线性代数补充习题集

（第七版）

刘昌劲

计科 0202 班

江南大学基础数学部

二〇〇三年二月

序　　言

本习题集根据国家教育部“工科数学指导委员会”所颁布的《线性代数》教学基本要求，以同济大学《线性代数》（第三版）为基础，结合本校各专业《线性代数》课程的教学实践和要求编写而成的。习题集分为习题、习题解答和研究生试题共三部分，并配有试卷和检测试卷各四份，为了适应因材施教及满足部分学生考研需要，本习题集选入了国家1997～2002年工科硕士研究生入学试题的全部内容，并附答案或提示。

本习题集可作为本科、专科学生学习《线性代数》课程的辅助资料，内容相对集中，较适合于各单元内容的复习和自测，也可供教师上习题课参考。

本习题集，由于附有详细的解答过程，因此对于欲报考工科及经贸类等硕士研究生的学生而言，也有一定的参考价值。

本习题集由马恒新、眭润生两位老师编写。在编写过程中得到了数学教研室各位老师的大力支持，在此谨表谢意。

编　者

2003年2月

刘禹劢

计算机科学与技术 0202班

0240533

目　　录

第一章　行列式

一 (1) 求行列式的值:(*i*) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$ $(4-\lambda^2)(\lambda-1)$

(*ii*) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=$ $-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

一 (2) 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix}=0$ 的全部根是 $1,2,3$

范德蒙行列式

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(3-1)(3-2)(2-1)$

(3) 计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & x & y & x \\ x & 0 & x & y \\ y & x & 1 & x \\ x & y & x & 0 \end{vmatrix}. = y^2(y^2-1)-4x^2y(y-1)$

一 (4) 计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. = x^4$

(5) 证明恒等式：$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 左边展开即得证

(6) 设行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$，则其第四行各元素余子式的和为 2 ，而第四行各元素代数余子式的和为 8 .

$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{n1}A_{n1}+\cdots+a_{nn}A_{nn}$

$=a_{n1}(-1)^{n+1}M_{n1}+\cdots a_{nn}(-1)$

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}=$ $b^2(b^2-4a^2)$

(8) 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x & b & b & b & b \\ b & x & b & b & b \\ b & b & x & b & b \\ b & b & b & x & b \\ b & b & b & b & x \end{vmatrix} = (x+4b)(x-b)^4 = 0$ 的全部根是 $\underline{x=b,\ }x=-4b$

(9) 计算 $D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a & a & a & a \\ a & a_2 & a & a & a \\ a & a & a_3 & a & a \\ a & a & a & a_4 & a \\ a & a & a & a & a_5 \end{vmatrix}$ $\prod_{k=1}^{5}(a_k-a)\left[1+\sum_{k=1}^{5}\frac{a}{a_k-a}\right]$ (其中 $a_i \neq a, i=1,2,3,4,5$)

(10) 求值：(*i*) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{a^n+(-1)^{1+n}\cdot b^n}$ (*ii*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \underline{n!(2-n)}$

按第一列展开

(11) 计算 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$

先按第一列展开，(1,2)元素按第一列展开

(12) 设 $a \neq b$，证明：$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

$D_n-aD_{n-1}=b^n$ ①

$D_n-bD_{n-1}=a^n$ ②

②×a − ①×b 得

$aD_n-bD_n=a^{n+1}-b^{n+1}$

$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

第二章　矩阵及其运算

(13) 设 A、B 为 n 阶方阵，则有

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$；　　(B) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$；

$(C)(AB)^m = A^mB^m$,(m 为正整数)；　$(D)B(A+B)^TA = [A^T(A+B)B^T]^T$.

答:[D]

(14) 设 A、B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是　$|A|\neq 0$ $|B|\neq 0$ $|AB| = |A||B| \neq 0$

(A) 若 A、B 均可逆，则 $A+B$ 可逆；　(B) 若 A、B 均可逆，则 AB 可逆；

(C) 若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆；　(D) 若 $A+B$ 可逆，则 A、B 均可逆.

答:[B]

(15) 设 A、B 为 n 阶方阵，满足 $A^2 = B^2$，则有　$A\cdot A = B\cdot B$　$|A||A| = |B||B|$　$|A\cdot A| = |B\cdot B|$

$(A)A = B$；　$(B)|A| = |B|$；　$(C)A = -B$；　$(D)|A|^2 = |B|^2$.　答:[D]

(16) 设 n 阶方阵 A、B、C 满足关系式 $ABC = E$，其中 E 为 n 阶单位阵，则必有

$A = (BC)^{-1}$

$(A)ACB = E$；　$(B)CBA = E$；　$(C)BAC = E$；　$(D)BCA = E$.　答:[D]

$BC = A^{-1}$

(17) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则

$(A)|A^*| = |A|^{n-1}$；　$(B)|A^*| = |A|$；　$(C)|A^*| = |A|^n$；　$|A^*| = |A^{-1}|$.

$AA^* = \cancel{A^*A}$　$\cancel{|A||A^*| = |A^*|}$　$|A||A^*| = |A|^n$　答:[A]

$= |A|E$

(18) 设 n 维行向量 $\alpha = (\frac{1}{2}, 0, \cdots, 0, \frac{1}{2})$，矩阵 $A = E - \alpha^T\alpha$，$B = E + 2\alpha^T\alpha$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 AB 等于

$AB = (E - \alpha^T\alpha)(E + 2\alpha^T\alpha)$

$= E + 2\alpha^T\alpha - \alpha^T\alpha - 2\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha$

$= E + 2\alpha^T\alpha - 2\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha = E + 2\alpha^T\alpha(E - \alpha^T\alpha)$

$(A)0$；　$(B)-E$；　$(C)E$；　$(D)E + \alpha^T\alpha$　答:[C]

(19) 设分块矩阵 $B = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}$，$B^{-1} = \begin{pmatrix} A_2 & \alpha_2 \\ \beta_2 & a \end{pmatrix}$，其中 A_1、A_2 为 $n \times n$ 矩阵；α_1、α_2 为 $n \times 1$ 矩阵；β_1、β_2 为 $1 \times n$ 矩阵；a 为实数，则 a 为

$BB^{-1} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + \alpha_1\beta_2 & A_1\alpha_2 + \alpha_1 a \\ \beta_1A_2 + \beta_2 & \beta_1\alpha_2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n\times n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_1\alpha_2 + \alpha_1 a = 0$

$\beta_1\alpha_2 + a = 1$

$(A)1$；　$(B)\beta_1A_1^{-1}\alpha_1$；　$(C)\dfrac{1}{1 - \beta_1A_1^{-1}\alpha_1}$；　$(D)\dfrac{1}{1 + \beta_1A_1^{-1}\alpha_1}$.　答:[C]

(20) 若 A 为 n 阶方阵，其中 n 为奇数，且 $A^T = -A$，则有行列式 $|A| =$ __0__.

$|A^T| = |-A| = |A|$　$-|A| = |A|$　$2|A| = 0$

(21) 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则 $A^2 =$ __$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$__A.　$= (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$

(22) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $(A+3E)^{-1}(A^2 - 9E) =$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(A+3E)^{-1}(A^2 - 9E) = X$　$(A^2 - 9E) = (A+3E)X$　$X = A - 3E$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(23) 设 A 为三阶方阵，行列式 $|A| = 4$，则行列式 $|(A^*)^* - 2A| =$ __32__.

$= |4A - 2A| = |2A| = 2^3|A| = 8\times 4$

$(A^*)^* = \dfrac{|A^*|}{A^*} = \dfrac{|A|^{n-1}}{\frac{|A|E}{A}} = |A|^{n-2}A = 4A$

(24) 设 4×4 矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$，$B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$，其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$ 和 γ_4 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A| = 4$，$|B| = 1$，则行列式 $|A + B| =$ __40__.

$|A+B|$ $= |(\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) + (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)|$　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　$8\times(4+1) = 8\times 5 = 40$

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A^*|}(A^*)^* = \frac{1}{|A^*|}\frac{|A^*|E}{A^*} = \frac{E}{\frac{|A|E}{A}} = \frac{A}{|A|} = \frac{1}{10}A$$

(25) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1} =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(26) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则逆矩阵 $(A-2E)^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(27) 设四阶方阵 $A = \left[\begin{array}{cc:cc} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$，则 A 的逆阵 $A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(28) 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且行列式 $|A| = a$，$|B| = b$，而 $C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$，则行列式 $|C| =$ $(-1)^{mn}ab$

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

(29) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq 0 (i = 1,2,3,\cdots,n)$，则有 $A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$

(30) 设三阶方阵 A、B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$，且 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $A^{-1}-E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $(A^{-1}-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$(A^{-1}-E)BA = 6A$

$(A^{-1}-E)BAA^{-1} = 6AA^{-1}$

$(A^{-1}-E)B = 6E$

$(A^{-1}-E)^{-1}(A^{-1}-E)B = 6(A^{-1}-E)^{-1} = B$ $B = 6(A^{-1}-E)^{-1}$

则 $B =$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(31) 已知 $\alpha = (1,2,3)$，$\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$，设 $A = \alpha^T\beta$，其中 α^T 是 α 的转置则 $A^n =$ $3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = 3A$

(32) 已知三阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A^*|}(A^*)^* = \frac{1}{|A^*|}\frac{|A^*|E}{A^*} = \frac{E}{\frac{|A|E}{A}} = \frac{A}{|A|} \quad A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(33) 设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB = A + 2B$，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$，试求矩阵 B.

~~A+2~~ $(A-2E)B = A$

$B = (A-2E)^{-1}A$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(34) $(E-C^{-1}B)^TC^T = [E^T-(C^{-1}B)^T]C^T = [E-B^T(C^{-1})^T]C^T = C^T - B^T(C^{-1})^TC^T$

$= C^T - B^T((C^{-1})^T C^T = C^T - B^T = (C-B)^T$

$\therefore A(C-B)^T = E \quad A = [(C-B)^T]^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(34) 设四阶矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，且矩阵 A 满足关系式 $A(E-C^{-1}B)^TC^T = E$，其中 E 为四阶单位阵，将上述关系式化简，并求矩阵 A.

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -4 & \end{pmatrix}$

(35) 已知 $AP = PB$，其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，试求 A 及 A^5.

$A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^5 = PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdot PBP^{-1} = PB^5P^{-1}$
$= PBP^{-1}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(36) 已知对于 n 阶方阵 A，存在自然数 k，使各 $A^k = 0$，试证明 $E-A$ 可逆，并写出 $(E-A)^{-1}$ 的表达式(其中 E 为 n 阶单位阵).

$A^k = 0 \quad E = E - A^k = (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$

$\therefore |E-A|\cdot|E+A+\cdots+A^{k-1}| = |E| = 1$

$\therefore E-A$ 可逆 $\quad (E-A)^{-1} = E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$

(37) 设 A、B 均为三阶矩阵，E 为三阶单位阵，满足 $AB+E = A^2+B$，又知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，试求矩阵 B.

$AB - B = A^2 - E$

$(A-E)B = (A-E)(A+E)$

$B = A+E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(38) 已知实矩阵 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 满足条件 $(i)\, a_{ij} = A_{ij}(i,j = 1,2,3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；$(ii)\, a_{11} \neq 0$. 试计算行列式 $|A|$.

$\Rightarrow A^* = A^T \Rightarrow AA^* = |A|E \Rightarrow AA^T = |A|E \Rightarrow |A|^2 = |A|^3$

$\Rightarrow |A| = 1$ 或 $|A| = 0 \quad a_{11} \neq 0 \Rightarrow |A| = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}^2 > 0$

(39) 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T = E$，其中 A^T 是 A 的转置矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，且 $|A| < 0$，求行列式 $|A+E|$.

$|A+E| = |A + AA^T| = |A||E+A^T| = |A||E+A|$

$(1-|A|)|E+A| = 0 \quad \because |A| < 0 \quad 1-|A| > 0 \quad \therefore |A+E| = 0$

(40) 设 n 阶方阵 A 满足关系式 $A^2 - 3A - 2E = 0$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，证明矩阵 A 可逆，并求 A^{-1}.

$A^2 - 3A - 2E = 0 \Rightarrow A(A-3E) = 2E \quad |A||A-3E| = 2^n \quad \therefore |A| \neq 0 \quad \therefore A$ 可逆

由 $A\cdot\frac{1}{2}(A-3E) = E$ 得 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-3E)$

(41) 设 n 阶方阵 A 可逆，证明当 $n \geqslant 2$ 时 $(A^*)^* = |A|^{n-2}\cdot A$.

$(A^*)^* = (A^*)^{-1}|A|^{n-1} \quad AA^* = |A|E \quad \frac{A}{|A|}A^* = E$

$AA^* = |A|E$

$A^*(A^*)^* = |A^*|E = |A^{-1}|A||E = |A^{-1}||A|^nE = \frac{1}{|A|}|A|^nE = |A|^{n-1}E$

$= \frac{A}{|A|}|A|^{n-1} = |A|^{n-2}A$

(42) 设 $A = \frac{1}{2}(B+E)$，其中 A、B 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，证明 $A^2 = A$ 的充分必要条件是 $B^2 = E$.

充分性：$\because B^2 = E \quad \therefore A^2 = [\frac{1}{2}(B+E)]^2 = \frac{1}{4}(B^2+2B+E) = \frac{1}{4}(2B+2E) = \frac{1}{2}(B+E) = A$

必要性：$\because A = A^2 = \frac{1}{2}(B+E) \quad \therefore B = 2A - E \quad \therefore B^2 = (2A-E)^2 = 4A^2 - 4A + E = 4A - 4A + E = E$

(43) 设 n 阶方阵 A 可逆，证明 A 的伴随矩阵 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \Rightarrow |A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n\frac{1}{|A|} = |A|^{n-1} \neq 0 \quad (A^*)^{-1}$ 存在

$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} \quad = \frac{|A^{-1}|}{A^{-1}} = \frac{\frac{1}{|A|}}{\frac{1}{A}} = \frac{A}{|A|}$

(44) 设 n 阶矩阵 A、B 和 $A+B$ 均可逆，证明：$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.

$(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B] = [(A^{-1}+B^{-1})A][(A+B)^{-1}(B^{-1})^{-1}] = (E+B^{-1}A)[B^{-1}(A+B)]^{-1}$

$= (E+B^{-1}A)(B^{-1}A+E)^{-1} = E \quad \therefore (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$ 类似可证 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$

(45) 设 A 为 n 阶可逆矩阵，且 $A^2 = |A|E$，证明：A 的伴随矩阵 $A^* = A$.

$AA = AA^* \quad A^{-1}AA = A^{-1}AA^* \quad A = A^*$

(46) 若 $A = \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$，求 A^{-1}. $= \begin{pmatrix} 0 & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^{-1} = \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

利用课本P69 22题结论

$A=\begin{pmatrix} D & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CD^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

(47) 若 $A=\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$，求 A^{-1}. $=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & -10 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(48) 设 A 为主对角元素均为零的四阶实对称可逆矩阵(即 $|A| \neq 0$ 且 $A=(a_{ij})_{4\times4}$，$a_{ij}=a_{ji}$ $\in R$，$a_{ii}=0(i=1,2,3,4)$)，E 为四阶单位矩阵，$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}$，$(K>0, l>0)$.

记 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix}$ $E+AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ka_{13} & la_{14} \\ 0 & 1 & ka_{23} & la_{24} \\ 0 & 0 & 1 & la_{34} \\ 0 & 0 & ka_{34} & 1 \end{pmatrix}$

$|E+AB| = 1-kla_{34}^2$

当 $a_{34}^2 \neq \frac{1}{kl}$ 时 $E+AB$ 可逆

(i) 试计算 $E+AB$，并指出 A 中的元素满足什么条件时，$E+AB$ 为可逆矩阵；(ii) 当 $E+AB$ 可逆时，证明 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

$(E+AB)^{-1}A=[A^{-1}(E+AB)]^{-1}=(A^{-1}+B)^{-1}$ $[(E+AB)^{-1}A]^T=[(A^{-1}+B)^{-1}]^T$ $=[(A^{-1}+B)^T]^{-1}=(A^{-1}+B)^{-1}=(E+AB)^{-1}A$

(49) 设 A 为可逆矩阵，证明 (i) $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$；(ii) 若 K 为正整数，有 $(A^K)^{-1}=(A^{-1})^K$.

(i) 左 $=(AA)^{-1}=A^{-1}\cdot A^{-1}=(A^{-1})^2$ (ii) 左 $=(A\cdots A)^{-1}=A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots A^{-1}=(A^{-1})^k$

(50) 设 A、B 为 n 阶方阵，且 $AB=A+B$，证明 $A-E$ 和 $B-E$ 均可逆且 $AB=BA$.

$E=AB-A-B+E$ $=(A-E)(B-E)$ $|E|=|A-E||B-E|=1$

$\therefore |A-E| \neq 0$ 且 $|B-E| \neq 0$ $\therefore A-E$ 和 $B-E$ 均可逆

$(A-E)^{-1}=B-E$ $(A-E)^{-1}(A-E)=(B-E)(A-E)=E$ $BA-B-A+E=AB-A-B+E$ $\therefore AB=BA$

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

(51) 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$，

$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则有

(A) $AP_1P_2=B$；　(B) $AP_2P_1=B$；　(C) $P_1P_2A=B$；　(D) $P_2P_1A=B$.

答：[C]

(52) 设 A、B 都是 3 阶方阵，对 A 作 r_1-2r_3 得 A_1，对 B 作 C_2+C_1 得 B_1，已知

$A_1B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，求 AB. $=E[1\ 3(2)]A_1B_1E[1\ 2(-1)]=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(53) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，对于线性方程组 $Ax=b$，记它的增广矩阵为 B，下列结论正确的是

(A) 若 $R(A)<m$，则方程组有无穷多解；

(B) 若 $R(A)<n$，则方程组有无穷多解；

(C) 若 $R(A)=R(B)<m$，则方程组有无穷多解；

(D) 若 $R(A)=R(B)<n$，则方程组有无穷多解.　P116 课本　答:[ ] D

(54) 要使 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解，只要系数矩阵 A 为

(A) $(-2\ \ 1\ \ 1)$；　(B) $\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$；　(D) $\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$　答:[A]

(55) 若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\x_2+x_3=a_2\\x_3+x_4=-a_3\\x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

$x_1+x_2+x_3+x_4=-a_1-a_3$

$x_1+x_2+x_3+x_4=a_2+a_4$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1&-a_1-a_3\\1&1&1&1&a_2+a_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&-a_1\\0&0&0&0&a_2+\end{pmatrix}$

(56) 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 $R(A)=n-1$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 $c\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0$　$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}$　$x_1=1\ x_2=1\ \cdots x_n=1$　$c\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

(57) 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式.

$\lambda=1$ 有解　$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+($

(58) K 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+Kx_3=4\\-x_1+Kx_2+x_3=K^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解？在有解情况下，求出其全部解.

(1) $k=-1$ 无解

(2) $k=4$ 无穷多组解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$

(3) $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 有唯一解　$x_1=\dfrac{k^2+2k}{k+1}$　$x_2=\dfrac{k^2+2}{k+1}$　$x_3=\dfrac{-2k}{k+1}$

$\begin{pmatrix}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&2&k-2&8\\0&0&\frac{(1+k)(4-k)}{2}&k(k-4)\end{pmatrix}$

(59) 设 $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=1\\x_2+ax_3-ax_4=-1\\x_1+2x_2+3x_4=3\end{cases}$，问 a 取何值时方程组有解？并求出此时的通解.

$a\neq2$　$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{7a-10}{a-2}\\\frac{2-2a}{a-2}\\\frac{1}{a-2}\\0\end{pmatrix}$

(60) 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2\end{cases}$，

$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&-1&-2&-2&-6&b-3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix}$　$a=1$　$b=3$

(i) a,b 为何值时，方程组有解？(ii) 方程组有解时，求出方程组的导出组的一个基础解系. (iii) 方程组有解时，求出它的全部解.

(i) $a=1,b=3$

(ii) $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$　$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$　$\xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

(61) 问 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$ ，有唯一解、无解、有无穷多组解？并求出有无穷多组解时的通解.

$a \neq 1$ $\quad$ $a=1,\ b\neq -1$ $\quad$ $a=1,\ b=-1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(62) 已知三阶矩阵 $B \neq 0$，且 B 的每一个列向量都是以下方程组的解 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $\quad 1-\lambda=0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1=0,\ -x_2+x_3=0,\ x_2=x_3$

(i) 求 λ 的值；(ii) 证明：$|B| = 0$.

$\lambda = 1$ $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ $\quad |B|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$ 两行相同

(63) 设四元方程组(1)为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，又已知某线性齐次方程组(2)的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T$.

(i) 求方程组(1)的基础解系，(ii) 问方程组(1)和(2)是否有非零公共解？若有，求出所有的非零公共解；若没有，则说明理由.

(i) $(0,0,1,0)^T$ $(-1,1,0,1)^T$

把(2)通解代入(1)得 $k_1=-k_2$

$k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T = k_2(-1,1,1,1)^T$

(1)(2)非零公共解为 $k_2(-1,1,1,1)^T$

(64) 设线性方程组为 $\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^1x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3 \end{cases}$，$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod (a_j - a_i)$ 4阶范德蒙

若 $a_j \neq a_i$ 则 $|B| \neq 0$ 得 $R(B)=4$ $\quad R(A)=3$ 故方程组无解

(i) 证明：若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两互不相等，则此线性方程组无解；

(ii) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k(k \neq 0)$，且已知 β_1,β_2 是该方程组的两个解，其中 $\beta_1 = (-1,1,1)^T, \beta_2 = (1,1,-1)^T$，写出此方程组的通解.

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad c$ 为任意常数

$R(A)=R(B)=2<3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & k & 0 & k^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ A有 3-2 个向量组成基础解系

$x_1 + k^2x_3 = 0$ $\quad$ $kx_2 = k^3$ $\quad$ 把 β_1,β_2 代入 得 $k^2=1$

对应齐次方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 + x_3 = 0 \quad x_1=-x_3$ $\quad kx_2=0 \quad x_2=0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

第四章　向量组的线性相关性

$(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

(65) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分条件是

$\exists\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

(A) A 的列向量线性无关；(B) A 的列向量线性相关；

答：[A]

(C) A 的行向量线性无关；(D) A 的行向量线性相关.

(66) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分条件是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均不为零向量；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意两个向量的分量不成比例；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意一个向量均不能由其余 $(n-1)$ 个向量线性表出；

$(D)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中有一部分向量线性无关. 答:[C]

(67) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量,那么下列结论正确的是

(A) 若 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0(k_i\in R)$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关;

(B) 若对任一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i\neq 0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关;

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则对任一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0$;

(D) 若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. 答:[B]

不用看,本来就是

(68) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是

$(A)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$; $(B)\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$;

答:[C]

$(C)\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$; $(D)\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

(69) 设 A 是四阶矩阵,且行列式 $|A|=0$,则 A 中

(A) 必有一列元素全为零; (B) 必有两列元素对应成比例;

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合;

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合. 答:[~~B~~] C

$$\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}\quad -2\quad 1\quad 0$$

(70) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,则向量组

$(A)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关; 相关

$(B)\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关; 相关

$(C)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关; ~~相关~~

$(D)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关. 相关 答:[~~A~~] C

(71) 设有向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,10)$,则该向量组的极大线性无关组是

$(A)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; $(B)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;

答:[B]

$(C)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$; $(D)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$.

(72) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $R(A)=m<n,E_m$ 为 m 阶单位矩阵,下述结论中正确的是

$(A)A$ 的任意个列向量必线性无关; ×

$(B)A$ 的任意一个 m 阶子式不等于零; ×

(C) 若矩阵 B 满足 $BA=0$,则 $B=0$;

$(D)A$ 通过初等行变换,必可化为 $(E_m\quad 0)$ 的形式. × 答:[C]

(73) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,C 是 n 阶可逆矩阵,$R(A)=r,B=AC,R(B)=r_1$ 则有

C可化为初等变换为单位矩阵E

$(A)r>r_1$; $(B)r<r_1$; $(C)r=r_1$; $(D)r_1$ 与 r 的关系依 C 而定. 答:[C]

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad AC=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$$

(74) 已知 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，且满足 $PQ = 0$，则

(A) $t = 6$ 时，$R(P)$ 必为 1；　(B) $t = 6$ 时，$R(P)$ 必为 2；

(C) $t \neq 6$ 时，$R(P)$ 必为 1；　(D) $t \neq 6$ 时，$R(P)$ 必为 2.　　答：[C]

(75) 设 A 为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位阵，且 $A^2 = A$，则有　$A(E-A)=0$

(A) $R(A) = n$；　(B) $R(A) = 0$；

(C) $R(A) + R(E - A) = n$；　(D) $R(A) = R(E - A)$.　　答：[C]

(76) 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解，而 α_1, α_2 是对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，k_1, k_2 为任意常数，则方程组 $Ax = b$ 的通解（一般解）必是

(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{2}$；　(B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2}$；

(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{2}$；　(D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

答：[B]

(77) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $R(A) = m < n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，下述结论正确的是

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关；

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零；

(C) A 通过初等行变换，必可化为 $(E_m \ \ 0)$ 的形式；

(D) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 一定有无穷多解.　　答：[D]

(78) 设四阶方阵 A 的秩 $R(A) = 2$，则其伴随矩阵 A^* 的秩 $R(A^*) =$ __0__.

如：$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(79) 设 $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0, (i = 1,2,3,\cdots,n)$，则矩阵 A 的秩

$= a_1a_2\cdots a_n \cdot b_1b_2\cdots b_n \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$R(A) =$ __1__.

(80) 已知向量组 $\alpha_1 = (1,2,3,4)$，$\alpha_2 = (2,3,4,5)$，$\alpha_3 = (3,4,5,6)$，$\alpha_4 = (4,5,6,7)$，则该向量组的秩为 __2__.

(81) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $l\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, m\alpha_3 + \alpha_1$ 都线性无关，则常数 l, m 必满足关系式 __$l \cdot m \neq -1$__

$k_1(l\alpha_1+\alpha_2) + k_2(\alpha_2+\alpha_3) + k_3(m\alpha_3+\alpha_1) = 0$

$= (k_1 l + k_3)\alpha_1 + (k_1+k_2)\alpha_2 + (k_2 + mk_3)\alpha_3 = 0$

(82) 已知 $R(A) = \gamma_1$，$R(B) = \gamma_2$，对于矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则有 $R(C) =$ __$\gamma_1 + \gamma_2$__

(83) 设四阶方阵 A 有 $R(A) = 3$，则对于其伴随矩阵 A^* 有 $R(A^*) =$ __1__.

(84) 已知向量组（Ⅰ）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$；（Ⅱ）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$；（Ⅲ）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$，如果各向量组的秩分别为

无关　　相关　　无关

$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_4\alpha_4 = 0$

$\alpha_4 = -\frac{1}{\lambda_4}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3)$

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_5+\frac{k_4}{\lambda_4}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)=0$

$k_1+\frac{k_4}{\lambda_4}\lambda_1=0$ $k_2+\frac{k_4}{\lambda_4}\lambda_2=0$ $k_3+\frac{k_4}{\lambda_4}\lambda_3=0$ $k_4=0$ $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关

$R(\text{I})=R(\text{II})=3, R(\text{III})=4$. 证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

(85) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 若 $k_1=0$ 则 $\alpha_2\ \alpha_3$ 线性相关 则 $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 线性相关 矛盾 $\therefore k_1\neq 0$ $\therefore \alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\cdots=l_1\alpha_2\cdots$

(i) α_1 能否由 α_2,α_3 线性表出？证明你的结论. 能

(ii) α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？证明你的结论. 不能

若 $\alpha_4=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3=(c_1l_1+c_2)\alpha_2+(c_1l_2+c_3)\alpha_3$
$=c_1(l_1\alpha_2+l_2\alpha_3)+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 线性相关

(86) 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，E 为 n 阶单位矩阵，若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关.

$\because B$ 是 $m\times n$ 矩阵 $\therefore R(B)\leq n$ 又 $R(B)\geqslant R(AB)=R(E_n)=n$ $\therefore R(B)=n$ $\therefore B$ 列向量线性无关

(87) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}(m\geqslant 1)$ 线性无关，试判别向量组 $\beta_1=\alpha_1+\lambda_1\alpha_{m+1},\beta_2=\alpha_2+\lambda_2\alpha_{m+1},\cdots,\beta_m=\alpha_m+\lambda_m\alpha_{m+1}$ 的线性相关性，其中 λ_i 为常数 $(i=1,2,\cdots,m)$. 线性无关

(88) 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 的秩相同，且 A 可以由 B 线性表示，证明：A 与 B 等价.

设 $R(A)=R(B)=r$，$r\leq\min\{m,l\}$ 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 则 $C_i:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\beta_i$
由题设 C_i 可由 B 线性表示 $R(C_i)\leq R(B)=r$
又 C_i 有 $r+1$ 个向量 $\therefore \alpha_1\cdots\alpha_r,\beta_i$ 线性相关，β_i 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 线性表示 $(i=1,2,\cdots l)\Rightarrow B$ 可由 A 线性表示 即 B 与 A 等价

(89) 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，且可由向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示，证明：A 与 B 等价.

$m=R(A)\leq R(B)$ 又 $R(B)\leq m$ $\therefore R(B)=m$
$\therefore R(A)=R(B)=m$ 且 A 可以由 B 线性表示 根据 (88) 题结论 A 与 B 等价

(90) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，证明行列式 $|AB|=0$.

$R(AB)\leq\min(R(A),R(B))\leq n<m$ AB 为 m 阶 $\therefore |AB|=0$

(91) 设 A 为 n 阶方阵，且 $R(A)=n$，A^* 为 A 的伴随矩阵

证明：$R(A^*)=n$.

$|A|\neq 0$ $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$ $\therefore R(A^*)=n$
$AA^*=|A|E$ $|AA^*|=|A|^n=|A||A^*|$ $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

(92) 设 A、B 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，证明：$R(A)<n$ 和 $R(B)<n$.

(反证法) 假设 $R(A)=n\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow A^{-1}$ 存在 $AB=0\Rightarrow A^{-1}AB=B=0$ 矛盾 ($\because B$ 为非零) $\therefore R(A)<n$ 同理 $R(B)<n$

(93) 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$，证明：$R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n$.

$\begin{pmatrix} A & 0\\ -E_n & B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix} A & AB\\ -E_n & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 0 & AB\\ -E_n & 0\end{pmatrix}$ $R\begin{pmatrix} A & 0\\ -E_n & B\end{pmatrix}=n+R(AB)$ 又 $R\begin{pmatrix} A & 0\\ -E_n & B\end{pmatrix}\geqslant R\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=R(A)+R(B)$ $n+R(AB)\geqslant R(A)+R(B)$

(94) 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩 $R(A)=r$，从 A 组中任取 m 个向量得向量组 $B:\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{im}$，证明：$R(B)\geqslant r+m-s$.

$1\leq m\leq s$
当 $m\leq s-r\Rightarrow m+r-s\leq 0$ 又 $R(B)\geq 0\Rightarrow R(B)\geqslant r+m-s$
当 $m>s-r\Rightarrow B$ 中至少有 $m-(s-r)$ 个向量线性无关 $\Rightarrow R(B)\geqslant m+r-s$

(95) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

$A\alpha_1=0$ $A\alpha_2=0$ $A\alpha_3=0$

证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

$A(\alpha_1+\alpha_2)=0$ $A(\alpha_2+\alpha_3)=0$ $A(\alpha_3+\alpha_1)=0$ $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是解

设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$
$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3$
$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\therefore \begin{cases}k_1+k_3=0\\ k_2+k_3=0\\ k_2+k_1=0\end{cases}$ $\Rightarrow k_1=k_2=\cdots$ $\therefore \alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关 $\therefore$ 是基础解系

(96) 已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\beta=(1,1,b+3,5)$

$\alpha x=\beta$ $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$

求：(i) a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合？

$a=-1$ $b\neq 0$ $R(A)=2$ $R(B)=3$ 无解 不能表示

(ii) a,b 为何值时，β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一的线性表示式？并写出此式.

$a\neq -1$ 有唯一解

$$\beta=\frac{-2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\cdot\alpha_4$$

第五章 相似矩阵与二次型

$|A||A|=1$ $|A^2|=|E|$

(97) 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=E$，则有

(A) $|A|=1$； (B) A 的特征值都是 1；

(C) $R(A)=n$； (D) A 一定是对称矩阵. 答：[C]

$|A|\neq 0$

(98) 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A| \neq 0$，而 B 也为 n 阶方阵，下列命题正确的是

A可逆

(A) 若 $AB = 0$，则 $B = 0$； (B) 若 $AB = BA$，则 $|B| \neq 0$；

$\therefore A^{-1}AB = 0 \Rightarrow B = 0$

(C) 若 $|B| = |A|$，则 A, B 有相同的特征值； × $|B| = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

(D) 对任给的非零向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都有 $xAx^T > 0$. 答：[A]

(99) 若 n 阶方阵 A 与某对角阵 Λ 相似，则

(A) $R(A) = n$； (B) A 有 n 个不同的特征值；

(C) A 一定为对称阵； (D) A 有 n 个线性无关的特征向量.

答：[D]

(100) n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的

(A) 充分必要条件； (B) 充分而非必要条件；

(C) 必要而非充分条件； (D) 既非充分也非必要条件.

答：[B]

$\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A) = \frac{1}{\frac{1}{3}A^2}$ 的特征值

(101) 设 $\lambda = 2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$； (B) $\frac{3}{4}$； (C) $\frac{1}{2}$； (D) $\frac{1}{4}$. $\left(\frac{1}{3}\cdot 2^2\right)^{-1} = \frac{3}{4}$ 答：[B]

(102) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是 4.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (4-\lambda)(-\lambda^3) = 0$

$\lambda = 4$

(103) 若 n 阶可逆矩阵 A 的每行元素之和均为 $a(a \neq 0)$，则 $2A^{-1} + E$（E 为 n 阶单位矩阵）的特征值必有 $\frac{2}{a}+1$.

(104) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) 求 x 与 y；(ii) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P.

$x=0$ $y=1$

(105) 设 λ_1, λ_2 为 n 阶矩阵 A 的特征值，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，而 x_1, x_2 分别为对应的特征向量，试证明 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

反证法 证：若 x_1+x_2 为A特征向量，它对应特征值为 u

$A(x_1+x_2) = u(x_1+x_2)$ 相减 $(u-\lambda_1)x_1 + (u-\lambda_2)x_2 = 0$

又 $A(x_1+x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ x_1, x_2 线性无关 $u=\lambda_1=\lambda_2$ 与已知矛盾 $\therefore x_1+x_2$ 不是A特征向量.

(106) 设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，证明：(i) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值；(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

证：(i) $\lambda \neq 0$，存在非零向量 ξ 使 $A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \xi = \lambda A^{-1}\xi$ 即 $A^{-1}\xi = \frac{1}{\lambda}\xi$ $\therefore \frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 特征值.

(ii) $\because A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 代入(i) $\frac{1}{|A|}A^*\xi = \frac{1}{\lambda}\xi$ 则 $A^*\xi = \frac{|A|}{\lambda}\xi$ $\therefore \frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值.

(107) 设 n 阶方阵 A 满足条件 $A^2 = E$（E 为 n 阶单位矩阵），证明 A 的特征值只能取 ± 1.

λ_i 为A特征值 $A = A^{-1}$ ξ_i 为对应特征向量 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i = A\xi_i = A^{-1}\xi_i = \frac{1}{\lambda_i}\xi_i$ $\lambda_i = \frac{1}{\lambda_i}$ $\therefore \lambda_i = \pm 1$ $(i=1,2\cdots n)$

(108) 设 n 阶方阵 A 满足条件 $A^TA = E$，其中 A^T 是 A 的转置矩阵，E 为单位阵. 证明 A 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

证：设 x 为A的实特征向量 对应特征值为 λ

$Ax = \lambda x$ $x^TA^T = \lambda x^T$ $x^TA^TAx = \lambda^2 x^Tx$ $x^Tx = \lambda^2 x^Tx$

$(1-\lambda^2)x^Tx = 0$ $x^Tx \neq 0$

(109) 设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$，对应的特征向量依次为 $\therefore 1-\lambda^2 = 0$

$\therefore |\lambda| = 1$

$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \beta$

$\xi_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$，又向量 $\beta = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

$A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1$，λ^n 是 A^n 的特征值，$A^n \xi_1 = \lambda_1^n \xi_1$，$A^n \xi_2 = \lambda_2^n \xi_2$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ $x_1+x_2=0$，$x_1=-x_2=2$，$x_2=-2$，$x_3=1$

(i) 将 β 用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表出；(ii) 求 $A^n\beta$. $(n \in Z^+)$

$\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$

$A^n\beta = A^n(2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) = 2\lambda_1^n\xi_1 - 2\lambda_2^n\xi_2 + \lambda_3^n\xi_3 = \begin{pmatrix}2-2^{n+1}+\\2-2^{n+2}+\\2-2^{n+3}+\end{pmatrix}$

(110) 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i (i = 1,2,3)$，其中列向量 $\alpha_1 = (1,2,2)^T, \alpha_2 = (2,-2,1)^T, \alpha_3 = (-2,-1,2)^T$，试求矩阵 A.

$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$ $\Lambda = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

(111) 设 A 为 n 阶方阵，$2,4,6,\cdots,2n$ 是 A 的 n 个特征值，E 是 n 阶单位阵. 计算行列式 $|A - 3E|$ 的值.

$|A-3E| = |P^{-1}(A-3E)P| = |P^{-1}AP - 3E|$，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&\ddots\end{pmatrix}$

$|A-3E| = \begin{vmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&2n-3\end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3) = -(2n-3)!!$

(112) 设 $A = \begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，试 x 和 y 应满足的条件.

$x+y=0$

(113) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$，对应于 λ_1 的特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求 A.

P为正交矩阵　与 ξ_1 正交的两个向量为 $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&-1\\2&0&0\end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

(114) 求一个正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准形.

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3\sqrt2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{3\sqrt2} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{3\sqrt2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$f = 9y_3^2$

(115) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$ 通过正交变换化成标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$. 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

$a=2$　$Q = \begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

(116) 设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 2\beta x_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $x = py$ 化成 $f = y_2^2 + 2y_3^2$，其中 $x = (x_1,x_2,x_3)^T, y = (y_1,y_2,y_3)^T$ 是三维列向量，p 是三阶正交矩阵，试求常数 α 和 β.

$\alpha = 0$　$\beta = 0$

$\lambda_1=0$　$\lambda_2=1$　$\lambda_3=2$

$\begin{vmatrix}1-\lambda & \alpha & 1\\ \alpha & 1-\lambda & \beta\\ 1 & \beta & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 2\alpha\beta - (1-\lambda)(1+\alpha^2+\beta^2) = 0$

$\begin{cases}1+2\alpha\beta-1-\alpha^2-\beta^2=0\\ 2\alpha\beta=0\\ -1+2\alpha\beta+1+\alpha^2+\beta^2=0\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$

(117) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

(i) 写出 f 的矩阵表达式. $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

(ii) 用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$f = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$

(118) 判别二次型：$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 是否正定？ 是正定

(119) 设 A 是 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位阵. 证明：行列式 $|A + E| > 1$.

证：存在正交矩阵 P　$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$　$\lambda_i > 0 (i=1\cdots n)$　$P^{-1}(A+E)P = P^{-1}AP + P^{-1}EP = \begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix} + E = \begin{pmatrix}\lambda_1+1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n+1\end{pmatrix}$

$|A+E| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1) > 1$

(120) 设 A,B 分别为 m 及 n 阶正定矩阵，试判别分块矩阵 $C = \begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 是否为正定矩阵. 是正定矩阵

设 $(m+n)$ 维向量 $z^T = (x^T, y^T)$　$x^T = (x_1,\cdots,x_m)$　$y^T = (y_1,\cdots,y_n)$

设 $z \neq 0$ 则 x,y 中至少有一个不为零，不妨设 $x \neq 0$　$\therefore z^TCz = (x^T, y^T)\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^TAx + y^TBy > 0$　$\therefore C$ 为正定矩阵

(121) 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}} x_ix_j$，($a,b$ 为常数)

试证：f 为正定二次型的充分必要条件为 a,b 满足关系式 $\begin{cases}a > 0\\ -\dfrac{a}{n-1} < b < a\end{cases}$

f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix}a&b&b&\cdots\\b&a&b&\cdots\\b&b&a&\cdots\\&&&a\end{pmatrix}$　$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}a-\lambda & b & \cdots & b\\ b & a-\lambda & \cdots & b\\ \vdots&&&\vdots\\ &&&a-\lambda\end{vmatrix} = [a+(n-1)b-\lambda](a-b-\lambda)^{n-1}$

A 的特征值 $\lambda_1 = a+(n-1)b$　$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = a-b$　$\begin{cases}\lambda_1 = a+(n-1)b > 0\\ \lambda_i = a-b > 0 \quad (i=2,3,\cdots)\end{cases}$

$a > -\frac{a}{\cdots}$　$\begin{cases}\frac{-a}{n-1} < b < a\end{cases}$　$\begin{cases}a>0\\ \cdots\end{cases}$

线性代数试卷(Ⅰ)

一、填空题($7' \times 4$)

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{(a^2+b^2)^2}$

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，那么 $A^2 = \underline{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}}$

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$

(3) 设 $\alpha_1=(1,0,-1)$，$\alpha_2=(1,-1,0)$，$\alpha_3=(0,1,1)$，$\beta=(0,2,0)$，那么 β 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的表达式为 $\beta = \underline{\alpha_1-\alpha_2}+\alpha_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_1+x_3=2$, $-x_2+x_3=2$, $x_3=1$ $\quad x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$

(4) 设 A 为对称阵，$\mathbf{x}$ 为列向量，且 $A\mathbf{x}=\sqrt{2}\,\mathbf{x}$，$\mathbf{x}^T\mathbf{x}=3$，那 $\mathbf{x}^TA^2\mathbf{x}= \underline{6}$.

$A^T=A$ $\quad (A-\sqrt{2}E)x=0$, $A=\sqrt{2}E$ $\quad A^2=2E$ $\quad x^T \cdot 2 \cdot x = 2x^Tx = 6$

二、($12'$) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 及 A^TA.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 12 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

三、($12'$) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，利用初等行变换求 $R(A)$，并求列向量组的一个最大线性无关组.

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad R(A)=3$

$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是一个最大线性无关组

四、($13'$) 当 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = \lambda \\ x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$ 有解？并求其通解.

$\lambda=0$ 时有解，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (k_1,k_2为任意常数)

五、($13'$) 求二次型 $f = x_2^2 + 2x_1x_3$ 的矩阵 A 的特征值，并写出 f 的标准形.

$\lambda_1=\lambda_2=1$ $\quad \lambda_3=-1$ $\quad f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

六、($14'$) 设向量组 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$，问 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 是否线性无关？如果线性无关，把 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 正交规范化.

$|(a_1\ a_2\ a_3)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ $\quad \therefore a_1,a_2,a_3$ 线性无关

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

七、($8'$) 设 λ 为可逆方阵 A 的特征值，证明：(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A 的逆阵 A^{-1} 的特征值；(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随阵 A^* 的特征值.

证：(1) $A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \xi = \lambda A^{-1}\xi \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\xi = A^{-1}\xi$

(2) $\because A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\xi = \frac{1}{|A|}A^*\xi \Rightarrow \frac{|A|}{\lambda}\xi = A^*\xi$