高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013年版

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试分析

教育部考试中心

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试分析

2013年版

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI
SHUXUE KAOSHI FENXI
(2013 NIAN BAN)

教育部考试中心

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析：2013年版/教育部考试中心编. —北京：高等教育出版社，2012.9

ISBN 978-7-04-035942-8

Ⅰ.①全… Ⅱ.①教… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第188901号

策划编辑 刘 佳　　责任编辑 雷旭波　　版式设计 余 杨　　责任校对 金 辉

责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.75	版　　次	2012年9月第1版
字　　数	280千字	印　　次	2012年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.00元

物 料 号　35942-00

目　录

第一部分　数学科考试说明

一、考试性质

全国硕士研究生入学统一考试数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试.

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试.所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大.我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征.数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用.从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试.

另一方面,从数学考试测量功能上看,数学考试又是水平考试.水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以教学基本要求和某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据.《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与教学基本要求没有直接的关系.数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力.数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与教学基本要求不完全相同,教学基本要求中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于教学要求.可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试.

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从 2009 年开始,数学考试分为三个卷种,即数学(一)、数学(二)和数学(三),对不同卷种的考试内容有不同的要求.这种对不同学科、专业考生提出不同的考试要求的特征也是水平考试的重要标志.

二、指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想,即既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,在这两个“有利于”中,重点是有利于为国家选拔高层次的人才.

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习、深造.

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际,试题水平既能反映教学的实际水平,也能考查考生应当具备的知识和能力,同时,正

确利用考试这根“指挥棒”引导高校数学向培养学生应用数学能力的方向发展，使得学生学而有用，学而会用，从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用.

三、基本原则

1. 严格按照《2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（简称《考试大纲》）规定的考试内容和考试要求进行命题.

《考试大纲》主要包括以下内容：考试性质、考查目标、试卷分类及使用专业、考试形式和试卷结构、考试内容和考试要求、题型示例及参考答案等，它是法规性文件，是命题工作和考生复习的唯一依据.

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定，各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致，试卷的难易度与题型示例的难易度基本一致，试卷中不出现超纲题、偏题和怪题.

2. 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查.

3. 试题编制要符合各种题型编制原则.

4. 保持历年试题难度的稳定.

5. 试题编制应科学、公正、规范.

四、参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分，它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度，是考试公平性的重要保证.

数学填空题要求答案是确定的和唯一的，参考答案只给出应填的结果，不给出推导计算过程. 一般每题 4 分，答对 4 分，答错 0 分. 对于四选一的选择题有 A、B、C、D 四个备选项，其中三个是干扰项，一个是正确选项，参考答案只给出正确选项前的字母，不给出推导过程. 选对得满分，选错得 0 分，不倒扣分，鼓励考生在不会作答时猜测选项. 对于计算题、证明题以及其他解答题，一般提供一至两种参考解答或证明，有些试题有更多的解法甚至包括初等解法，但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法. 参考答案的文字表述必须规范，推理过程必须表述清楚，避免因参考答案表述不清而造成评分误差. 每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关. 一般地说，综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大，分值较高；基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低. 各题的分值设定之后，就需要确定评分参考，即运算过程中关键步骤的赋分权重. 计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的，比如，完成一道分值为 10 分的计算题需要三个关键步骤，完成到第一个步骤给 3 分，完成到第二个步骤给 6 分，三个步骤全部完成给 10 分. 对于文科试题常常是按照要点单独赋分. 为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢？这是考虑到对于数学计算或证明题，只有做对了前面步骤，才能完成后面的步骤这一特点. 对于有多个解法的试题，一般到达同一结果给相同的分数，每一步骤分的给定不是随意的，如同确定每题分值一样，需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度，关键的步

骤分值较高,反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案与评分参考对部分考卷进行试评,对评分参考做进一步的细化,制订评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分使其平均分较高,反之亦然.因此,评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

五、试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生入学数学考试的性质,它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试,通常用难度和区分度评价试题的质量;用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况,同时也作为评价试卷质量的重要指标;用信度和效度评价考试的质量.

1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,通常以小写的 p 表示,取值范围在 0 到 1 之间.由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同,因此,同一题目相对于不同的考生群体,其难度值是不同的,也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言,由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的,可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的),这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下的为难题,难度值在 0.3 ~ 0.8 之间的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题.试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中,为了保证试题的质量,需要估计题目难度.根据难度的定义,估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度,而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力.区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用 D 表示,一般 $-1 < D < 1$.对于主观性试题,一般用积矩相关系数;对于客观性试题,如填空题和选择题,一般用双列相关计算公式.该公式比较复杂,可参考有关教育测量书籍,在此不做介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组,然后分别计算出高分组、低分组的得分率 $p(H)$、$p(L)$,$D = p(H) - p(L)$.高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27% 的考生,低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27% 的考生.这种方法适合较小规模的考试,不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2 ~ 0.3 之间的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试题区分度通常较大.为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如下表所示.

试题的六大类型分类表

类型＼特征	p	D	试题特征
Ⅰ	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
Ⅱ	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
Ⅲ	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
Ⅳ	(0,0.3)	(0.3,1.0)	难度大但区分能力强
Ⅴ	[0.3,0.8]	(0.3,1.0)	难度适中且区分能力强
Ⅵ	(0.8,1)	(0.3,1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现.我们认为,第Ⅴ类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上).第Ⅰ类试题属于“题太难谁都不会做”,第Ⅲ类试题属于“题太易谁都会做”,它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题.同时,我们也不要求出现太多的第Ⅱ类和第Ⅵ类试题.第Ⅳ类试题在选拔性的研究生入学数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看做一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差愈小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第Ⅴ类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第Ⅴ类试题在卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,若满分为150分,试卷的及格率是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差有关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标.

3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标. 信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果. 常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度. 由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 α 系数. 目前我们采用的是分半信度和 α 系数. 效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西. 常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度. 关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍.

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标.

第二部分　2012 年数学考试分析

一、总体评价

2012 年全国硕士研究生入学考试数学(一)、数学(二)、数学(三)试卷严格按照教育部考试中心颁布的《2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的规定命制. 试卷考查高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计三门课程中的主干知识和主要内容,注重对各门课程的基本概念、基本理论和基本方法的考查,坚持对重点知识重点考查. 试卷全面覆盖重点知识,各部分内容在试卷中都占有合理的比例. 三套试卷的难度适中,继续保持了数学试卷标准差大、区分度好的特点,充分发挥了数学科的选拔功能,为高等院校和科研机构的录取工作提供了有效的数学成绩.

2012 年的数学试卷命制科学、规范,试题叙述平易、简洁,设问明确、合理. 试题答案与评分参考给出的均是常见的解法,表述规范、完整,逻辑清晰,赋分合理,操作性强,有利于控制阅卷误差,提高阅卷效率.

1. 注重基础,考查基本概念、基本理论和基本方法

三套试卷注重考查基础知识、基本技能和基本方法,试题起点低,入手容易,难易适中.

高等数学(微积分)的客观题主要考查了渐近线、导数运算、定积分定义、定积分性质、微分方程求解、曲面积分等内容,主观题则主要考查了不定式极限与等价无穷小量概念(数学(二)的第(15)题、数学(三)的第(15)题),方程的根及数列极限的存在性(数学(二)的第(21)题),函数不等式(数学(一)的第(15)题、数学(二)的第(20)题、数学(三)的第(18)题),定积分应用(数学(一)的第(18)题、数学(二)的第(17)题),多元函数极值(数学(一)的第(16)题、数学(二)的第(16)题),二重积分(数学(二)的第(18)题、数学(三)的第(16)题),微分方程(数学(二)的第(19)题、数学(三)的第(19)题),幂级数(数学(一)的第(17)题),曲线积分(数学(一)的第(19)题)等内容.

线性代数主要考查了向量组的线性相关、矩阵运算及矩阵的秩、线性方程组解的存在性及解的求法、正交变换及二次型的标准形等基本内容.

概率论与数理统计主要考查了指数分布、条件概率、二维离散型随机变量的概率分布及协方差、正态分布、最大似然估计和无偏估计等基本内容.

2. 注重能力,考查计算能力、推理能力和应用能力

在考查基础的同时,三套试卷继续坚持以能力立意的命题思想,注重学科的内在联系和知识的综合运用. 例如数学(一)的第(3)、(4)、(10)、(18)题,数学(二)的第(17)、(19)、(21)题,数学(三)的第(17)题等,涉及两个或两个以上的知识点,对考生的计算能力、推理能力和综合运用所学知识分析、解决问题的能力提出了一定的要求.

3. 难度适中,有利选拔

2012 年三套试卷的难度控制精确、合理,均在 0.5 ~ 0.55 之间,为招生和录取工作打下良好

的基础.每种试卷的基础题占到了70%左右,客观题的绝大多数和主观题的多数都属于中等难度及中等难度以下的试题.试题的设问方式有利于考生的发挥,如数学(一)的第(18)、(20)、(21)、(22)、(23)题,数学(二)的第(15)、(19)、(21)、(22)、(23)题,数学(三)的第(17)、(19)、(20)、(21)、(22)、(23)题等.这些试题设置了多问,问题由易到难,利于考生"入手",能够区分不同水平的考生.

4. 覆盖全面,比例适中

2012年的三套试卷涵盖了《考试大纲》中的主要内容,高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计三门课程的分值及各类题型的数目严格依据大纲设计.即使在同一门课程中,各部门内容也依据大纲占到了一定比例.以数学(一)试卷中的高等数学为例:一元函数微分学部分共21分,占26%;一元函数积分学部分共15分,占18%;多元函数微分学部分共18分,占22%;多元函数积分学部分共14分,占17%;无穷级数与常微分方程共14分,占17%.

二、统计数据分析

1. 难度分析

2012年数学各卷种的抽样统计数据如下表所示.三份试卷难度适中,均在0.55左右.各卷种难度相对平衡,数学(一)较往年难度略有降低,主要是解答题的难度略微降低,其他各卷种难度保持稳定.

2012年数学各卷种抽样统计数据

卷种	样本量	平均分	难度	标准差	α信度
数学(一)	29 555	80.11	0.534	32.62	0.880 8
数学(二)	24 839	82.82	0.552	30.62	0.870 6
数学(三)	24 139	81.54	0.544	34.26	0.886 0

从下表中各卷种在三种题型上的平均难度值可以看出,各卷种三种题型的平均难度值均在中等难度范围内,为了体现不同题型的不同考查功能,选择题较填空题、解答题都容易.选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解,要求考生能进行简单的推理、判定、计算和比较;填空题主要考查"三基"及数学的重要性质,一般不考计算量大的题,以中、低难度的试题为主;解答题除了考查基本运算外,主要考查考生的逻辑推理能力和综合运用能力,且试题排列有一定的坡度,因而能力要求逐渐增高,试题难度相对较大.

2012年数学各卷种在三种题型上的难度值

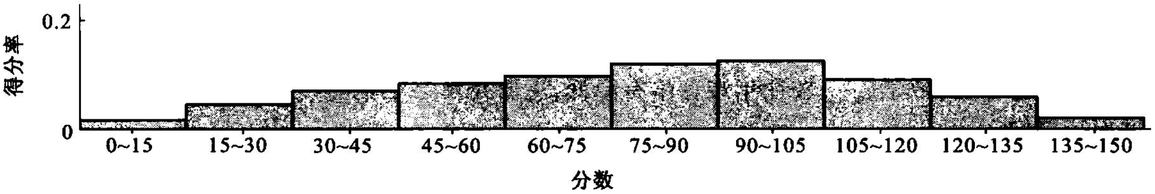
题型	数学(一)	数学(二)	数学(三)
选择题	0.642	0.676	0.637
填空题	0.523	0.587	0.528
解答题	0.500	0.501	0.516

2. 区分度分析

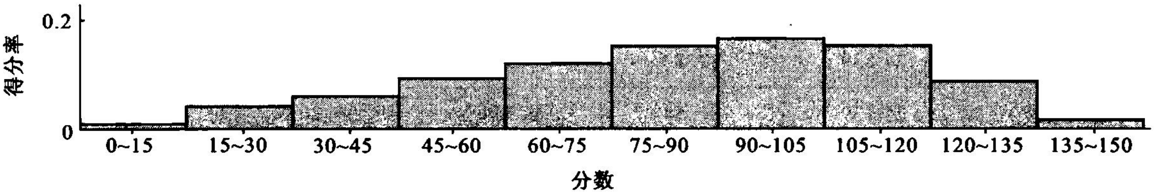
从下面的2012年数学各卷种区分度分布表可以看出，数学(一)、数学(二)区分度在0.2以下的试题只有1道，其余试题和数学(三)全部试题的区分度均在0.2以上，数学(一)有92%、数学(二)有92%、数学(三)有97.3%的试题都达到了0.3以上的合格水平.从考生分数分布直方图可以看出，数学(一)、数学(二)、数学(三)都呈正偏的正态分布.各卷种的标准差均在30以上，说明数学各卷种对考生的区分良好，有利于高等院校和科研机构选拔优秀的学生.

2012 年数学各卷种区分度分布表

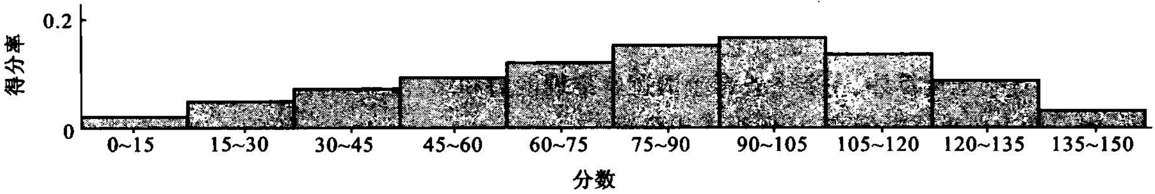
区分度区间	数学(一)	数学(二)	数学(三)
0.2 以下	2.7%	2.7%	0
0.2～0.3	5.3%	5.3%	2.7%
0.3 以上	92%	92%	97.3%



数学(一)考生分数分布直方图



数学(二)考生分数分布直方图



数学(三)考生分数分布直方图

三、思考与建议

1. 从阅卷情况看，一些考生的基础还不够扎实，首先是对基本概念的掌握不准确，例如将极值和最值的概念混淆.其次是运算能力比较薄弱，数学考试对运算能力的考查不是简单的数字计算，而是对概念、算理的考查.考试中重点强调的是：在运算过程中使用的概念要准确无误，使用

的公式要准确无误，使用的法则要准确无误，数字计算要准确无误. 因此考生在学习和复习中要加强对概念的理解，加强对运算能力的培养.

2. 注重数学基础，继续加强应用性考查. 对数学基础知识的考查，要求既全面又突出重点、注意层次. 重点知识是支撑学科知识体系的主要内容，考查时要保持较高的比例，并达到必要的深度. 应用性是数学学科的特点之一，解答数学应用问题是分析问题和解决问题的能力的高层次表现，反映出考生的创新意识和实践能力，在数学试卷中应有所体现和加强.

四、数学(一)试题分析

1. 选择题

(1) 曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【答】 应选(C).

【分析】 本题主要考查渐近线的概念、无穷大量的概念和渐近线的求法，是一道基本题.

【解】 因为 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$，所以

$$\lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty,$$

故 $x=1$ 是曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$的铅直渐近线，且是唯一的一条铅直渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$，所以 $y=1$ 是曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$的水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x(x^2-1)}=0$，故该曲线无斜渐近线.

综上可知，曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$有两条渐近线.

【典型错误】 一些考生选(D)，认为该曲线有 3 条渐近线，即 $x=-1$ 也是一条铅直渐近线. 这是想当然地认为 $x=-1$ 使函数$\frac{x^2+x}{x^2-1}$的分母为 0，而没有根据铅直渐近线的定义去求 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2-1}$. 只有当此极限为$\infty$时，$x=-1$ 才是铅直渐近线.

本题难度值为 0.623，区分度为 0.185.

(2) 设函数$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则$f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

【答】 应选(A).

【分析】 本题主要考查多因式连乘的导数公式和复合函数求导法则，是一道基本计算题.

本题亦可根据一点处导数的定义直接计算 $f'(0)$.

【解】 因为

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x-1)'(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(e^{2x}-2)'\cdots(e^{nx}-n)+\cdots \\
&\quad +(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)' \\
&= e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+2e^{2x}(e^x-1)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots \\
&\quad +ne^{nx}(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots[e^{(n-1)x}-n+1],
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= e^0(e^0-2)\cdots(e^0-n)+2e^0(e^0-1)(e^0-3)\cdots(e^0-n)+\cdots \\
&\quad +ne^0(e^0-1)(e^0-2)\cdots(e^0-n+1) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{aligned}
$$

另一方面,本题利用导数定义计算更方便:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)-0}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)] \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{aligned}
$$

【典型错误】 部分考生选(C),应该是运算有错误.

本题难度值为 0.735,区分度为 0.319.

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查二元函数可微的概念和判断函数在一点处可微的基本方法.本题既可以对认为正确的结论进行证明而确定,也可通过举反例否定其余的结论,是一道要求较高的题目.

【解】 因为函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则

$$f(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(x^2+y^2) = 0,$$

这时 $f(x,y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+f(x,y)$,且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

所以$f(x,y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o(\sqrt{x^2+y^2})$，即$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，选项(B)正确.

另外，若取$f(x,y)=|x|+|y|$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，且极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在. 但由于$f(x,y)=|x|+|y|$在点$(0,0)$处偏导数不存在，故不可微，排除选项(A).

取$f(x,y)=x+y$，显然$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，但$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$不存在（其理由请读者补充），故排除选项(C).

类似地，取$f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$可排除选项(D).

【典型错误】 这是一道对概念要求较高的选择题. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在是$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充分条件，但不是必要条件. 很多考生正是对这一点不甚清楚而答错，填了(D).

本题难度值为0.304，区分度为0.222.

(4) 设$I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\ (k=1,2,3)$，则有

(A) $I_1<I_2<I_3$. (B) $I_3<I_2<I_1$.

(C) $I_2<I_3<I_1$. (D) $I_2<I_1<I_3$.

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查定积分的比较定理和定积分对积分区间可加性定理，考查指数函数和三角函数的简单性质，是一道常规题.

【解】 $I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$,

$I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=I_1+\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$.

当$\pi<x<2\pi$时，因为$e^{x^2}\sin x<0$，所以$\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0$，从而$I_2<I_1$.

因为

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x&=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{\pi}e^{(2\pi-t)^2}\sin t\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}e^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}[e^{(2\pi+t)^2}-e^{(2\pi-t)^2}]\sin t\mathrm{d}t>0,\end{aligned}$$

所以$I_3>I_1$.

综上可知，正确选项为(D).

【典型错误】 部分考生选(C)，主要原因是未能把题做到底. 事实上，I_1与I_3的比较要经过两次积分换元，都化成$[0,\pi]$上的积分后才能看出.

本题难度值为0.700，区分度为0.284.

(5) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列

向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

【答】 应选(C).

【分析】 本题考查向量的线性相关性概念. 由于 c_1,c_2,c_3,c_4 是任意常数,所以当确定一个向量组线性相关时,就必须证明对任何常数都是正确的;反之,只需举出一个反例即可.

【解】 首先,当 $c_1=1$ 时,行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-1,\ |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|=1,$$

所以此时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都线性无关,即选项(A)与(B)不能选.

其次,当 $c_2=0,c_3=c_4=1$ 时,行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=-2$,即此时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也是线性无关的,选项(D)也不能选,故选(C).

事实上,当 $c_1=0$ 时,由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为零向量,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关;当 $c_1\neq0$ 时,必存在不全为零的数 c_1 与 c_3+c_4,使

$$(c_3+c_4)\boldsymbol{\alpha}_1-c_1(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0},$$

所以,对任意的常数 c_1,c_3,c_4 而言,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是线性相关的. 这证明了应该选(C).

【典型错误】 本题的得分率相当高. 在三个错误选项中,选(D)的稍多一些,应该是猜的答案. 这少数考生仍需在基本概念上多花点工夫.

本题难度值为0.872,区分度为0.338.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查考生对可相似对角化矩阵性质的理解及运用相关性质做出判断. 本题也可利用与矩阵初等变换相对应的初等方阵经过简单矩阵乘法运算求解,是一道比较灵活的试题.

【解法1】 由题设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可相似对角化的矩阵,因而其相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$ 的特征向量. 由于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的2重特征值,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值1的特征向量,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$,从而有

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

应选(B).

【解法 2】 因为矩阵 Q 是对矩阵 P 作一次初等列变换——将 P 的第 2 列加到第 1 列上而得到的，所以有

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{aligned}Q^{-1}AQ&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即选项(B)是正确的.

【典型错误】 本题的得分率也比较高，说明大多数考生对这类题的解法掌握得比较熟练.而错选(C)和(D)的考生几乎一样多，只能认为他们并不知道应该怎样解此题.

本题难度值为 0.778，区分度为 0.497.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$

(A) $\frac{1}{5}$.　　(B) $\frac{1}{3}$.　　(C) $\frac{2}{3}$.　　(D) $\frac{4}{5}$.

【答】 应选(A).

【分析】 本题考查与二维连续型随机变量(X,Y)相关的随机事件概率的计算.已知两个边缘分布，利用 X 与 Y 相互独立的条件，求得(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)$，然后计算二重积分 $P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)\,dxdy$. 这是基本题型.

【解】 由已知得，X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

又 X 与 Y 相互独立，所以 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-x-4y}, & x>0,y>0,\\0, & 其他,\end{cases}$$