平面解析几何习题详解

湖北省黄石市教师进修学院

平面解析几何

习题详解

湖北省黄石市教师进修学院

一九七九年二月

前　言

为适应我市中学数学教学的需要，我们根据《全日制十年制学校中学数学教学大纲》（平面解析几何部分）编写了这本《平面解析几何习题详解》。全书分章节安排310道题，对常见习题类型的一般解法过程详尽；为使读者开拓思路，提高解题的思维能力，对某些习题进行了一题多解。另外，本书还选入部分国内数学竞赛有关题解。

参加本书编写和审定工作的有：我院谢崇德，市十一中李在忠，市八中董方博、叶尧城四位同志。负责誊写、绘图的是市十一中李继前、金学烈两位同志。负责校对的是李在忠同志。

由于时间仓促，水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请批评指正。

本书在印刷过程中，承黄石日报印刷厂的同志们大力支持和热情帮助，特表示谢意。

湖北省黄石市教师进修学院

一九七九年二月

目　　录

一、直线……………………………（ 1 ）
二、圆……………………………（ 56 ）
三、抛物线……………………………（ 97 ）
四、椭圆……………………………（124）
五、双曲线……………………………（165）
六、二次曲线……………………………（183）
七、移转轴……………………………（189）
八、极坐标……………………………（197）
九、参数方程……………………………（206）
十、综合题……………………………（215）

(一) 直 线

设直线 $ax+by+c=0$ 经过(5, -4)点，求其系数a、b、c 须满足之条件。

解 ∵直线 $ax+by+c=0$ 经过点(5, -4)

∴其系数a、b、c 必须满足 $5a-4b+c=0$ 之条件。

2 设直线 $ax+by+c=0$ 至原点的距离为1，求其系数a、b、c 须满足什么条件。

解 ∵直线 $ax+by+c=0$ 至原点的距离为1，

则 $$1=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

即 $\sqrt{a^2+b^2}=|c|$.

两边平方，得 $a^2+b^2=c^2$。

∴直线 $ax+by+c=0$ 至原点的距离为1的条件是

$$a^2+b^2=c^2。$$

3 画出下列方程所表示的曲线：

(1) $x^2+y^2+4x-6y+13=0$；

(2) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{6}{y-x}$。

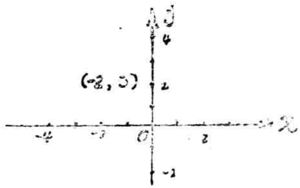
解 (1) 原方程即 $x^2+4x+4+y^2-6y+9=0$。

即 $(x+2)^2+(y-3)^2=0$.

则由 $x+2=0$， 得 $x=-2$；

$y-3=0$， 得 $y=3$。

所以原方程表示一个孤立的点(-2, 3)。

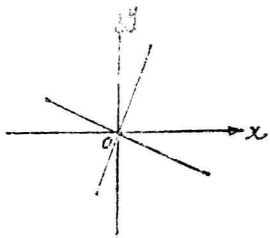


(2) 原方程可化为

$$2y^2-5xy-3x^2=0,$$

$$(2y+x)(y-3x)=0.$$

$$\therefore\ 2y+x=0\ 或\ y-3x=0.$$



可知图形表示两条直线，但由于 $x\neq y\neq 0$，所以原方程为原点以外的四条半射线.（如图）

4 证明：经过 $A(a\sec\varphi_1,\ b\,\mathrm{tg}\,\varphi_1)$ 和 $B(a\sec\varphi_2,\ b\,\mathrm{tg}\,\varphi_2)$ 的直线方程是 $bx\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}-ay\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=ab\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$.

证明 根据直线的两点式方程得

$$\frac{x-a\sec\varphi_1}{a\sec\varphi_2-a\sec\varphi_1}=\frac{y-b\,\mathrm{tg}\,\varphi_1}{b\,\mathrm{tg}\,\varphi_2-b\,\mathrm{tg}\,\varphi_1}$$

$$bx(\mathrm{tg}\,\varphi_2-\mathrm{tg}\,\varphi_1)-ab\sec\varphi_1(\mathrm{tg}\,\varphi_2-\mathrm{tg}\,\varphi_1)$$

$$=ay(\sec\varphi_2-\sec\varphi_1)-ab\,\mathrm{tg}\,\varphi_1(\sec\varphi_2-\sec\varphi_1)$$

$$bx\left(\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\right)-ay\left(\frac{1}{\cos\varphi_2}-\frac{1}{\cos\varphi_1}\right)$$

$$=ab\left(\frac{1}{\cos\varphi_1}\cdot\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\cdot\frac{1}{\cos\varphi_2}\right)$$

$$bx\frac{\sin\phi_2\cos\phi_1-\cos\phi_2\sin\phi_1}{\cos\phi_2\cos\phi_1}-ay\frac{\cos\phi_1-\cos\phi_2}{\cos\phi_2\cos\phi_1}$$

$$=ab\cdot\frac{\sin\phi_2-\sin\phi_1}{\cos\phi_2\cos\phi_1}.$$

$$bx\sin(\phi_2-\phi_1)-ay(\cos\phi_1-\cos\phi_2)=ab(\sin\phi_2-\sin\phi_1),$$

$$bx\cdot 2\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\cos\frac{\phi_2-\phi_1}{2}-ay\cdot 2\sin\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}$$
$$=ab\cdot 2\cos\frac{\phi_2+\phi_1}{2}\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}.$$

$$\therefore\ bx\cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2}-ay\sin\frac{\phi_1+\phi_2}{2}=ab\cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2}.$$

5 证明过点$(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$且垂直于直线$x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta=a$的直线，其方程为$x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$

证法1 $\because\ x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta=a$,

则 $y=-\dfrac{\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta}x+\dfrac{a}{\operatorname{cosec}\theta}$,

即 $y=-\operatorname{tg}\theta\cdot x+\sin\theta\cdot a$,

$\therefore$ 已知直线L_1的斜率$k_1=-\operatorname{tg}\theta$.

又所求过点$(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$的直线$L_1$与已知直线$L_2$垂直，

则其斜率$k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}=\operatorname{ctg}\theta$.

故所求直线的方程可由直线的点斜式方程求出：

$$y-a\sin^3\theta=\operatorname{ctg}\theta(x-a\cos^3\theta)$$

$$y\sin\theta-a\sin^4\theta=x\cos\theta-a\cos^4\theta$$

$$x\cos\theta-y\sin\theta=a(\cos^4\theta-\sin^4\theta)$$

$$x\cos\theta-y\sin\theta=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

因此所求之直线方程为 $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos2\theta$.

证法2　令所求之直线L_2的方程$y=kx+b$.

$\because$ 已知直线L_1的斜率为$k_1=-tg\theta$,

又 $L_1\perp L_2$,

$\therefore$ 直线L_2的斜率$k_2=ctg\theta$.

且 直线L_2过点$(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$.

则 $a\sin^3\theta=ctg\theta\cdot a\cos^3\theta+b$,

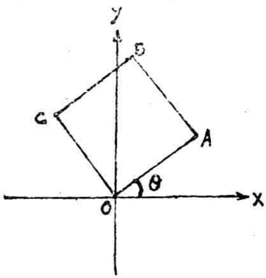
$\therefore$ $b=\dfrac{a\cos^4\theta-a\sin^4\theta}{\sin\theta}=\dfrac{a\cos2\theta}{\sin\theta}$.

故所求之直线的方程为

$$y=ctg\theta\cdot x+\frac{a\cos2\theta}{\sin\theta}$$

即　$x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos2$

5　正方形一顶点在原点边长为a，一边和x轴(正方向)交角为θ，求正方形各边所在直线的方程。



解　如图正方形OABC中，OA边所在直线方程为

$$y=tg\theta\cdot x,$$

即 $x\sin\theta-y\cos\theta=0$;

CO所在直线方程是

$$y=tg\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot x$$

即 $x\cos\theta+y\sin\theta=0$;

因BC上任一点(x,y)到AO的距离恒等于a，以点到直线距离公式

$$\frac{|x\sin\theta-y\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=a$$

化简得：　$x\sin\theta - y\cos\theta \pm a = 0$.

反过来：满足方程的点即在BC所在的直线上。

同理可得AB所在的直线方程

$$x\cos\theta + y\sin\theta \pm a = 0.$$

7　求通过(9,-6)点，而与(4,-1)点之距离为1之直线方程。

解　经过(9,-6)点的直线系的方程是

$$y+6 = k(x-9),$$

即　$kx - y - 9k - 6 = 0$ ……………… ①

据点到直线的距离公式，得：

$$\frac{|4k+1-9k-6|}{\sqrt{k^2+1}} = 1,\quad \text{即}\quad \frac{-5k-5}{\sqrt{k^2+1}} = \pm 1.$$

两边平方得：$[-(5k+5)]^2 = k^2+1$

化简　$12k^2+25k+12=0$

即　$(3k+4)(4k+3)=0$

$\therefore$　$k_1 = -\frac{4}{3}$，　$k_2 = -\frac{3}{4}$.

代入①得：$-\frac{4}{3}x - y - 9\times(-\frac{4}{3}) - 6 = 0$

即　$4x+3y-18=0$

又得：$-\frac{3}{4}x - y - 9\times(-\frac{3}{4}) - 6 = 0$

即　$3x+4y-3=0$.

因此满足条件的直线有两条：

$$4x+3y-18=0,$$
$$3x+4y-3=0.$$

8　求平行于直线 $4x-3y+5=0$ 且与它距离为2的两直线方程。

解　化方程为 $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

与此直线垂直的直线的斜率为$-\frac{3}{4}$.

α 在第二象限.

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=-\frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}$$

$\therefore\ l_1:\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-P_1=0,\quad P_1=2+\frac{5}{\sqrt{4^2+3^2}}=3.$

即 $\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}x-3=0$

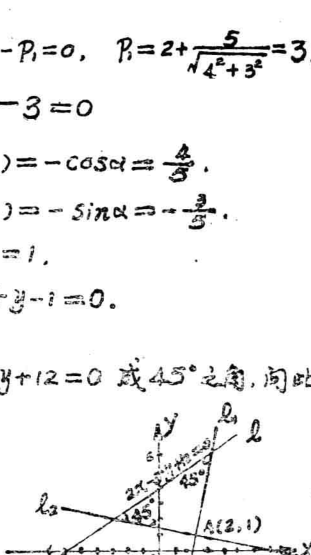
$l_2:\quad \because \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=\frac{4}{5}.$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}.$

$P_2=2-1=1.$

即 $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0.$

9 过一点(2, 1)之直线与 $2x-3y+12=0$ 成 $45°$ 之角，问此直线之方程如何？



解 $\because$ 直线 l 为 $2x-3y+12=0$

$$3y=2x+12$$

$$y=\frac{2}{3}x+4$$

$$\therefore\ k_l=\frac{2}{3}.$$

设过点 A(2, 1) 且与直线 l: $2x-3y+12=0$ 成 $45°$ 角的直线方程为 $y-1=k(x-2)$

$$\because\ tg45°=\left|\frac{k-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k}\right|$$

即 $$\left|\frac{k-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k}\right|=1$$

则 $\dfrac{k-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k}=1$, $\dfrac{k-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k}=-1$.

$\therefore$ $k-\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}k$. $k-\frac{2}{3}=-1-\frac{2}{3}k$.

$\frac{1}{3}k=\frac{5}{3}$ $\frac{5}{3}k=-\frac{1}{3}$

故 $k=5$ $k=-\frac{1}{5}$

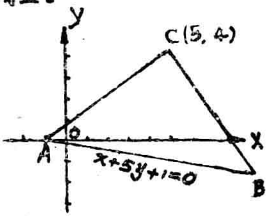
因此，所求之直线方程 l_1 为 $y-1=5(x-2)$，

即 $5x-y-9=0$.

直线方程 l_2 为 $y-1=-\frac{1}{5}(x-2)$，

即 $x+5y-7=0$。

10 等腰直角三角形中，直角顶点的坐标是 5.4)，斜边所在直线的方程是 $x+5y+1=0$、求两直角边所在直线的方程。



解 化 $x+5y+1=0$ 为斜截式 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$ 得

$k_{AB}=-\frac{1}{5}$

设直线 AC 斜率为 k_1，由于 $\angle CAB=45^\circ$

$\therefore$ $\operatorname{tg}45^\circ=1=\dfrac{k_1-(-\frac{1}{5})}{1+(-\frac{1}{5})k_1}$, $5-k_1=5k_1+1$.

$\therefore$ $k_1=\frac{2}{3}$.

因 AC 过 (5, 4) 点，由点斜式得 AC 方程为

$y-4=\frac{2}{3}(x-5)$.

即 $3y-2x-2=0$.

同理，直线BC斜率为k_2，由于$\angle ABC=45^\circ$，

$$\therefore \quad \operatorname{tg}45^\circ=1=\frac{(-\frac{1}{5})-k_2}{1+(-\frac{1}{5})k_2}$$

$$5-k_2=-1-5k_2,$$

$$\therefore \quad k_2=-\frac{3}{2}.$$

但BC过(5, 4)点，由点斜式得BC方程为

$$y-4=-\frac{3}{2}(x-5),$$

即 $3x+2y-23=0$。

11 等腰△底边的方程是$x+y-1=0$，一腰的方程是$x-2y-2=0$，点$(-2,0)$在另一腰上，求此腰的方程。

解 设所求腰之方程为

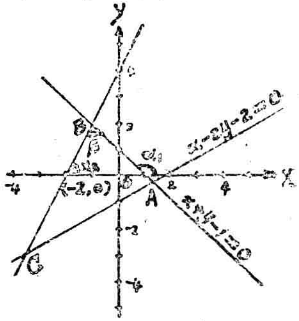
$$y=k(x+2).$$

$\because$ 底：$x+y-1=0$，

$\therefore k_{底}=-1=\operatorname{tg}\alpha_1$。

又 一腰：$x-2y-2=0$，

$\therefore k_0=\frac{1}{2}$。



而由题知 $BC=AC$，

则 $\angle CAB=\angle CBA=\beta$。

又底 $x+y-1=0$ 与腰 $x-2y-2=0$ 的夹角为β。

则 $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{k_0-k_{底}}{1+k_0\cdot k_{底}}=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}=3$。

由于 $\alpha_2=\alpha_1-\beta$，

故 $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}(\alpha_1-\beta)$

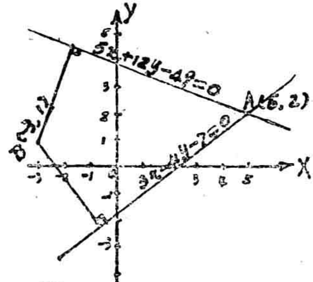
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{k_{底}-\mathrm{tg}\beta}{1+k_{底}\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

$$=\frac{-1-3}{1+(-1)\cdot 3}=2.$$

因此所求之腰的方程为 $y=2(x+2)$ 即 $2x-y+4=0$。

12　已知直线 l 过点 $A(5,2)$，且点 $B(-3,1)$ 到它的距离为 4，试求 l 的方程。



解法一，设所求之直线方程为 $y=kx+b$

$\because$ 点 $A(5,2)$ 在此直线 l 上，

$\therefore\ 2=5k+b.$

故 $b=2-5k.$

则 $y=kx+2-5k$ ……①

又过点 $B(-3,1)$ 的直线 $l_1\perp$ 直线 l。

则 $k_1=-\dfrac{1}{k}.$

设过点 $B(-3,1)$ 的直线 l_1 的方程为

$$y-1=-\frac{1}{k}(x+3)$$

即 $x+ky+3-k=0$ ……②

又 $\because$ $\begin{cases}kx-y+2-5k=0 & \cdots\cdots ①\\ x+ky+3-k=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

①×k　$k^2x-ky+2k-5k^2=0$ ……③

②+③　$(k^2+1)x+3+k-5k^2=0$

$$x=\frac{5k^2-k-3}{k^2+1}$$

②×k $\quad kx+k^2y+3k-k^2=0$ …… ④

④−① $\quad (k^2+1)y-k^2+8k-2=0$

$$y=\frac{k^2-8k+2}{k^2+1}.$$

故直线l_1和直线l的交点坐标为

$$P\left(\frac{5k^2-k-3}{k^2+1},\quad \frac{k^2-8k+2}{k^2+1}\right).$$

而由于$|PB|=4$

则 $$\left(\frac{5k^2-k-3}{k^2+1}+3\right)^2+\left(\frac{k^2-8k+2}{k^2+1}-1\right)^2=16$$

$$\left(\frac{8k^2-k}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{-8k+1}{k^2+1}\right)^2=16$$

$$\frac{(8k^2-k)^2+(1-8k)^2}{(k^2+1)^2}=16$$

$$\frac{k^2(1-8k)^2+(1-8k)^2}{(k^2+1)^2}=16$$

$$\frac{(1-8k)^2(k^2+1)}{(k^2+1)^2}=16$$

$$(1-8k)^2=16(k^2+1)$$

$$1-16k+64k^2=16k^2+16$$

$$48k^2-16k-15=0$$

$$\begin{array}{ccc}4 & \times & -3\\ 12 & & 5\end{array}$$

$$(4k-3)(12k+5)=0$$

$$k=\frac{3}{4},\qquad k=-\frac{5}{12}$$

故当$k=\frac{3}{4}$时，$b=2-5\cdot\frac{3}{4}=2-\frac{15}{4}=-\frac{7}{4}$

当$k=-\frac{5}{12}$时，$b=2-5\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)=2+\frac{25}{12}=\frac{49}{12}$

因此所求之直线l的方程为

$$y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4} \quad 即 \quad 3x-4y-7=0$$

$$和 \quad y=-\frac{5}{12}x+\frac{49}{12} \quad 即 \quad 5x+12y-49=0。$$

解法二．设所求之过点$A(5,2)$的直线l的方程为

$$y-2=k(x-5).$$

即 $kx-y+2-5k=0$。

$\because$ 点$B(-3,1)$到直线l $kx-y+2-5k=0$

的距离为 $d=\dfrac{|-3k-1+2-5k|}{\sqrt{k^2+1}}$，

又 $d=4$，

$$\therefore \quad 4=\frac{|1-8k|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

则 $4\sqrt{k^2+1}=|1-8k|$

两边平方 $16(k^2+1)=(1-8k)^2$

$$16k^2+16=1-16k+64k^2$$

$$48k^2-16k-15=0$$

$$(4k-3)(12k+5)=0$$

$$\therefore k=\frac{3}{4}, \qquad k=-\frac{5}{12}.$$

因此所求之过点$A(5,2)$的直线l的方程为

当$k=\frac{3}{4}$时， $\frac{3}{4}x-y+2-5\cdot\frac{3}{4}=0$，

即 $3x-4y-7=0$。

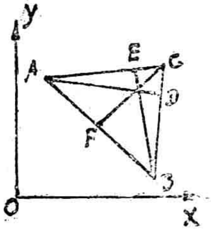
当$k=-\frac{5}{12}$时， $-\frac{5}{12}x-y+2-5\cdot(-\frac{5}{12})=0$，

即 $5x+12y-49=0$。

13 在$\triangle ABC$内已知AB：$4x+y-12=0$，高BE：$5x-4y-15=0$，高AD：$2x+2y-9=0$．求其余二边AC、BC及第三边上的高CF的方程。

解　由AB和AD求顶点A.

$$\begin{cases}4x+y-12=0\\2x+2y-9=0\end{cases}\qquad A:\begin{cases}x=2.5\\y=2\end{cases}$$



由AB和BE求顶点B

$$\begin{cases}4x+y-12=0\\5x-4y-15=0\end{cases}\qquad B:\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$$

AC的斜率为 $-\frac{4}{5}$,

∴ AC的方程为

$$y-2=-\frac{4}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

即 $4x+5y-20=0$

BC的斜率为1, ∴ BC的方程为 $y=x-3$

即 $x-y-3=0$

联立 $\begin{cases}4x+5y-20=0\\x-y-3=0\end{cases}$ 求C点为 $\begin{cases}x=\frac{35}{9}\\y=\frac{8}{9}\end{cases}$

而CF的斜率为 $\frac{1}{4}$, CF的方程为

$$y-\frac{8}{9}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{35}{9}\right),$$

即 $3x-12y-1=0$。

14　经点P(0, 1)作直线使它的包含在二已知直线 $x-3y+10=0$ 及 $2x+y-8=0$ 间的线段平分于P. 求此直线方程。

解　因此直线过P(0, 1)点, 设其方程为 $y=Kx+1$.

联立 $\begin{cases}x-3y+10=0\\y=Kx+1\end{cases}$　　$\begin{cases}2x+y-8=0\\y=Kx+1\end{cases}$

得　$x-3Kx-3+10=0$　　$2x+Kx+1-8=0$

$x_1=\frac{7}{3K-1}$　　$x_2=\frac{7}{2+K}$

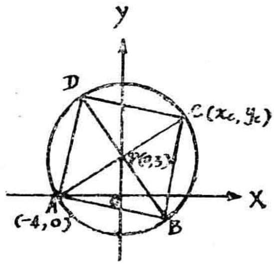
而　$\frac{x_1+x_2}{2}=0$　∴ $\frac{7}{3K-1}+\frac{7}{2+K}=0$

$K=-\frac{1}{4}$

∴ 此直线方程为 $y=-\frac{1}{4}x+1$

即 $x+4y-4=0$

15 已知正方形的一个顶点为A(-4，0)，它的中心为P(0, 3)，求其它各顶点的坐标。



解 如图，设C的坐标为(x_c, y_c).

∵ 中心是正方形对角线AC的中心点

$$∴\begin{cases}\frac{x_c+(-4)}{2}=0\\ \frac{y_c+0}{2}=3\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_c=4\\ y_c=6\end{cases}$

∴ 正方形顶点C的坐标是(4，6)

∵ 正方形的顶点在以P为圆心，以PA为半径的圆上；又正方形的顶点B和D必在过P点且垂直于PA的直线上.

∵ $K_{PA}=\frac{3}{4}$， $|PA|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$$∴\begin{cases}x^2+(y-3)^2=25 & (1)\\ y-3=-\frac{4}{3}x & (2)\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-3\\ y=7\end{cases}$

∴ 正方形另两个顶点是B(3，-1)，D(-3，7).

16 一直线经过P(1，-3)点，且和两轴组成一个等腰直角三角形，求此直线方程.

解 设此直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$