Modern Analysis Methods in Nonlinear Partial Differential Equations

非线性偏微分方程近代分析方法

郑连存　张欣欣　著

科学出版社

非线性偏微分方程近代分析方法

郑连存　张欣欣　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从数学方法论角度出发，综合数学、物理、化学、流体力学、传热传质学等领域的知识及进展，系统介绍求解非线性偏微分方程的近代方法和技巧. 内容包括 Padé 逼近理论、嵌入参数摄动展开法、Adomian 拆分方法、同伦分析方法、变分迭代法、改进的微分变换法(DTM–Padé 和 DTM–BF)、分形介质动力学理论、分数阶微积分、分数阶微分方程的解法及一些非线性偏微分方程(组)数值方法等.

本书可作为应用数学、流体力学、能源、环境、动力、冶金、化工、水利、水电等行业的研究人员和工程技术人员的参考用书，也可用作理工科大学数学、物理、力学、科学工程等专业的研究生教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非线性偏微分方程近代分析方法/郑连存，张欣欣著. —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-035848-6

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①郑… ②张… Ⅲ. ①非线性偏微分方程–分析方法 Ⅳ. ① O175.29–34

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 251073 号

责任编辑：王丽平 李静科／责任校对：林青梅
责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2013 年 1 月第一次印刷 印张：15
字数：287 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

自然界的丰富多样性及物质运动形态的转化是人类认识自然与创新技术的基础. 对自然界物质运动的研究涵盖了不同的学科领域, 涉及流动、传热、传质、反应扩散等具体输运过程, 衍生出不同的非线性物理数学模型. 基础理论的研究及信息技术的进步推动了非线性科学的发展, 而非线性偏微分方程的具体求解常成为科学工作者很难回避的研究环节.

郑连存教授和张欣欣教授长期从事偏微分方程、流体力学、热能工程与工程热物理的教学与研究工作, 长期与国内外学者合作交流, 将多年积累的研究成果系统整合成本专著《非线性偏微分方程近代分析方法》. 全书主题突出, 以研究方法为主线, 求解实例相结合, 全面阐述了非线性偏微分方程的求解方法及其在不同物理问题中的应用, 填补了非线性偏微分方程近似和解析方法著作的空白.

全书共八章, 结构紧凑, 安排合理. 第 1 章简洁介绍了各种方法演变的背景及基础. 第 2 章至第 6 章系统地介绍了非线性偏微分方程的解析分析近似求解方法, 包括改进的摄动解析方法、Adomian 解析分析方法、同伦分析方法、变分迭代法和改进的微分变换法. 第 7 章专门介绍了分数阶偏微分方程理论和积分变换、H 函数和 G 函数的由来及解析方法. 第 8 章给出了包括多场耦合物理背景下的微分方程的数值方法. 全书以清晰的脉络全面阐述非线性偏微分方程分析方法, 为从事复杂流动、传热传质等研究的教学和科研工作者提供数理分析的参考.

中国科学院院士

2011 年 4 月于清华园

前　　言

现代科学研究和各种工程技术的一个显著特点是所涉及问题非线性程度增强和维数增加. 非线性偏微分方程 (组) 求解问题出现在大量自然科学研究和工程生产实际. 计算机科学技术的飞速发展为求解很多非线性问题提供了可能, 对某些偏微分方程定解问题, 可采用数值方法进行求解, 如有限差分法、有限元法、有限容积法、有限分析法和边界元法等. 数值方法给出的是求解域上离散点的函数值. 一般来讲不能够仅通过数值解来实现对非线性问题本质一个全面、透彻的理解, 特别是当非线性问题存在奇异性或存在分歧解或多解的情况, 数值求解会非常困难或不能够得到问题的全部解. 因此, 数值求解不能完全替代理论分析及解析求解, 只有基于理论指导的数值模拟, 才能克服计算中遇到的有关收敛性、稳定性、奇异性、解的分歧性 (解的分叉或多解) 等困难, 才能得到真正有价值的结果.

近年来, 在偏微分方程求解研究领域中, 提出了很多种行之有效的关于非线性 (偏) 微分方程 (组)、微积分方程 (组) 的解析分析方法和近似求解方法. 大量研究经验证明：解析分析方法不仅可用于局部分析, 有时亦可帮助了解全局行为. 解析分析方法还可给出实际问题的解析结构, 并能利用此解进行物理问题的定性和近似定量讨论.

作者及所在课题组十几年来一直致力于非线性偏微分方程近代分析方法研究工作, 从数学方法论角度出发, 采用多学科交叉的研究方法, 在广泛综合数学、物理、化学、流体力学、传热学等领域的知识和进展的基础上, 从理论分析、数学模化和数值模拟等多方面对常规与非常规边界条件下的各种复杂流动、传热传质及反应扩散问题的解析求解、解的性态及相应的传递行为进行了深入系统的研究, 发表了很多高水平的学术论文. 本书大部分内容取自作者和所指导的博士、硕士发表的论文和研究成果. 内容包括微分方程相似变换理论、函数分析理论、积分方程理论、打靶法、新型摄动分析方法 (嵌入参数摄动展开分析方法)、同伦分析方法、Adomian 分解和 Padé 逼近方法、变分迭代法和改进的微分变换法 (DTM-Padé 方法和 DTM-BF 方法)、分形介质动力学理论、分数阶微积分、粘弹性流体分数阶微分方程的解法及一些非线性偏微分方程 (组) 数值方法等. 作者希望本书能为广大读者提供实用的求解各种非线性偏微分方程的解析分析方法, 并为解决实际工程问题提供理论依据和方法论.

作者感谢国家自然科学基金委员会 (国家自然科学基金项目 No.50476083, No.51076012)、科学出版社和北京科技大学研究生院对本书出版提供的支持和帮

助!

本书写作过程中, 得到了中国科学院院士王补宣教授的热情帮助, 王先生审阅了全部书稿, 提出了许多宝贵意见, 并为本书撰写了序, 在此作者对王先生表示最诚挚的谢意.

由于作者水平所限, 本书难免存在缺点和不足之处, 诚请广大读者及时给予指正.

郑连存　张欣欣

2011 年 4 月于北京

目　　录

第1章　绪　　论

现实世界中的大多数自然现象和工程技术问题究其本质绝大多数问题是非线性的, 可用非线性方程来描述. 非线性方程的求解和解的性质的研究比线性方程要困难得多, 线性方程的一些基本性质, 如叠加原理, 在非线性方程中已不再成立. 对于非线性方程来说, 即使知道了它的一批特解, 也不能期望将它们叠加到一起得而到一般解或通解.

随着计算机科学与技术的迅速发展, 有限等分法、边界元法、有限元法、有限容积法等数值方法得到了广泛应用, 求解了很多具有复杂计算域的非线性问题, 成为解决力学问题和各种工程问题的有力工具. 但是数值方法本身仍有其局限性, 对于非线性问题有奇异性或者存在多解的情况, 数值求解通常很难实现, 或者很难通过数值结果对非线性问题有全面的、本质的理解. 因此, 研究非线性方程的解析分析方法是非常必要的. 鉴于非线性方程的精确解析解求解的困难, 人们将工作目标集中于研究如何寻求非线性方程的近似解析解.

1.1　非线性微分方程 (组) 解析分析方法思想基础

1.1.1　解析分析方法思想

近年来, 非线性偏微分方程 (组)、积分方程 (组) 求解研究领域中, 提出了很多种行之有效的解析分析方法. 非线性方程的近似解析求解, 本质上即是采用合适的基函数来逼近其精确解. 目前, 较为常用的分析方法有：摄动方法、Adomian 拆分法、同伦分析方法、变分迭代方法及微分变换方法等. 大量研究经验证明：解析分析方法不仅可用于局部分析, 有时亦可用于了解全局行为, 而且解析分析方法还可给出正确解的解析结构, 并能采用此解进行物理问题的定性和近似定量讨论[1~4].

为了更好地理解本书内容实质, 在这里首先回忆 Taylor 级数和 Fourier 级数的概念. 高等数学中用 Taylor 级数和 Fourier 级数来表示某个函数 (将某个函数按照特定级数展开) 是人们探索非线性偏微分 (积分) 方程 (组) 的解析分析求解和数值逼近方法的思想基础.

1) Taylor 级数

若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内具有直到 $n+1$ 阶的导数, 则在该邻

域内 $f(x)$ 有 Taylor 公式,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{1.1.1}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项, ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某个值.

这时在该邻域 $U(x_0)$ 内, $f(x)$ 可以用 n 次多项式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{1.1.2}$$

近似表示, 误差的绝对值为 $|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|$. 如果 $|R_n(x)|$ 随着 n 的增大而减小, 就可以通过增加多项式 (1.1.2) 的项数来提高 $P_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的程度. 若 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有任意阶导数, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 则这时多项式 (1.1.1) 的项数可以趋向无穷而成为幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots. \tag{1.1.3}$$

幂级数 (1.1.3) 称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 级数.

2) Fourier 级数

设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数, 如果它满足:

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 能够展开成 Fourier 级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{k\pi}{l}x+b_n\sin\frac{k\pi}{l}x\right). \tag{1.1.4}$$

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$; 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]. \tag{1.1.5}$$

系数 $a_0, a_1, b_1, \cdots$ 与函数 $f(x)$ 之间存在着关系

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,3,\cdots). \end{cases} \tag{1.1.6}$$

根据上式所确定出的系数 $a_0, a_1, b_1, \cdots$ 称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 由 Fourier 系数确定的三角级数称为 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

可以看出, Taylor 级数和 Fourier 级数展开的本质是选择一组基函数

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots, \tag{1.1.7}$$

将函数 $f(x)$ 在这组基函数下表示成

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots, \tag{1.1.8}$$

其系数由所选定的基函数和给定的函数 $f(x)$ 本身唯一确定.

当选定基函数为 $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 时得到 Taylor 级数;

当选定基函数为 $1, \cos\frac{x}{l}, \sin\frac{x}{l}, \cos\frac{2x}{l}, \sin\frac{2x}{l}, \cdots$ 时得到 Fourier 级数.

显然, 当选定不同基函数组时, 就可以得到不同的近似级数表达式.

在所有关于非线性偏微分方程解析分析研究方法中, 探索处理非线性问题新的解析分析逼近方法的本质都是基于如下思想:

在连续函数空间 $C[a,b]$ 中选择适当的线性无关的基函数集合 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$, 将未知函数 $\varphi(x) \in \mathbf{\Phi} = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\} \subset C[a,b]$ 表示为基函数的组合

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \cdots,$$

使得能够用尽可能少的项、尽可能快的收敛速度来近似表示所求非线性偏微分方程的未知函数解.

1.1.2 Padé 逼近

Padé 逼近解析近似方法, 是在对 Taylor 级数问题进行研究的过程中而建立的[5~8]. 一个函数的 Taylor 级数展开式的系数和这个函数的值之间的关系, 既是一个深奥的数学问题, 又是一个重要的实际问题. 关于它的研究, 是建立在数学分析和物理、生物科学中的数学模型实际计算的基础之上的[9~12]. 规范的解释是: 如果 Taylor 级数展开式绝对收敛, 那么它唯一确定了一个任意次可微的函数; 反过来, 如果一个函数是任意次可微的, 那么它也只有一个对应的 Taylor 级数展开式. 实际上, 可以把函数近似为一个尽可能长的多项式, 但是这种方法在实际运算中有一些局限性[12].

考虑以下例子

$$f(x) = \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{16}x^3 - \frac{141}{128}x^4 + \cdots. \tag{1.1.9}$$

容易看出, 当 $x > 0.5$ 时, Taylor 级数表达式不收敛, 尽管在 $0 \leqslant x < +\infty$ 时, $f(x)$ 是一个值保持在 1 至 $\sqrt{2}$ 的光滑函数. 规范方法是: 在一个新点 $x_0(0 < x_0 < 0.5)$, 应用原来的表达式计算 $f(x)$, 作出一个新的 Taylor 级数表达式, 这个新的表达式可以满足当 x 很大时的情况 (不包括 $x = \infty$ 处). 实际上, 用这种方法永远不能达到 $x = \infty$, 并且在这个方向上的任何进展都是非常冗长的. 对于以上这个例子, 可以应用一个特殊的技巧, 将级数转变为一个较长的多项式.

假设做一个变量代换: $x = w/(1-2w)$ 或 $w = x/(1+2x)$, 则有

$$f(x(w)) = (1-w)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}w + \frac{3}{8}w^2 + \frac{5}{16}w^3 + \frac{35}{128}w^4 + \cdots. \tag{1.1.10}$$

在这个变量代换下, $x = \infty$ 就变为 $w = 0.5$. 很容易看出, Taylor 级数表达式 $f(x(w))$ 收敛于 $w = 0.5$, 即 $x = \infty$. 于是 $f(\infty)$ 的最初连续估计值是

$$1, 1.125, 1.34375, 1.38281, 1.39990, \cdots,$$

它收敛于 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$. 根据最初的变量 x, 函数 $f(x(w))$ 可以表示为

$$1, \frac{1+(5/2)x}{1+2x}, \frac{1+(9/2)x+(43/8)x^2}{(1+2x)^2}, \cdots,$$

它们均是关于 x 的有理分式.

Padé 逼近是一种关于函数值的特殊类型的有理分式逼近法. 它的思想是以尽量快的速度与 Taylor 级数展开式相匹配[11~12]. 对于上例, 选择一个逼近模式

$$\frac{a+bx}{c+dx}, \tag{1.1.11}$$

可见当 x 趋向于无穷时, 上式是有界的. 如果应用 $f(x)$ 的前三项系数做逼近, 就可以得到以下的表达式

$$\frac{1+(7/4)x}{1+(5/4)x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{25}{32}x^3 - \frac{125}{128}x^4 + \cdots.$$

对于此式, 当 $x = \infty$ 时, 它的值是 1.4, 这个结果比之前的任意一个结果都要理想. 同理可算出下一个逼近结果是

$$\frac{1+(13/4)x+(41/16)x^2}{1+(11/4)x+(29/16)x^2} \to \frac{41}{29} = 1.413793103,$$

这个结果与 $\sqrt{2} = 1.414213562$ 已经非常接近了. 继续以此方法做逼近, 随着所选系数数量的增加, 结果的收敛性更好, 结果如下:

$$1.414201183, 1.414213198, 1.414213552, \cdots,$$

其中最后一个结果应用了前 11 项系数, 且与标准结果只相差 10^{-8}.

可以用同样的方法对函数 $f(x(w))$ 做逼近, 即将 $x = w/(1-2w)$ 或者 $w = x/(1+2x)$ 代入以上所求结果, 有

$$1, \quad \frac{1-\frac{1}{4}w}{1-\frac{3}{4}w}, \quad \frac{1-\frac{3}{4}w+\frac{1}{16}w^2}{1-\frac{5}{4}w+\frac{5}{16}w^2},$$

以上三个结果分别是应用 $f(x(w))$ 的第一项、前三项、前五项得出的. 注意到, 当将 $w=0.5$(即对应于 $x=\infty$) 代入以上表达式中时, 得到结果 $1, 1.4, 41/29, \cdots$. 这些结果与计算关于 x 的级数展开式时所得到的结果对应一致. 这种同一性是 Padé 逼近的一个普遍而且重要的特性, 也正因为这种特性, 可以在例子中做出关于 x 的逼近, 甚至在 $x=\infty$ 处都可以得到很理想的结果.

可以看出, 以上的连续逼近值是单调的. 虽然这不是一个普遍的特性, 但是在多种情况下都可以证明它是成立的.

1.1.3 Padé 逼近定义

定义 将关于函数 $A(x)$ 的 Padé 逼近记为

$$[L/M] = P_L(x)/Q_M(x), \tag{1.1.12}$$

其中, $P_L(x)$ 是一个次数最高为 L 的多项式, $Q_M(x)$ 是一个次数最高为 M 的多项式.

由幂级数

$$A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \tag{1.1.13}$$

通过公式 (1.1.14) 可以确定多项式 $P_L(x)$ 和 $Q_M(x)$ 的系数,

$$A(x) - P_L(x)/Q_M(x) = O(x^{L+M+1}). \tag{1.1.14}$$

因为当分式的分子、分母同乘以一个非零常数时, 分式的值保持不变, 于是定义标准化条件为

$$Q_M(0) = 1.0. \tag{1.1.15}$$

这里需要注意, $P_L(x)$ 和 $Q_M(x)$ 必须是没有公因子的多项式.

如果将 $P_L(x)$ 和 $Q_M(x)$ 的系数表示如下:

$$\begin{aligned} P_L(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_L x^L, \\ Q_M(x) &= 1 + q_1 x + \cdots + q_M x^M, \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

由式 (1.1.16), 用 $Q_M(x)$ 去乘以 (1.1.14) 式, 可以将系数公式线性化, 详细表示如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & & & & & & & = p_0, \\ a_1 & + & a_0q_1 & & & & & = p_1, \\ a_2 & + & a_1q_1 & + & a_0q_2 & & & = p_2, \\ & & & & \vdots & & & \\ a_L & + & a_{L-1}q_1 & + & \cdots & + & a_0q_L & = p_L, \\ a_{L+1} & + & a_Lq_1 & + & \cdots & + & a_{L-M+1}q_M & = 0, \\ & & & & \vdots & & & \\ a_{L+M} & + & a_{L+M-1}q_1 & + & \cdots & + & a_Lq_M & = 0. \end{array} \tag{1.1.17}$$

同时要求:

$$\text{当 } n < 0 \text{ 时}, a_n \equiv 0; \quad \text{当 } j > M \text{ 时}, q_j \equiv 0. \tag{1.1.18}$$

1821 年, Cauchy 在他著名的文章*Cours d'Analyse* 中首次写出了 Padé 逼近的建立过程. 在这篇文章中, 他研究了 “递归级数”. 在这种级数中, 除了前几项, 其他项的系数满足线性递归关系. 此研究是建立在 Daniel Bernoulli 关于求多项式的最小根系数的研究基础之上的. Cauchy 同时给出了一个归纳 Lagrange 插值多项式的公式, 用它可以求出有理分式形式的函数在 n 个点处的函数值. 此公式起源于 Jacobi 在 1846 年的研究, 正是由这个公式得出了 Padé 逼近方法. 在现代科学中, Jacobi 是第一个给出 Padé 逼近方法的科学家. 随后, Frobenius 于 1881 年对 Padé 逼近的代数特性做了一次深入的研究, 并且给出了一个关于在多数情况下分子和分母的次数不相同的 Padé 逼近的恒等式. Padé 于 1892 年在一个半无穷排列或者表格中, 将此逼近做了重新排列, 并且研究了这个表格的结构, 同时也研究了关于 e^x 的逼近的特殊性质. 但是 Padé 并没有在他后来的文章中提到之前的这篇文献.

对 Padé 逼近所做出的定义, 与古典定义在很多方面都有不同. 首先, 是符号的不同. 古典定义中, 定义符号为

$$[M, L] = [L/M]. \tag{1.1.19}$$

但是, 不尽人意的是, 有些作者用的符号是

$$[L, M] = [L/M]. \tag{1.1.20}$$

采用式 (1.1.12) 的符号, 就是为了避免这种混淆. 依照惯例, 用 L 表示分子的次数, 用 M 表示分母的次数, 用下式

$$L + M = N, \quad L - M = J \tag{1.1.21}$$

表示分子分母次数的和与差. 在数学方面非常重要的一点是：在标准化条件方面，新定义与古典定义有很大的不同在于 (1.1.15). Frobenius(1881) 与 Padé (1892) 仅要求 $Q_M(x)$ 不恒等于零. 这种不同可以在如下例子中说明：

$$A(x) = 1 + x^2 + \cdots, \tag{1.1.22}$$

对于 $L = M = 1$, 很容易证明

$$P_1(x) = Q_1(x) = x, \quad P_1(x)/Q_1(x) = 1, \tag{1.1.23}$$

并且满足

$$Q_M(x)A(x) - P_L(x) = O(x^{N+1}), \tag{1.1.24}$$

而不是满足 (1.1.14) 式. 实际上, 从新的定义出发, 对于这个级数来说, [1/1] 是不存在的.

1) Padé 逼近唯一性定理

根据 Frobenius(1881) 与 Padé(1892) 所做出的定义, 可以得出以下定理：

定理(唯一性) 当幂级数的 Padé 逼近存在时, 它的 $[L/M]$Padé 逼近的解是唯一的.

证明 假设有两个 Padé 逼近解存在, 令其分别为 $X(x)/Y(x)$ 和 $U(x)/V(x)$, 其中 X 和 U 的次数小于或等于 L, Y 和 V 的次数小于或等于 M. 根据 (1.1.14) 式, 由于两个逼近求的是同一个问题, 所以有

$$X(x)/Y(x) - U(x)/V(x) = O(x^{L+M+1}). \tag{1.1.25}$$

再用 $Y(x)V(x)$ 乘以 (1.1.25) 式, 得

$$X(x)\cdot V(x) - U(x)\cdot Y(x) = O(x^{L+M+1}). \tag{1.1.26}$$

但是, 式 (1.1.26) 的左侧是一个次数最高为 $L+M$ 次的多项式, 所以两端都为零. 又因为 Y 和 V 都不为零, 所以有

$$X/Y = U/V. \tag{1.1.27}$$

因此, 根据定义, X 和 Y, U 和 V 都是互素的, 并且 $Y(0) = V(0) = 1.0$. 可以得出, 假设的两个 Padé 逼近实际上是相同的, 得证.

以上定理对于退化和非退化方程均成立. 如果方程是非退化的, 当 (1.1.18) 式成立时, 可直接求解