变量及其分布	520
§ 4 随机变量的数字特征	545
§ 5 大数定律和中心极限定理	569
§ 6 数理统计的基本概念	575
§ 7 参数估计	587
§ 8 假设检验	607
小结与习题	615
附录 1 差分方程简介	637
附录 2 2013 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考解答	639
附录 3 2012 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考解答	660

§ 1 函 数

一、内容摘要与考查重点

1. 函数的概念与表示法

函数的定义: 设有两个变量 x 与 y , 如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时, 变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

这时称 x 为自变量, 也称 y 是因变量, 称 D 是函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性: 设 $y = f(x)$ 在某区间 I 内有定义, 如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的 (或单调减少的).

(2) 奇偶性: 设 $y = f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义, 如果对于 I 内任意点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴, 奇函数的图形对称于原点.

(3) 周期性: 设 $y = f(x)$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 内有定义, 若存在一个正的常数 T , 使得 $f(x+T) = f(x)$ 对于任何的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性: 设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果存在 $M > 0$, 使得对于任何 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u , $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x , 值域为 E , 若 $E \subseteq D_u$, 则对于任何 $x \in D_x$, 有 $u = \varphi(x)$ 与 x 对应, 而 $u \in E \subseteq D_u$, 故又有确定的 y 与 u 对应, 从而, 对于任何 $x \in D_x$, 都有确定的 y 与 x 对应, 按照函数的定义, 确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立起 y 与 x 的对应关系的, 因而, 称此函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数, 记为 $y = f(\varphi(x))$.

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 的值域为 D_y , 如果对于 D_y 中的任何一个 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的 x 值, 则按照函数的定义, 也确定了 x 是 y 的函数, 称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上, 用 x 表示自变量、 y 表示因变量, 因此也称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数. $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

注意: $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图象是同一个.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数: 称下述五种函数为基本初等函数.

幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数).

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数: 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合而成并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内, 其对应法则有着不同的初等函数表达式, 则称此函数为分段函数.

对于本小节的内容, 应重点掌握以下几点:

(1) 理解函数的概念, 掌握函数的表示法.

例如, 应会求函数的定义域和值域, 会从函数的复合表达式中求出原来函数的表达式, 即从 $f(\varphi(x)) = g(x)$ 中求出 $f(x)$ 的表达式, 尤其应注意求分段函数的复合问题.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

例如, 应会判定函数的单调性(用定义或用后面所述的导数方法)、奇偶性等.

(3) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

二、例题分析

例 1 设 $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x)$ 有定义, 且 $f(x) \neq 0, f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$, 求 $f(2\,013)$.

分析: 因 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x) \neq 0$, 故知 $f(0) \neq 0$. 适当选择 x 与 y 之值, 由已知函数等式即得所求.

解: 令 $x = 0, y = 2\,013$, 则有

$$f(0) = f(0) \cdot f(2\,013), \quad \text{因 } f(0) \neq 0,$$

故得 $f(2\,013) = 1$.

例 2 已知 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上为偶函数, 且 $f(x) = 2x^2 + x$ ($x \in [-2, 0]$), 那么当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 的表达式为().

(A) $2x^2 + x$

(B) $2x^2 - x$

(C) $-2x^2 + x$

(D) $-2x^2 - x$

分析: 已知函数的奇偶性时, 可以由奇偶性的性质来得出对称区间上的函数的表达式.

当 $x \in [0, 2]$ 时, $-x \in [-2, 0]$, 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以有

$$f(x) = f(-x) = 2(-x)^2 + (-x) = 2x^2 - x.$$

解: 应选 B.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析: 这是一个分段函数求复合函数的问题, 按照一般求复合函数的方法, 先将 $f(x)$ 的表达式中的 x 用 $g(x)$ 替换. 这里的关键是要注意到 $g(x)$ 也是分段函数, 要讨论分段函数 $g(x)$ 的取值范围.

$$\text{解: } f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |g(x)| \leq 1, \\ 0, & |g(x)| > 1, \end{cases}$$

以下的关键问题是要知道当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| \leq 1$, 当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| > 1$.

先来讨论使 $|g(x)| \leq 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式清楚地看出只有当 $|x| \leq 2$ 时才可能使 $|g(x)| \leq 1$.

在 $|x| \leq 2$ 范围内, 要使 $|g(x)| = |2-x^2| \leq 1$, 只需

$$1 \leq |x| \leq \sqrt{3}.$$

所以, 当 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$ 时, 有 $|g(x)| \leq 1$.

再来讨论使 $|g(x)| > 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式可知当 $|x| > 2$ 时 $|g(x)| > 1$. 另外, 当 $\sqrt{3} < |x| \leq 2$ 或 $|x| < 1$ 时, 也有 $|g(x)| > 1$.

综合上述讨论知

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & |x| > \sqrt{3} \text{ 或 } |x| < 1. \end{cases}$$

例 4 设 $y = (a-x^b)^{\frac{1}{n}}$, 当 a, b 满足条件_____时, 该函数的反函数与该函数相等.

分析: 由 $y = (a-x^b)^{\frac{1}{n}}$ 可得

$$x = (a-y^n)^{\frac{1}{b}},$$

也即反函数为 $y = (a-x^n)^{\frac{1}{b}}$.

与直接函数比较就知当 $b = n, a$ 为任意值时, 反函数与直接函数相等.

解: 应填 $b = n, a$ 为任意值.

例 5 设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单增, $f(x)$ 在 $[g(a), g(b)]$ 上单减, 则 $f(g(-x))$ ().

- (A) 在 $[a, b]$ 上单增 (B) 在 $[a, b]$ 上单减
(C) 在 $[-b, -a]$ 上单增 (D) 在 $[-b, -a]$ 上单减

分析: 首先, 可知保证 $f(g(-x))$ 有定义区间应是 $[-b, -a]$, 所以, 可排除 A、B 选项.

然后, 再用单调性定义判断.

任取 $x_1, x_2 \in [-b, -a], x_1 < x_2$, 则

$$-x_1, -x_2 \in [a, b], \text{ 且 } -x_1 > -x_2.$$

由 $g(x)$ 的单增性有 $g(-x_1) > g(-x_2)$.

再由 $f(x)$ 的单减性有 $f(g(-x_1)) < f(g(-x_2))$.

所以复合函数 $f(g(-x))$ 在 $[-b, -a]$ 上单增.

解: 应选 C.

例 6 设 $y = \frac{1}{2x}f(t-x)$, 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}t^2 - t + 5$, 求 $f(x)$.

解: $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}f(t-1) = \frac{1}{2}t^2 - t + 5$.

从而 $f(t-1) = t^2 - 2t + 10$.

令 $t-1 = x$, $f(x) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 10$.

所以 $f(x) = x^2 + 9$.

例 7 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ($x \neq 1$), 则 $f(f(f(f(x)))) =$ _____.

分析: $f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$ ($x \neq 1$),

$$f(f(f(x))) = \frac{f(f(x))}{f(f(x))-1} = \frac{x}{x-1} \quad (x \neq 1).$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(f(x)) = x \quad (x \neq 1).$$

解: 应填 $x(x \neq 1)$.

例 8 下列函数中是偶函数的应为().

(A) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(B) $f(x) = ([x])^2$

(C) $f(x) = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$

(D) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos x$

分析: 此题是考查函数的奇偶性的定义以及一些典型函数的定义. 容易验证 A、D 选项的函数是奇函数, B 选项的函数非奇非偶, 故只有选择 C.

因为此时

$$\begin{aligned} f(-x) &= (2 + \sqrt{3})^{-x} + (2 - \sqrt{3})^{-x} = \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^x \\ &= (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = f(x). \end{aligned}$$

解: 应选 C.

例 9 下列函数中不是周期函数的应为().

(A) $f(x) = \sin^2 x$

(B) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$

(C) $f(x) = \sin 2x + \cos \pi x$

(D) $f(x) = x - [x]$

分析: 因 $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, 故 $f(x)$ 为周期函数, 其最小正周期为 $T = \pi$.

容易看出, $\sin \frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π , $\cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期为 6π , 从而其和的最小正周期为 12π . 同理 $\sin 2x$ 的最小正周期为 π , $\cos \pi x$ 的最小正周期为 2, 从而其和不是周期函数. 至于 $f(x) = x - [x]$ (若 $x = n + \alpha$, n 为整数, 且 $0 \leq \alpha < 1$, 则 $[x] = n$), 容易验证它为周期函

数.事实上,设 $x = n + \alpha$, n 为整数, $0 \leq \alpha < 1$, m 为整数,则

$$\begin{aligned} f(m+x) &= f(m+n+\alpha) = m+n+\alpha - [m+n+\alpha] \\ &= m+n+\alpha - m - [n+\alpha] = n+\alpha - [n+\alpha] \\ &= x - [x] = f(x). \end{aligned}$$

于是所有整数 m 都是 $f(x)$ 的周期,而最小正周期为 1. 综上分析,应选 C.

解:应选 C.

例 10 设 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 $y = f(x)$ 的图形对称于直线 $x = a$ 与 $x = b$ ($a < b$), 试证函数 $f(x)$ 为周期函数.

分析:先弄清题意,写出题设表达式,再由周期函数定义证之.

证明:由题设,有

$$f(a-x) = f(a+x), \quad \text{①}$$

$$f(b-x) = f(b+x), \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} \text{由 ②, } f[b+(x+b-2a)] &= f[b-(x+b-2a)] \\ &= f(2a-x) = f[a+(a-x)] \stackrel{\text{由 ①}}{=} f[a-(a-x)] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

即 $f[x+2(b-a)] = f(x)$, $2(b-a) > 0$.

故 函数 $f(x)$ 为具有周期 $2(b-a)$ 的周期函数.

注:用 $a-x$, $b-x$ 分别替代 x , 由 ①, ② 得

$$f(x) = f(2a-x) \quad \text{③}$$

$$f(x) = f(2b-x) \quad \text{④}$$

$$\text{由 ④, } f(2a-x) = f[2b-(2a-x)] = f[x+2(b-a)]$$

$$\text{由 ③, } f(x) = f[x+2(b-a)]$$

同样由 ③, ④ 也可推出 ①, ②.

故 ① 与 ③ 等价, ② 与 ④ 等价.

§ 2 极 限

一、内容摘要与考查重点

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义:对于数列 $\{x_n\}$, 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的当 n 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 也记为 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义.

① 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

② 设 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

③ 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义:

① 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

② 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$.

③ 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$.

(4) 无穷小的定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ (或其他过程) 时的无穷小.

(5) 无穷大的定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大. 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

类似地, 可定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

类似地, 还可定义当 $x \rightarrow \infty$ (或其他过程) 时的无穷大.

(6) 无穷小阶的定义: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$,

① 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 高阶的无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$;

② 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A (A \neq 0)$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 同阶的无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$;

特别地, 当 $A = 1$ 时, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 等阶的无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$;

③ 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 低阶的无穷小.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ (或其他过程) 情形下的无穷小的阶.

2. 极限的有关性质

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

(2) (保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0 (A < 0)$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0 (f(x) < 0)$.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ ($A \leq 0$).

(4) (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在 x_0 的某去心邻域 $U^0(x_0, \delta)$, 使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0, \delta)$ 内有界.

以上 4 条性质在 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或其他过程) 的情形下也有相应的形式.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) (夹逼准则) 若在 x_0 的某去心的邻域 (或 $|x|$ 充分大时) 内有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$, 则有 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$.

4. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

5. 极限的运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = AB;$$

$$(3) \text{若 } B \neq 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

上述性质当 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

6. 无穷小的有关性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界变量乘无穷小是无穷小.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大;

反之, 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

(6) (等价无穷小替换) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$, 且 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

对于本小节的内容, 应重点掌握以下几点: