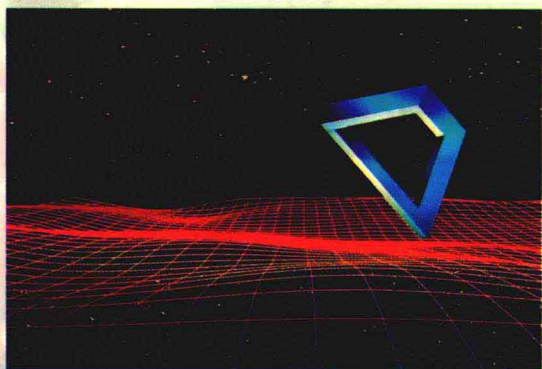


总 主 编 党玉敏
余鑫晖
理科主编 赵大悌
本卷主编 张思明



学生知识文库

· 高中数学卷 ·

广西师范大学出版社

学生知识文库

· 高中数学卷 ·

理科主 编 赵大悌

理科副主编 海 浩 康 健

于诗藻 汤志林

本卷主 编 张思明

编 著 邓 均 王秀花 崔增喜

张思明 黄会平 韩明武

王建民 王人伟 王锡祥

唐 仁 翁立强

广西师范大学出版社

《学生知识文库》丛书

编委会名单

总主编	党玉敏	余鑫晖		
副总主编	赵大悌	洪珏		
编委	海浩	康健	韦永麟	徐镛
	张思明	何凤楼	秦迤君	陆剑鸣
	于诗藻	汤志林	桑林佳	龙子仲
	王昶	唐丹宁	覃丽梅	肖星明
	赵明节	郑纳新		
责任校对	肖向阳	李苑青	覃向阳	陆良慧
装帧设计	杨琳			
版式设计	肖向阳(理)	林园(文)		

学生知识文库

高中数学卷

张思明 主编

责任编辑:余鑫晖 责任校对:李苑青 封面设计:杨琳

广西师范大学出版社出版 邮政编码:541001

(广西桂林市中华路36号)

全国各地新华书店经销 核工业中南310印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:18.5 字数:546千字

1996年9月第一版 1996年9月第一次印刷

印数:00001—20000册

ISBN7—5633—2375—8/G·1718

(平)15.50元
定价:
(精)20.50元

出版说明

不久前,由我社出版的《学生作文文库》(高中卷、初中卷、小学卷)一书,深受广大师生喜爱,一经上市,即销售一空.读者纷纷来信说此书编写得好,好就好在此书每卷既有写作知识,又有写作材料,还有写作范文,范文还有评点.所以一书在手,教师在教学中和学生在学习中所碰到的难题,都可迎刃而解.在这一成功经验的启示下,我们邀集了以北京市海淀区著名的中小学教育专家为核心的作者队伍,编写成此套《学生知识文库》丛书.

《学生知识文库》丛书共分 6 种 15 卷:语文(高中卷、初中卷、小学卷)、作文(高中卷、初中卷、小学卷)、数学(高中卷、初中卷、小学卷)、物理(高中卷、初中卷)、化学(高中卷、初中卷)、历史(高中卷、初中卷).

我们组织编写和出版这套丛书的指导思想是:对中小学生的学习及应考给予正确的指导,使他们正确对待“应试教育”,自觉地向“素质教育”转变,使他们能掌握和运用正确的学习方法,扎扎实实地学好应该掌握的知识,使他们的智力和创造力在学习中得到充分发展和启迪,为将来进一步深造或走向社会打下良好的基础.

《学生知识文库》丛书语文部分由知识编、方法编、能力编三大部分构成.知识编重在将学生应该掌握的基础知识(高中卷还适当扩大了知识面)集中加以介绍,兼顾知识的系统性与知识点的透彻性;方法编联系知识系统,介绍平时学习的各种方法及复习方法、应试方法;能力编则从综合、运用的角度,给

读者提供提高听读说写的能力、思维能力、复习能力、应试能力的途径和方法。

《学生知识文库》丛书中的数学、物理、化学各卷的编写基调与教学大纲规定的教学计划要求持平、进度同步并适当扩大知识面。各章(单元)由三大部分内容构成:一、基础与方法;二、扩展与深化;三、应用与创造。

全套丛书皆以教学大纲及国家教委考试中心的“考试说明”为依据,强化知识的系统性与联系性,范例典型、实用,知识点鲜明、突出,解析翔实、巧妙,习题精当、全面,融资料性、指导性、全面性、系统性、权威性于一体。

本套丛书在编写过程中,得到北京市海淀区“三个面向”科研群体(包括人大附中、北大附中、首都师大附中、一零一中、十一学校、理工大附中、科大附中、铁道学院附中、育英中学、八一中学、北航附中、清华二附中、清华附中和 21 世纪实验学校)的大力支持,他们派出了一流的教师,运用了一流的教材、一流的课程、一流的科研和一流的管理参与这套丛书的编写,有力地保证了这套丛书的高质量和高水平。特别是海淀区著名教育专家、特级教师赵大悌和国内著名特级教师洪珏分别主编、审定了理科和文科各卷的稿件,花费了大量时间和精力,在这里我们一一表示衷心的感谢。

这套丛书是我社为适应教育改革、从应试教育向素质教育转轨,继中小学各科教学重点难点解析与训练丛书之后推出的又一套丛书,希望得到中小学师生的欢迎。

由于出版时间仓促,本套丛书疏漏及未尽人意之处,在所难免,尚祈不吝指正。

广西师范大学出版社

1996 年 3 月于桂林

序

这一套充满着全体编著者美好心愿、凝聚着全体编著者辛勤汗水、充分体现北京市海淀区“三个面向”科研群体——中学教育环境与学生个性发展课题组科研成果的《学生知识文库丛书》理科各卷终于奉献在广大师生面前。

海淀区“三个面向”科研群体是由海淀区全部重点校和一些准重点校组成的,包括人大附中、北大附中、首都师大附中、一零一中、十一学校、理工大附中、科大附中、铁道学院附中、育英中学、八一中学、北航附中、清华二附中、清华附中和 21 世纪实验学校。“三个面向”科研群体的基本理论是:以邓小平同志“三个面向”教育思想为宗旨,通过全面改革与优化学校教育环境,促进学生个性充分发展。简而言之,“环境与个性”是课题的核心。课题把发展个性作为出发点和归宿,并将其视为传统教育与现代教育的分水岭。课题把“五个一流”作为改革和优化教育环境的基本任务和方向。“五个一流”是:一流的教师,一流的教材,一流的课程,一流的科研,一流的管理。经过三年多的努力,我们逐步建立了三级科研制度,建立了巡回教学公开课听研制度,建立了学科科研员制度,进行了课程结构与新课程的研究与实验,进行了《现代少年》、《现代综合活动课》以及数学、生物、化学、语文等教材的研究与实验,设计并试用了新的课堂教学评价表,所有这些都为本套丛书的诞生奠定了坚实的基础。

本套丛书与其他教材相比有以下新特点:

第一,以素质教育为宗旨。基础教育的学科教材应当把培养和提高学生的科学素质作为基本任务。现代人的科学素质应当包括科学的世界观、科学的知识、科学的方法三个方面。实行全面的素质教育才能使获得内在的、整体的和持续的发展,即获得受教育的真正价值。

第二,以国家教委制订的教学大纲为依据。丛书编写的基调与

大纲所规定的教学计划要求持平,进度也与其同步,这将有利于广大教师和学生使用。

第三,为促进学生个性发展服务。按照划一的标准编写学科教材不利于学生个性发展,这是在过去几十年教学经验与教训中得出的结论。丛书力图构建一个“开放式”的“有弹性”的体系。为此,我们设计了“基础—扩展—创造”的三级结构编写体制。

首先,丛书强调三基,即基本概念、基本知识与基本技能。其次,在基础部分之上设计了扩展知识面和深化知识理解的第二级。最后,为鼓励学生应用与创造,安排了第三级的栏目。在丛书中可以看到为学生个性发展与素质提高所设计的新栏目。这些新结构与新栏目力图改变传统教材中的呆板面孔,为学生的发展多留一些空间。因此,完全可以确信,丛书更适合也更有利于教改后的学校使用。

第四,突出自主性、活动性、创造性的“三性原则”。针对传统教材与传统教学方法之弊端,“三个面向”科研群体提出了反映现代教学思想的“三性原则”。“三性原则”既是观念,又是方法,它力图改变学生被动学习的境况。自主性就是发展与尊重学生的独立性与主动性;活动性就是发展与强化学生实践过程与应用过程;创造性就是发展与激励学生在思维与实践中的求异与创新。“三性原则”以学生个性发展为中心形成一个紧密相联的整体。在使用丛书时突出“三性原则”将会收到更好的效果。

应当肯定,本套丛书是在教材改革与教学改革中探路,其不成熟与不当之处在所难免,全体编著者本着改革的精神与对教育负责的态度热切企盼广大师生、社会各界的批评与建议。在创意与编写丛书的全过程中,“三个面向”科研群体的口号始终激励我们前进,那就是我们的笃信:

每一个学生的名字中都充满了尊严与神圣!

每一个学生的个性中都蕴藏着创造与成功!

赵大悌、康健

1996年3月于北京

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数	(1)
第二章 三角函数	(59)
第三章 两角和与差的三角函数	(83)
第四章 反三角函数与三角方程	(124)
应用与探索(一)	(152)
第五章 直线与平面	(173)
第六章 多面体和旋转体	(207)
应用与探索(二)	(242)
第七章 不等式	(264)
第八章 数列、数列极限与数学归纳法	(303)
第九章 复数	(338)
应用与探索(三)	(370)
第十章 直线	(394)
第十一章 圆锥曲线	(428)
第十二章 参数方程、极坐标	(467)
第十三章 排列组合与二项式定理	(503)
应用与探索(四)	(536)
习题的提示与解答	(552)

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

一 基础与方法

【精要与示例】

1. 集合的概念

(1)集合 一般地,具有某种共同特征的一类事物的全体,通常称为集合.组成集合的每一个个体叫做这个集合的元素.我们通常用大写字母表示集合,用小写字母表示元素.如果 a 是某集合 A 的一个元素,我们就说元素 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;如果 b 不是集合 A 的元素,我们就说元素 b 不属于集合 A ,记作 $b \notin A$.

集合概念是现代数学的一个最基本的概念.现在它不仅自身成为一门学科,而且这个概念已渗透到各个数学分支和应用技术中去,成为许多数学理论特别是函数理论的基础.掌握集合的初步知识,可加深对初等数学一些基本概念的理解,并使表达更精炼、更准确.

在中学数学里,主要研究以数或点为元素的集合.以数为元素的集合,简称为数集;以点为元素的集合,简称为点集.

(2)集合的特性 对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的、互异的、无序的.

(3)集合的表示方法 列举法,描述法,图示法.对于实数集我

们还可用区间法. 设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 则集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 叫做以 a, b 为端点的闭区间, 以符号 $[a, b]$ 表示; 集合 $\{x | a < x < b\}$ 叫做以 a, b 为端点的开区间, 以符号 (a, b) 表示; 集合 $\{x | a \leq x < b\}$ (或 $\{x | a < x \leq b\}$), 我们把它叫做半开区间, 以符号 $[a, b)$ (或 $(a, b]$) 表示.

(4) 有限集与无限集

(I) 有限集 只含有有限个元素的集合叫做有限集. 例如下列集合都是有限集:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{x | x^2 - 1 = 0\}.$$

在有限集中, 只含有一个元素的集合叫做单元素集. 例如集合 $\{a\}, \{x | x \text{ 是偶质数}\}, \{\text{中华人民共和国的首都}\}.$

不含有任何元素的集合叫做空集, 用 $\emptyset$ 表示. 例如集合 $\{(x, y) | \begin{cases} x+y=1, \\ x+y=-1. \end{cases}\}, \{\text{内角和大于 } 180^\circ \text{ 的三角形}\}.$ 要注意的 $\{0\}$ 是含有 0 元素的单元素集, 不是空集.

(II) 无限集 含有无限个元素的集合叫做无限集. 例如 $\{x | 2 < x < 3\}.$

(5) 集合与集合之间的关系

(I) 包含 如果集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supseteq A$ (读作 B 包含 A). 由子集的定义可得到下面的性质:

$$A \subseteq A;$$

$$\text{若 } A \subseteq B, B \subseteq C, \text{ 则 } A \subseteq C.$$

(II) 相等 如果两个集合所含的元素完全相同, 那么这两个集合叫做相等集合. 即

$$\text{若 } A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A, \text{ 则 } A = B.$$

(III) 真包含 如果集合 A 是集合 B 的子集, 而且在 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么 A 就叫做 B 的真子集, 记作 $A \subset B$ (读

作 A 真包含于 B). 显然, 空集 $\emptyset$ 是任何非空集合的真子集.

子集、真子集都表示两个集合之间的包含关系, 它们之间既有联系又有区别, $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$, 但 $A \subseteq B \Rightarrow A \subset B$ 不成立. 例如, 判断命题“任何一个集合 A 都至少有两个子集”的正确性, 一些同学认为命题是正确的, 理由是 $\emptyset$ 与 A 都是 A 的子集. 他们忽略了当 $A = \emptyset$ 时, 集合 A 只有一个子集. 类似, 我们也可以知道命题“任何一个集合都至少有一个真子集”是错误的.

(IV) 相交 如果两个集合所含的元素一部分相同, 另一部分不同, 那么称这两个集合相交.

(V) 分离 如果两个集合所含的元素彼此完全不同, 即找不到这两个集合的公共元素, 那么称这两个集合分离(或不相交).

2. 集合的运算

(1) 交集 设 A, B 是两个集合, 由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$ (读作 A 交 B), 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

定理 设 A, B 是两个集合, 则

$$(I) A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$(II) A \cap B = B \cap A;$$

$$(III) A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B;$$

$$(IV) \text{若 } A \subseteq B, \text{ 则 } A \cap B = A; \text{ 反之, 若 } A \cap B = A, \text{ 则 } A \subseteq B.$$

(2) 并集 设 A, B 是两个集合, 由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$ (读作 A 并 B), 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

定理 设 A, B 是两个集合, 则

$$(I) A \cup A = A, A \cup \emptyset = A;$$

$$(II) A \cup B = B \cup A;$$

$$(III) A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A \cup B;$$

(N) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$; 反之, 若 $A \cup B = B$, 则 $A \subseteq B$.

(3) 结合律 设 A, B, C 是三个集合, 则

$$(I) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$(II) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

(4) 分配律 设 A, B, C 是三个集合, 则

$$(I) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$(II) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(5) 全集 与所考虑的问题有关的全部元素组成的集合叫做全集. 全集用字母 I 表示.

全集是对于具体问题而言的, 是相对的概念, 可以说, 任何一个非空集合都可以作为讨论某一具体问题的全集.

(6) 补集 如果从全集中取出某集合 A 的全部元素, 则由剩下的所有元素组成的集合叫做 A 的补集, 记作 $\bar{A}$. 换句话说, 补集 $\bar{A}$ 是由全集中不属于 A 的所有元素组成的集合.

显然, 集合 A 与它的补集 $\bar{A}$ 之间有如下关系:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = I, (\bar{\bar{A}}) = A.$$

$$\text{特殊地, } \bar{I} = \emptyset, \bar{\emptyset} = I.$$

因为 $(\bar{\bar{A}}) = A$, 所以 A 也是 $\bar{A}$ 的补集, 因而它们互为补集. 上面这些关系式都是说明互为补集的两个集合之间的关系的, 因此可以统称为互补律.

(7) 文氏图 用矩形表示全集, 用画在矩形内的各圆圈表示各集合的示意图叫做文氏图. 如图 1-1.

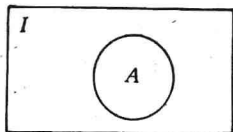


图 1-1

文氏图是帮助理解各集合之间关系的一种直观工具, 在计算、化简、证明中也起到重要作用.

例 1 已知 $I = \{\text{不大于 } 30 \text{ 的质数}\}$, $\bar{A} \cap B = \{3, 17\}$, $A \cap \bar{B} =$

$\{7, 19, 29\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5, 11\}$, 求 A, B .

解 $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

$\because \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{5, 11\}, \overline{A} \cap B = \{3, 17\}, A \cap \overline{B} = \{7, 19, 29\}$,

$\therefore A \cap B = \{2, 13, 23\}$ (如图 1-2).

$\therefore A = \{7, 19, 29, 2, 13, 23\}$,

$B = \{2, 13, 23, 3, 17\}$.

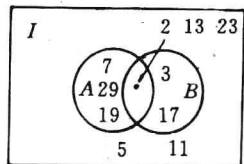


图 1-2

(8) 反演律

(I) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(II) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(9) 吸收律

(I) $A \cap (A \cup B) = A$;

(II) $A \cup (A \cap B) = A$.

例 2 已知全集 $I = \mathbb{R}$, $A = \{x \mid 2x^2 - 5x < 0\}$, $B = \{x \mid 6x^2 - x - 2 \geq 0\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \overline{A \cup B}, (\overline{A \cup B}) \cap A$.

解 $A = \left\{x \mid 0 < x < \frac{5}{2}\right\}$, $B = \left\{x \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{2}{3}\right\}$. 将它们在数轴上表示出来, 如图 1-3.

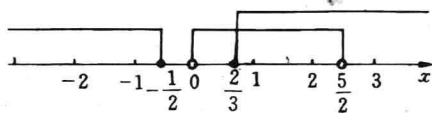


图 1-3

由图 1-3 可知: $A \cap B = \left\{x \mid \frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{2}\right\}$;

$A \cup B = \left\{x \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 0\right\}$; $\overline{A \cup B} = \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 0\right\}$;

$(\overline{A \cup B}) \cap A = \emptyset$.

说明 解决这类问题的方法是: 将 A, B 用区间表示, 然后在

数轴上做集合运算.

例3 若集合 $A = \{x, xy, \lg(xy)\}$, 集合 $B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A = B$, 求 x, y .

解 考虑到 $A = B$, 则集合 A, B 所含的元素是相同的. 由 $\lg(xy)$ 有意义, 可知 $x \neq 0, xy \neq 0$, 只能 $\lg(xy) = 0$. 再分析 A 中的元素 x , 有两种可能 $x = |x|$ 或 $x = y$. 若 $x = |x|$, 则必有 $xy = y$, 从而得出 $x = 1$. 再由 $\lg(xy) = 0$ 可得 $xy = 1, \therefore y = 1$. 这样 $A = B = \{1, 1, 0\}$, 这与集合中元素互异性相矛盾. 因此只能有 $x = y$. 再由 $xy = 1$, 得出 $x = -1, y = x = -1$, 此时 $A = B = \{-1, 1, 0\}$.

说明 解决这类问题的思路是: 运用集合的性质, 通过分析和逻辑推理, 逐步减少未知数的个数, 从而使问题得到解决. 另外有些同学在解答本题时, 由于忽略了集合中元素的互异性而得到 $x = y = 1$ 或 $x = y = -1$ 的错误结论.

例4 化简 $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$.

解法一 原式 $= [B \cap (A \cup \bar{A})] \cup [\bar{B} \cap (A \cup \bar{A})]$
 $= (A \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{B}) = I \cap I = I.$

解法二 利用文氏图把全集分成 $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}$ 四个子集, 如图 1-4, 显然原式等于全集.

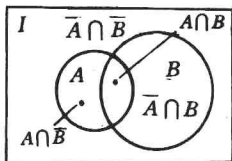


图 1-4

说明 本例解法一的过程中, 是两次反用交对并的分配律; 在解法二中可见, 用文氏图来表示全集、子集、交集、并集和补集之间的关系, 具有形象直观的特点.

例5 若三个关于 x 的方程

$$x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0,$$

$$x^2 + (a-1)x + a^2 = 0,$$

$$x^2 + 2ax - 2a = 0$$

中至少有一个方程有实数根,求实数 a 的取值范围.

解 方程 $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$ 有解的条件是 $\Delta \geq 0$, 即 $16a^2 + 4(4a - 3) \geq 0$. 设其解集为 A , 则 $A = \left\{ a \mid a \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } a \leq -\frac{3}{2} \right\}$. 同样, 方程 $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$ 有解时 a 的取值范围为 B , 则 $B = \left\{ a \mid -1 \leq a \leq \frac{1}{3} \right\}$; 方程 $x^2 + 2ax - 2a = 0$ 有解时 a 的取值范围为 C , 则 $C = \{a \mid a \geq 0 \text{ 或 } a \leq -2\}$. 则原题即求 $A \cup B \cup C$, 解之得 $a \leq -\frac{3}{2}$ 或 $a \geq -1$.

说明 解本题时应用了集合的思想(求并), 把集合作为工具来解题是常用的一种方法.

3. 对应与映射

(1) 对应 数学中经常接触到对应的概念, 例如, 对于正数集中的每一个正数 a , 按照求相反数的法则, 在负数集中都有一个确定的负数 $-a$ 和它对应.

一般来说, 设有两个非空集合 A 与 B , 如果存在一个规则 f , 使得对于集合 A 中的每一个元素 a , 在集合 B 中至少有一个元素 b 和它配成有序对, 就把 f 叫做从集合 A 到集合 B 的对应. 记作 $f: A \rightarrow B$.

对应共有四种形式:

(I) 一对一的对应 A 中每一个元素都对应于 B 中唯一的一个元素, 且对于 A 中不同的两个元素, B 中都有两个不同的元素和它们对应, 这种对应叫做一对一的对应.

(II) 多对一的对应 A 中每一个元素都对应于 B 中唯一的一个元素, 而且在 A 中至少有两个不同的元素对应于 B 中同一元素, 这种对应叫做多对一的对应.

(III) 一对多的对应 A 中每一个元素都对应于 B 中确定的元素, 且对于 A 中任意两个不同元素, 所对应的 B 中元素也不相

同,同时在 A 中至少有一个元素,对应于 B 中至少两个不同的元素,这种对应叫做一对多的对应.

(N)多对多的对应 A 中每一个元素都对应于 B 中确定的元素,且 A 中至少有两个不同元素对应于 B 中同一元素,同时在 A 中至少有一个元素对应于 B 中至少两个不同的元素,这种对应叫做多对多的对应.

(2)映射 设有两个非空集合 A 与 B ,如果按照某种对应关系,使 A 的每一个元素,在 B 中都有唯一的一个元素和它对应,这样的对应关系,叫做从集合 A 到集合 B 的映射.在映射中 A 中元素 a 所对应的 B 中元素 b 叫做 a 的象, a 叫做 b 的原象.

例 6 下列从 A 到 B 的对应中,哪些是映射,哪些不是映射?

$$(1) A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f: x \rightarrow y = 3x;$$

$$(2) A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{Q}, f: x \rightarrow y = x^3;$$

$$(3) A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \sqrt{x};$$

$$(4) A = \{0, 2, 4\}, B = \{0, \pm\sqrt{2}, \pm 2\}, f: \text{找平方根}.$$

解 (1)对于任意的 $x \in \mathbb{Z} = A$,存在唯一的 $y = 3x \in \mathbb{Z} = B$,所以 A 到 B 的对应是映射.

(2)对于任意的 $x \in \mathbb{Q} = A$,存在唯一的 $y = x^3 \in \mathbb{Q} = B$,所以 A 到 B 的对应也是映射.

(3)当 $x \in \mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}$ 时, x 的算术平方根无意义,也就是在对应法则 f 的作用下, x 在 B 中没有象,所以 A 到 B 的对应不是映射.

(4)当 x 为 2 或 4 时,在 f 作用下, x 在 B 中有两个象 $\pm\sqrt{x}$,所以 A 到 B 的对应也不是映射.

例 7 已知集合 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{m, n, p\}$,则集合 A 到集合 B 的映射的个数是多少?

解 因为映射定义中“……对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应……”有二层含义:一是, A 中任何一个元素都有矢线发射出来;二是,矢线从 A 中任何一个

元素发射出后,集合 B 都有唯一的元素被射中. 所以,集合 A 中:

元素 a 发射出 3 条矢线, B 中都有唯一的元素被射中.

元素 b 发射出 3 条矢线, B 中都有唯一的元素被射中.

元素 c, d 也分别发射出 3 条矢线, B 中都有唯一的元素被射中.

所以映射个数共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ 个.

说明 (1) 一般来说, 设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$; 从集合 A 到集合 B 的映射个数有 $N = n^m$ 个.

(2) 映射的要求: 集合 A 中任何一个元素在集合 B 中有象且唯一, 且映射允许集合 A 中不同的元素对应集合 B 中相同的元素 (即允许“一对一”, “多对一”), 同时映射不要求集合 B 中每一个元素在集合 A 中都有原象.

4. 函数

在初中, 函数是这样定义的: “设在某变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与它对应, 那么就说 y 是 x 的函数, x 叫做自变量, x 的取值范围叫做函数的定义域, 和 x 的值对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合叫做函数的值域.”

从映射的观点看, 函数是从集合 A 到集合 B 的一个映射 (其中 A, B 是非空集合), 并且 B 的每一个元素都有原象.

从函数的定义可知, 函数概念包含有三个要素: 定义域, 值域, 以及从定义域到值域的对应法则.

5. 反函数

对于函数 $y = f(x)$ 的每一个确定的值 $f(x_0) = y_0$, 如果自变量 x 都有唯一确定的 x_0 和 y_0 对应, 那么就可以得到一个以 y 为自变量, 以对应的 x 值为函数值的函数, 这个函数就叫做原来函数的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$. 反函数的定义域与值域分别是原来函数的值域与定义