高等学校工科数学系列丛书

微积分教程

（下册）

主　编　范崇金　董衍习

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

微积分教程

下册

主编　范崇金　董衍习

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书为高等院校工科类各个专业适用的教材和参考书。全书依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，吸收国内外同类教材中的优点，并结合我校多年教学中积累的经验，注意教学中过程中发现的问题，经由应用数学系多位教师的共同研究和推敲编写而成。

本书分上、下两册。上册主要内容有：函数与极限，导数与微分，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及定积分的应用。下册主要内容有：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数及常微分方程。本书思路清晰、语言精练、讲解透彻，叙述详尽、例题丰富，内容适应面广，富有弹性，可作为高等院校工科本科生“微积分”课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程. 下/范崇金，董衍习主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2012.2
ISBN 978-7-5661-0315-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①范… ②董… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 018793 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大[redacted]124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 18
字　　数 367 千字
版　　次 2012 年 2 月第 1 版
印　　次 2012 年 8 月第 2 次印刷
定　　价 36.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

随着科学技术的发展与教学改革的深入,近年来我校微积分课程的教学思想与内容要求发生了很大变化,为了使这一教育理念与培养目标贯穿于微积分教学过程中并得以实现,编者结合多年的教学研究和改革实践,参照最新的本科数学课程教学要求,借鉴当前国内外相关教材的优点,编写了这本适合培养应用型人才的高校工学类本、专科教学使用的《微积分教程》。

本教材不仅是在我校高等数学课程建设和教学改革的基础上形成的,同时也是对原有教材《微积分》多年使用实践的总结和提高。其主要特点是:特别注重对微积分的基本思想和基本方法的阐述,尽可能突出极限、导数和积分等重要概念,努力从多种视角解释这些数学概念的背景、内涵以及它们之间的有机联系。

本书为下册,分别由李彤(第七章)、马明华(第八章)、隋然(第九章)、周双红(第十章)、陈志杰(第十一章)编写。全书由范崇金、董衍习主编,董衍习、范崇金统稿。

在本书的编写过程中,得到了哈尔滨工程大学理学院应用数学系广大教师的支持和帮助,也得到了学校各级有关领导的鼓励和指导,在此表示衷心的感谢。

编　者

2012 年 2 月

目　　录

第七章　多元函数微分学

在前面各章中，我们所讨论的函数都是只含有一个自变量的函数 $y=f(x)$，这种函数叫做一元函数. 但是在实际问题中，经常要考虑多种事物与多种因素的联系，反映到数学上就是一个变量依赖于多个变量的情形，这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 本章将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的概念、多元函数微分法及其应用. 在讨论中以二元函数为主，讨论的结果可以推广到多元函数.

第一节　多元函数的基本概念

一、区域

在讨论一元函数时，一些概念、理论和方法是基于实数集中的点集、两点间的距离、区域和邻域等概念. 为了将一元函数的微积分推广到多元的情形，首先需要将上述一些概念进行推广.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一点，δ 是某一正数，与点 P_0 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |P_0P| < \delta\}$$

或

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

其中 δ 为该邻域的半径.

几何上，$U(P_0,\delta)$ 是 xOy 面上以点 P_0 为中心，δ 为半径的圆内部的点 P 的全体（见图 7－1）.

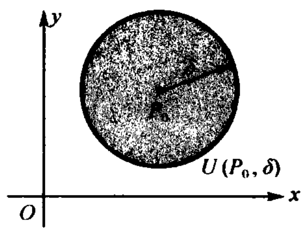


图 7－1

以后，若不需要强调邻域的半径 δ 时，可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的邻域. 称

$$\mathring{U}(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

为点 P_0 的去心邻域. 若不需要强调去心邻域的半径 δ 时，可用 $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的去心邻域.

2. 区域

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一点：

定义 1 若存在点 P 的某一邻域 $U(P,\delta)$，使得 $U(P,\delta)\subset E$，则称 P 为 E 的内点（见图 7-2）. E 的内点必属于 E.

定义 2 若点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点（点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E），则称 P 为 E 的边界点（见图 7-3）. E 的边界点的全体称为 E 的边界.

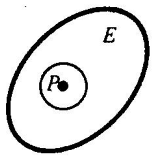


图 7-2

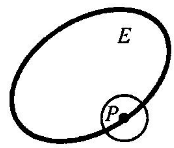


图 7-3

定义 3 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集.

例 1 设 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$，满足 E 的所有点都是 E 的内点，所以集合为开集. 满足 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 的点 (x,y) 是 E 的边界点，圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 是 E 的边界.

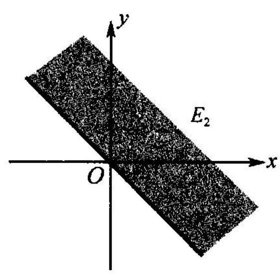
定义 4 如果点集 E 内任何两点都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集.

连通的开集称之为区域或开区域. 开区域连同它的边界称为闭区域.

例 2 $E_1=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 是闭区域，$E_2=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是开区域，$E_3=\{(x,y)\mid xy>0\}$ 是开集，而不是区域.

定义 5 对于平面点集 E，若存在某一正数 r，使得 $E\subset U(O,r)$，其中 $O(0,0)$ 是坐标原点，则称 E 为有界点集，否则称 E 为无界点集.

例如，集合 $E_4=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域；集合 $E_2=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是无界开区域（见图 7-4）.



$E_2=\{(x,y)\mid x+y>0\}$

图 7-4

定义 6 设 D 是一个闭区域，则 D 内任意两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的距离 $\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 的最大值 $\mathrm{d}(D)=\max\{\rho(P_1,P_2)\}$，称为闭区域 D 的直径.

3*. n 维空间

数轴上的点与实数具有一一对应的关系，从而全体实数表示数轴上一切点所构成的集合，即直线.

在平面引入直角坐标系之后，平面上的点与二元数组 (x,y) 形成一一对应，从而二元数组

(x,y)的全体表示平面一切点的集合，即平面.

在空间引入直角坐标系之后，空间的点与三元数组(x,y,z)形成一一对应，从而，三元数组(x,y,z)的全体表示空间一切点的集合，即空间.

一般地，设 n 为取定的一个自然数，称 n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体为 n 维空间，而每个 n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维空间中的一个点，数 x_i 称为该点的第 i 个坐标，n 维空间记为 $\mathbf{R}^n$.

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$之间的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

很明显，当 $n=1,2,3$ 时，上式便是解析几何中关于直线、平面、空间内两点间的距离.

前面就平面点集所陈述的一系列概念，均可类似地推广到 n 维空间.

例如，设 $P_0 \in \mathbf{R}^n$，δ 是某一正数，则 $\mathbf{R}^n$ 内的点集

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in \mathbf{R}^n\}$$

称为点 P_0 的 δ 邻域.

以点的邻域概念为基础，便可完全类似地定义内点，边界点，区域等等一系列概念，这里不再赘述.

二、多元函数的概念

在许多实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，即事物的变化不只由一个因素决定，而是由多个因素决定.

例如，圆柱体的体积 V 和它的底半径 r，高 h 之间具有如下关系：

$$V = \pi r^2 h$$

这里，当 r,h 在集合$\{(r,h) \mid r>0,h>0\}$内取定一对值时，对应的 V 值就随之确定了.

又如，两个可看作质点的物体之间的万有引力为

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (G\text{ 为万有引力常数})$$

F 的取值与两个质点的质量 M_1,M_2 及它们之间的距离 r 均有关.

这些正是多元函数的例子，抽出这些具体例子所蕴藏的内涵，我们可给出多元函数的定义.

1. 二元函数的定义

定义 7　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z = f(x,y),(x,y) \in D$$

或

$$z = f(P), P \in D$$

这里 x,y 称为自变量，z 称为因变量，点集 D 称为该函数 z 的定义域，而数集 $\{z \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}$ 称为该函数的值域.

z 是 x,y 的函数，有时也记为这样的形式

$$z = z(x,y)$$

请注意，这种记号中的两个 z 的含义是不同的，左边的 z 是因变量，右边的 z 是对应法则. 尽管我们的记号发生了混写，但对它们的含义要“胸中有数”.

一般地，把定义中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D，可类似地定义 n 元函数 $u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$n$ 元函数也可简记为 $u=f(P)$，这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D$，当 $n=1$ 时，n 元函数就是一元函数，当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

对于多元函数的定义域我们约定，在讨论多元函数形如 $u=f(P)$ 时，以这个算式有确定值 u 的自变量取值点集为该函数的定义域.

例如，函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid x + y > 0\}$$

而函数 $z = \arccos \frac{2y}{x}$ 的定义域为

$$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \left|\frac{2y}{x}\right| \leqslant 1 \text{ 且 } x \neq 0\right\}$$

2. 二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何意义

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，对于任取点 $P(x,y) \in D$，其对应的函数值为 $z=f(x,y)$，于是得到了空间内的一点 $M(x,y,f(x,y))$. 当 (x,y) 遍取定义域 D 内一切点时，得到了空间点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}$$

这个点集称之为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形，通常二元函数的图形是一张空间曲面(见图 7－5).

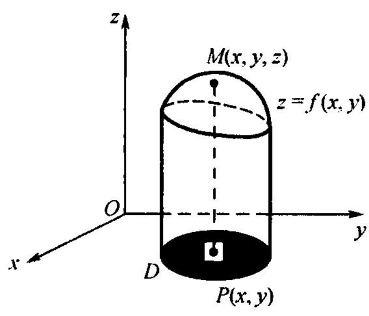


图 7－5

例如，函数 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形为上半单位球面；函数 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 的图形为开口向上的锥面；函数 $z=xy$ 的图形为马鞍面.

三、多元函数的极限

二元函数的极限概念与一元函数的极限概念相似，只是自变量的变化过程复杂多了.

讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 时的极限，即 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

这里 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 表示点 $P(x,y)$ 以任何方式趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$，也就是点

$P(x,y)$与点$P_0(x_0,y_0)$间的距离趋于零,即

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0$$

因此,二元函数的极限与一元函数的极限相比较,它是一种"全面极限",比一元函数极限复杂得多. 通常我们称它为二重极限.

定义 8 设$P_0(x_0,y_0)$是二元函数$z=f(x,y)$的定义区域的D内点或边界点,A是一个确定的数. 如果对任给的正数ε,总存在正数δ,使得当

$$P(x,y) \in \overset{\circ}{U}(P_0,\delta) \cap D$$

时,恒有

$$|f(x,y)-A| < \varepsilon$$

则称函数$f(x,y)$在动点$P(x,y)$趋向于$P_0(x_0,y_0)$时以A为极限,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

也可记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A$$

例 3 设$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$,$(x,y)\neq(0,0)$,求证:$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证明 因为当$(x,y)\neq(0,0)$时,有

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

故对于任给的$\varepsilon>0$,只需取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时,有

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$$

由定义得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

例 4 试讨论当$(x,y)\to(0,0)$时,函数$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$的极限.

解 因为

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2kx}{x^4+(kx)^2} = \lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$不存在!

那么,如何来说明二重极限不存在呢? 二重极限是一种全面极限,当 $P(x,y)$ 以某几条特殊路径趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,即使函数 $f(x,y)$ 无限地趋近于某一确定常数 A,也不能断定函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 存在.

反过来,如果当 $P(x,y)$ 沿两条不同路径趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 趋近于不同的值,则可以断定函数的二重极限不存在.

例 5 讨论函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的极限是否存在.

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

函数沿过原点的直线 $y=kx$ 趋近于原点时,其极限值与参数 k 有关,故二重极限不存在.

判定函数的二重极限不存在的常用方法:设法选择 xOy 面上过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的两条曲线 $y=\varphi_1(x)$ 与 $y=\varphi_2(x)$,使极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=\varphi_1(x)}}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=\varphi_2(x)}}f(x,y)$ 的值不相等.

函数的二重极限的概念不难推广到 n 元函数的极限,这里略去.

关于求解二重极限的方法,我们在一元函数中的方法仍然适用,如下例.

例 6 求二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$.

解 因为 $\left|\sin\dfrac{1}{xy}\right|\leqslant 1$,而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,$x^2+y^2\to 0$,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0$$

四、多元函数的连续性

利用多元函数极限的概念,可以定义多元函数的连续性.

定义 9 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点,且 $P_0\in D$,若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),\ P(x,y)\in D$$

则称二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续.

如果函数$f(x,y)$在D的每一点都连续,那么就称函数$f(x,y)$在D上连续,或者称$f(x,y)$是D上的连续函数.

例7 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

试讨论函数在原点(0,0)的连续性.

解 二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$是不存在的,事实上,取过原点(0,0)的路径$y=kx(k\neq 0,k$为任意实数),有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

此极限值与参数k的取值有关,随着k的不同而不同,因此二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在,函数在点(0,0)是不连续的.

可以证明,一元函数关于极限的运算法则仍适用于多元函数. 根据极限运算法则,进一步可证明,多元连续函数的和、差、积为连续函数,在分母不为零处,连续函数的商也是连续函数,多元函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数是指这样的函数:它是由一个式子所表示的多元函数,而这个式子由常数及含多个自变量的基本初等函数经过有限次四则运算复合所构成.

例如,下述函数均为多元初等函数:

$$\frac{x+x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad \sin(x+y),\quad e^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$$

根据多元连续函数和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性,再考虑到基本初等函数的连续性,我们得出结论:一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

注意 这里的定义区域是指含在定义域内的任一区域.

因此,对于多元初等函数,若计算它在一点P_0处的极限值,而P_0又在此函数的定义区域内,则其极限值就等于函数在该点的函数值,即

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

例8 求二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x+y}{xy}$.

解 函数$f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$是初等函数,它的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$$

点$P_0(1,2)$是D的内点,故存在P_0的某一邻域$U(P_0)\subset D$,而任何邻域都是区域,所以

$U(P_0)$便是函数的一个定义区域,因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x+y}{xy}=\frac{1+2}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$$

一般地,求$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$时,如果$f(P)$是初等函数,且$P_0$是$f(P)$的定义域的内点,则$f(P)$在点$P_0$处连续,于是

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

例9 求二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$$

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界的闭区域上,多元连续函数也有如下性质:

定理1(有界性定理) 若函数$f(P)$在有界闭区域D上连续,则它在D上有界,即存在正数M,使得在D上恒有$|f(P)|\leqslant M$.

定理2(最大值与最小值定理) 在有界闭区域D上的多元连续函数$f(P)$,在D上必取得它的最大值和最小值.即在D上存在点P_1和P_2,使得对D上任意点P,恒有$f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2)$,也就是说$f(P_1)$,$f(P_2)$分别是$f(P)$在$D$上的最小值和最大值.

定理3(介值定理) 有界闭区域D上的多元连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何一个值.

习题7-1

1. 写出下列函数的表达式:

(1) 将圆锥的体积V表示为圆锥的母线l和高h的函数.

(2) 在半径为1的球面内内接长、宽、高为x,y,z的长方体,将其表面积表示为x,y的函数.

(3) 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$内内接长、宽、高为$2x,2y,2z$的长方体,将其体积表示成$x,y$的函数.

2. 已知$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

3. 已知$f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,试求$f(x,y)$.

4. 求下列函数的定义域,并画出定义域的图形:

(1) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2-1}$;　　(2) $f(x,y)=\ln(xy)$;

(3) $f(x,y,z)=\sqrt{y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2-z^2)$;　　(4) $f(x,y,z)=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(5) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln(x+y)$;

(6) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r>0)$.

5. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\dfrac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;　　(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

7. 求下列函数在何处连续:

(1) $z=\ln(1-x^2-y^2)$;　　(2) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$.

第二节 偏 导 数

在一元函数中,我们已经知道导数就是函数的变化率,它反映了函数在一点处变化的快慢程度,导数已成为研究一元函数的重要分析工具. 对于多元函数,同样需要研究它的变化率. 然而,由于多元函数的自变量不止一个,因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多. 本节,我们以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例,考虑二元函数关于其中一个自变量的变化率的问题.

一、偏导数

1. 偏导数定义

对于二元函数 $z=f(x,y)$,若只有自变量 x 变化,而自变量 y 固定(即看作常量),这时,$z=$