21世纪高等学校规划教材

DAXUE 大学文科数学
WENKE SHUXUE

● 主 编 宋际平 龙述君

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

大学文科数学

主　编　宋际平　龙述君

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是为高等院校文科类专业、其他非理工类专业编写的.全书共6章和7个数学文化专题.主要内容包括一元微积分、线性方程组、概率与统计的基本知识,并给出了在Mathematica条件下计算极限、导数、函数图形绘制、积分及矩阵和线性方程组计算的数学实验.数学文化专题内容简要介绍了数学包括中国数学发展的历史与现状、微积分的产生、数学与哲学、数学与艺术及几个经典数学问题.

本书内容丰富,层次清晰,文字流畅,叙述简明扼要,可作为高等院校文科类专业、其他非理工类专业教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/宋际平,龙述君主编.--北京:北京邮电大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-5635-2695-6

Ⅰ.①大… Ⅱ.①宋… ②龙… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第152624号

书　　名	大学文科数学
主　　编	宋际平　龙述君
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京联兴华印刷厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	15
字　　数	311千字
版　　次	2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2695-6　　定价:32.00元

前　言

数学不仅是一种重要的“工具”或“方法”，也是一种思维模式，即“数学方式的理性思维”；数学不仅是一些知识，也是一种素质，即“数学素质”；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即“数学文化”．作为现代科技的一门基础学科，数学对于当代科学乃至整个社会的影响和推动作用日益显著，它几乎已经渗透到包括自然科学、工程技术、经济管理以至人文社会科学的所有学科和应用领域中．可以说，如果没有数学，全部现代技术都是不可能的，离开或多或少复杂的计算，也许任何一点技术的改进都不能有，在新的技术领域的发展中数学起着十分重要的作用．总之，各门科学的“数学化”，是现代科学发展的一大趋势．随着科技、经济与社会的发展，即使是从事社会科学研究的专业人员，也需要具有良好的数学素质，掌握一定的数学知识，具备一定的数学实践能力．例如，一些诺贝尔经济学奖的获得者，其研究成果的取得，都是在经济模型、社会统计、金融分析中很好地运用了数学的结果．

文化，泛指人类物质财富和精神财富的积淀，它包括科学、教育、经济、文学、艺术、宗教、婚姻、风俗习惯等人类活动的诸多层面．人类千百年来的数学活动形成了一种独特的文化——数学文化，它以数学为背景，涉及数学的思想、精神、方法、观点、语言，以及它们的形成和发展；包括数学史、数学美、数学教育、数学与人文的交叉、数学与各种文化的关系．数学不只是关于数和形的世界或更广阔世界的科学，数学还是一门充满人文精神的科学，它是人类文化最深刻的部分之一．

本书是作为普通高等院校文科类专业、其他非理工类专业开设高等数学课程的教材编写的，其目的是培养学生基本的数学素养．它的内容有三部分，一是数学文化部分；二是数学知识部分，包括一元微积分、线性方程组、概率与统计的基本概念；三是数学实验．在编写过程中，我们力求突出以下特点．

1. 我们认为在文科类专业开设大学数学，其目的不是要求学生掌握那些繁难的计算与证明，而是通过本课程的学习，从中汲取对其终身有用的数学思想和数学思维方法．考虑到文科学生的特点，在内容选择上，我们不盲目追求内容的覆盖面，而只选择与中学数学直接衔接的一元微积分、线性方程组、概率与统计的基本知识．这一方面是考虑到各高校对该课程有限的教学时数，同时也不至于让学生产生与中学数学较大的距离感，降低学习的难度，提高学习兴趣．另外，在叙述上我们尽量切合文科生的思维习惯，突出直观理解，淡化理论，尽量避免使用那些难懂的“数学家才使用的”数学语言以及繁难的计算与证明．

2.数学实验是数学实践教学的重要内容,通过这种数学实验,一方面可以解决数学中大量烦琐的计算,为学生提供理论与实践相结合的良好空间,提高学生的学习兴趣,启发学生的创新意识,同时,为利用数学方法解决实际问题提供一种手段;另一方面可以让学生感受数学的直观.因此,在本书中我们安排了一些简单的数学实验引导学生利用所学数学知识解决实际问题.

3.我们认为,在教材中编入数学文化的内容,一方面可以提高本书的可读性,寓趣味性于枯燥性之中;另一方面,学生也可从中体会数学的思想和方法.但在本书中数学文化与数学实验的内容不以独立的内容体系编排到教材中,数学文化以专题形式每章附一个专题,每章根据本章内容单独一节作为实验.因此,本书在内容体系上不同于已出版的同类教材.

本书的教学时数是 48～64 学时,其中数学文化部分可视具体情况最多讲授 6 学时,数学实验不少于 4 学时.

由于编者水平有限,加之成稿时间较短,书中难免存在不足之处,恳请读者批评指正.

编　者

目　　录

数学文化专题之数学——一部恢弘的无限交响乐 …… 1

第 1 章　函数、极限与连续 …… 9

§1.1　初等函数 …… 9

§1.2　数列的极限 …… 20

§1.3　函数的极限 …… 24

§1.4　无穷小量与无穷大量 …… 27

§1.5　极限运算法则 …… 29

§1.6　两个重要极限与无穷小量的比较 …… 32

§1.7　函数的连续性 …… 36

§1.8　数学实验——极限计算 …… 42

数学文化专题之中国数学史话 …… 52

第 2 章　导数及其应用 …… 62

§2.1　导数的概念 …… 62

§2.2　函数的求导法则 …… 68

§2.3　函数的微分 …… 74

§2.4　中值定理与洛必达法则 …… 78

§2.5　函数单调性、凹凸性、极值、最值 …… 84

§2.6　导数在经济学中的应用 …… 89

§2.7　数学实验——导数的计算与图形的绘制 …… 91

数学文化专题之漫话微积分 …… 99

第 3 章　不定积分 …… 109

§3.1　不定积分的概念 …… 109

§ 3.2 换元积分法 …… 113
§ 3.3 分部积分法 …… 117
数学文化专题之数学与哲学 …… 120
第 4 章 定积分及其应用 …… 130
§ 4.1 定积分的概念与性质 …… 130
§ 4.2 定积分的基本公式 …… 135
§ 4.3 定积分的积分法 …… 139
§ 4.4 定积分在几何上的应用 …… 142
§ 4.5 数学实验——积分计算 …… 147
数学文化专题之数学与艺术 …… 149
第 5 章 线性方程组 …… 161
§ 5.1 二元线性方程组和三元线性方程组 …… 161
§ 5.2 由 n 个方程组成的 n 元线性方程组 …… 166
§ 5.3 由 m 个方程组成的 n 元线性方程组 …… 175
§ 5.4 数学实验——矩阵与线性方程组计算 …… 187
数学文化专题之经典数学问题探秘(一) …… 191
第 6 章 概率与统计的基本概念 …… 197
§ 6.1 随机事件及其概率 …… 197
§ 6.2 随机变量及其概率分布 …… 206
§ 6.3 统计的基本概念 …… 212
数学文化专题之经典数学问题探秘(二) …… 221
习题参考答案 …… 229

数学文化专题之

数学——一部恢弘的无限交响乐

一、吟唱千古的绝世乐章

数学，一个我们如此熟悉的名词，一个从小学、中学到大学我们都在学习的科学学科；数学，一个已深入现代社会生活方方面面的科学领域；数学，一部人类吟唱了千古的绝世交响乐，它那恢弘的、震撼人心的旋律似乎在昭示我们去接近它、掌握它、爱它！

是的，我们对数学似乎太了解了，但好像又不太了解. 因为，我们甚至根本说不清楚数学究竟是什么？数学家究竟是干什么的？

数学是什么？李大潜院士说过，数学是一种语言，数学是一个工具，数学是一个基础，数学是一门科学，数学是一门技术，数学是一种文化. 事实上，历史上许多数学家与哲学家都曾表达了他们对这一问题的看法，例如：

古希腊亚里士多德认为数学是对于量的研究.

德国数学家弗力克斯·克莱因认为数学是自明之物的科学.

法国数学家笛卡儿(R. Descartes，1596—1650) 称数学是“序和度量”的科学.

英国哲学家培根称数学为一种使人“机敏精细”的学问.

德国大卫·希尔伯特称数学为“无实在含义的形式游戏”.

英国哲学家贝特兰·罗素称数学为“恒同于逻辑”的学科，“数学这门科学是既不知道它说些什么，也不知道它所说的是否正确的一门学科”.

恩格斯曾说“数学乃是关于物质世界的空间形式及其数量关系的科学”.

伽利略说“数学是上帝用来书写宇宙的文字”.

前苏联数学家柯尔莫哥洛夫指出“数学是作为关于数、量、几何图形的科学；数学是作为关于量的变化及几何的映象的科学；数学是作为关于现实世界一切普遍的、抽象化的数量形式及其空间形式的科学”.

由此可见，人们可以根据自己对数学的不同的理解对这一问题作出不同的回答. 其实数学是人类活动的结果，具有明显的社会性，因此只有在真正把握数学发展历史的基础上，

从哲学、社会学的角度审视这一问题，或许我们会有一个有较全面的认识.

高度的抽象性是数学的显著特征之一. 数学理论都有非常抽象的形式，这种抽象是经过一系列的阶段形成的，所以大大超过了自然科学中的一般抽象，而且不仅概念是抽象的，连数学方法本身也是抽象的. 例如，物理学家可以通过实验来证明自己的理论，而数学家则不能用实验的方法来证明定理，非得用逻辑推理和计算不可. 体系的严谨性是数学的另一个显著特征. 数学思维的正确性表现在逻辑的严谨性上. 早在 2 000 多年前，数学家就从几个最基本的结论出发，运用逻辑推理的方法，将丰富的几何学知识整理成一门严密系统的理论，它像一根精美的逻辑链条，每一个环节都衔接得丝丝入扣. 广泛的应用性是数学的又一个显著特征. 科技社会的发展不断向数学提出新问题，促使了大量应用数学分支的产生，这些数学分支又为实际问题的解决提供了有效的数学手段和理论支持. 现在，不仅物理学、化学等学科仍在广泛地享用数学的成果，连过去很少使用数学的生物学、语言学、历史学等，也与数学结合而形成了内容丰富的生物数学、数理经济学、数学心理学、数理语言学、数学历史学等边缘学科.

自我们学数学的那天起，我们就感觉到数学离我们是如此近，它似乎就在我们的学习、生活、工作中. 而数学家是那么遥不可及，那么高不可攀，他们就像是天人，创造了数学这样一部天书. 在我们心中，他们就是聪明、智慧的代言词，是天才的化身. 在深奥抽象的数学王国里，数学家们可以任意想象、任意创造概念、定理，可以理所当然地从一般到抽象、从抽象到更抽象，可以克服任何困难，任何难题他们都能所向披靡. 其实，数学家也是普通的人，他们只不过是一群以数学的研究和教学为职业的人. 在他们的性格中有永不收敛的好奇心和不染世俗的独立思考的思想作风. 他们耐得住寂寞，对研究的问题只要还没有答案，就继续探讨下去. 他们中有男人、女人，有十几二十岁的年轻人，有年过花甲的老人，有反应敏捷的，有反应迟钝的，有专业的，更有业余的，有普通的老百姓，有律师，有军人，有牧师，有画家，有工程师等. 在艰苦的探索之路上，他们也曾遇到过挫折、斗争，也跌过跤，他们有伟大的一面，也有渺小的一面.

人类总是对自己生活的环境 —— 自然感兴趣，总是想改善自己身边的生活；但人类改善自己的生活依靠的是现代科技，而现代科技的每一个进步，都伴随着数学工具的使用. 可以说，离开了数学，现代科技将寸步难行. 虽然数学家们研究的东西很少有人看得懂，但是他们的研究成果将支撑现代科技一步一步向前发展. 没有数学家们的工作，人类会犯下很多很多不可挽回的错误；没有数学家们的工作，我们难以想象今天的世界会是怎样！

数学，这部人类创造的恢弘的交响乐，它的每一个音符、每一个音节、每一个乐章都是人类用心、灵、血、汉、泪谱写而成的，它演奏着历史的兴衰、尘世的沧桑、社会的嬗变. 它那时而激昂、时而低沉、时而轻快悠扬的旋律仿佛在向人们述说着那些愉快的、甜蜜的、辛酸的、苦涩的乃至于充满血腥气的往事.

人们不会忘记,古希腊时期毕达哥拉斯(Pythagoras)的门徒希伯斯(Hippasus)因发现了无理数并公开了这一发现而打破了该派的信条,被处以死刑扔进了大海;数学发展史上第一位女数学家希伯蒂娅因传播数学思想而被一群暴徒砍去手脚投入火中烧死;人们自然也不会忘记从欧几里得时代到19世纪末的2 000多年中,许许多多的数学家试证欧几里得第五公设,所走过的漫长而又艰苦的岁月,尤其是俄国数学家罗巴切夫斯基为证该公设而发现非欧几何所遭受的种种指责和非难.人们还不会忘记,在数学发展的历史长河中发生过的种种传奇,出现过的多次大争论,多桩冤假错案以及数学灾难.我们永远记得那些天才的数学家像高斯、阿贝尔、伽罗华(Eacute variste Galois,1811—1832)、冯·诺伊曼、拉马努金、闵可夫斯基等的故事;那些多才多艺的人像列奥纳多·达·芬奇(Leonardo da Vinci,1452—1519)、牛顿(Isaac Newton,1643—1727)、欧拉(Euler,1707—1783)、希尔伯特、庞加莱、外尔等的故事;那些各具特色的数学门派、数学家族,等等.他们在我们的脑海里翻腾起伏,不断地给我们以启迪和反思.

二、数学交响乐的四部曲

数学这部交响乐由四个乐章组成,它们是必然数学、随机数学、模糊数学、突变数学.可以说数学思想方法的发展经历了这么几个阶段.

它们的产生发展来源于生产实际和形形色色的自然现象,这些现象可以分为必然现象、偶然现象、模糊现象和突变现象.

(一)必然现象与必然数学

必然现象的例子很多,如我们所熟悉的热胀冷缩;异性电荷互相吸引、同性电荷互相排斥,100 ℃的水会沸腾等.总之,必然现象是指如果事物变化服从确定的因果关系,由前一时刻的运动状态可推知后一时刻的运动状态.

为描述和研究现实世界的必然现象及其规律,就产生了必然数学.它包括算术、三角、几何、代数、微积分、微分方程和函数论等分支学科.

必然数学最成功的例子,是根据万有引力定律推算出行星环绕太阳运行的轨迹.甚至还预测到海王星和冥王星.在数学史上,这一杰出成就,曾一度使人们认为一切自然现象都可以用必然数学来描述.

实际上必然数学这一乐章里的数学思想曾经历过两次重大转折.

1.从算术到代数

这一转折主要表现为算术解题法到代数解题法的演进.所谓算术解题法,这是我们小学数学的内容,它的特点是只限于对具体的、已知的数进行运算,不容许有抽象的未知数参

加. 它的解题步骤为:① 依据问题的条件列出关于具体的已知数的算式;② 通过四则运算求出算式的结果. 它的困难是:在对于那些具有复杂数量关系的应用题用第 ① 步难以解决. 于是产生了代数解题法,这是我们小学高年级和初中数学的内容,其特点为:未知数与已知数在运算中有着同等的权利(即可以移项、+、-、×、÷等),而方程只是一种条件等式. 其步骤为:列方程、解方程;而解方程是未知数和已知数进行重新组合的过程,即未知数向已知数转化的过程.

总之,算术与代数作为最基础而又最古老的两个分支学科,有着不可分割的亲缘关系,算术是代数的基础,代数是算术发展到一定阶段的必然产物.

2. 从常量数学到变量数学

十六七世纪自然科学提出了大量的数学问题,大体可分为以下五种类型.

(1) 非匀速运动物体的轨迹(天文学).

(2) 求变速运动物体的速度或路程(物理学).

(3) 求曲线在任意点的切线(光学、力学).

(4) 求变量的极值(力学、天文学).

(5) 计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体重心、变密度物体重心以及大质量物体之间的引力等.

这些问题的一个共同特征就是要以"变量"作为其研究对象,于是便产生了从量上描述事物的运动和变化规律的数学 —— 变量数学.

变量数学大概产生于 17 世纪,大体上经历了两个具有决定性的重大步骤:第一步是解析几何的产生;第二步是微积分的创立.

变量数学的产生,使数学在思想方法上发生了重大的变革. 新的数学分支如雨后春笋般地涌现出来,诸如解析数论、微分几何、常微分方程、偏微分方程、积分方程、级数论、差分学、实变函数、复变函数等,形成了变量数学的一个庞大家族. 而常量数学和变量数学统称为必然数学.

(二) 随机现象与随机数学

随机现象又称偶然现象,是指事物的变化发展不受单值的确定的因果关系的制约,而是具有多种不同的可能性,究竟何种结果,有随机性、偶然性. 比如,以同样的方式抛置硬币可能出现正面向上也可能出现反面向上;走到某十字路口时,可能正好是红灯,也可能正好是绿灯;一天内进入某超市的顾客数;平日里摸牌、买彩票等都与随机现象密切相关.

据报道,美国北卡罗来纳州的威尔明市,1982 年 7 月 4 日有一名叫拉夫尔 · 伯特伦 · 威廉斯四世的婴儿在新汉诺佛纪念医院降生;巧合的是,他的父亲是 1950 年 7 月 4 日出生,他

的祖父是1920年7月4日出生，而他的曾祖父同样也是7月4日出生的，而那天又正好是美国独立一百周年纪念日——1876年7月4日，真可谓惊人的巧合.

这些看似纷繁的大量随机现象的背后，往往隐藏着某种必然的规律.例如，婴儿的诞生，可能是男孩，也可能是女孩，但就全世界来说每天诞生的男、女孩总数几乎是相等的.上面提到的美国惊人巧合之事，曾引起北卡罗来纳大学一位数学家的兴趣，他专门为此进行了计算，最后得出结论：同一家族的四代人在同一日期出生的现象，约117亿人中才有一例.

研究随机现象的数学就是随机数学，它的任务就是探索隐藏在随机现象背后的必然的规律.今天，随机数学的基本理论与思想已渗透到现代科学技术、经济、管理等各个领域.例如，概率论与随机过程论的研究为统计物理学奠定了数学基础，为布朗运动、热噪声、物理现象、信息科学、现代金融等提供了数学模型；泊松信号流、马尔可夫过程、时间序列、数理统计在信息科学、生物医学、控制与预测等领域均有广泛的应用；随机运筹与数理统计已成功地应用于管理科学、通信、生产与销售、随机环境与竞争条件中的决策优化等方面；随机数学与其他数学分支有越来越明显的相互渗透，如随机分析在偏微分方程、复杂性计算、运筹优化中成为强有力的前沿工具；在金融与经济领域中，随机微分方程与数理统计已在期权定价、投资风险分析与优化等金融数学中扮演主角.

（三）模糊现象与模糊数学

模糊现象又称不分明现象.比如，一粒种子肯定不叫一堆种子，两粒也不是，三粒也不是，……，另一方面，所有的人都同意，一亿粒种子放在一起肯定叫一堆种子.那么，“一堆”的适当的界限在哪里？我们能不能说，123 585粒种子不叫一堆而123 586粒就构成一堆？这说明“一堆”这个概念带有某种程度的模糊性.又如电视图像清晰还是不清晰，不存在严格的界限；天气预报时，晴天与多云不存在明确的界限；类似还有“老年人”、“年轻人”、“漂亮的人”、“胖子”、“高个子”等.

总之，模糊现象是指客观事物界限不分明的量和性质.1965年，美国加利福尼亚大学自动控制专家L·A·查德(L. A. Zadeh)发表了论文《模糊集合》，标志着模糊数学这门学科的诞生.

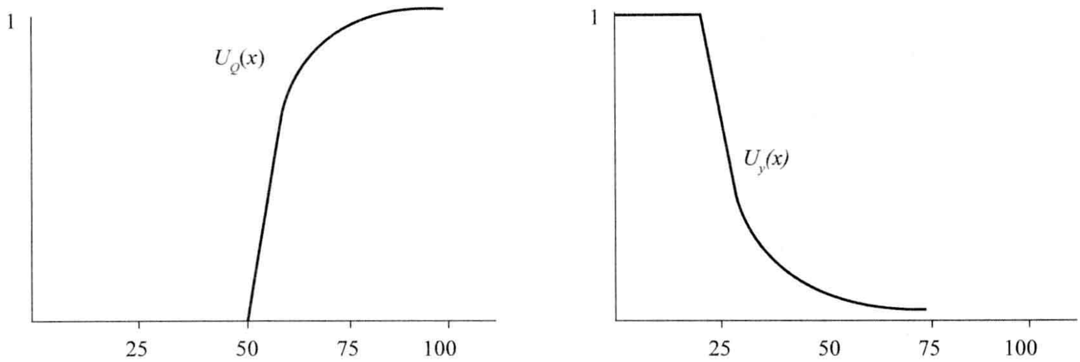
模糊数学用数量表示一个事物属于某个模糊概念的程度，称为隶属度，以此说明该事物能否包括在那个模糊概念的论域中.

例如，以年龄为论域，取$U=[0,100]$. L·A·查德曾给出“年老”Q与“年轻”y两个模糊子集的隶属函数如下：

$$U_Q(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50\leqslant x\leqslant 100,\end{cases}$$

$$U_y(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25\leqslant x\leqslant 100.\end{cases}$$

其图形如下图所示，从图中可以看出，凡小于 25 岁和大于 75 岁，都分别明晰地属于“年轻”和“年老”，而大于 25 岁小于 75 岁之间的人都处于“年轻”到“年老”的中间过渡状态.



如把 55 岁、60 岁、65 岁分别代入 $U_Q(x)$ 分别得 0.5、0.8、0.9，这说明 55 岁、60 岁、65 岁的人属于“年老”范畴的程度分别为 0.5、0.8、0.9，而 70 岁则达 0.97 以上了.

模糊数学的理论由于在处理复杂系统特别是有人干预的系统方面的简捷与有力，某种程度上弥补了经典数学的不足，迅速受到广泛的重视. 近 50 年来，模糊数学作为一门新兴学科，它已初步应用于模糊控制、模糊识别、模糊聚类分析、模糊决策、模糊评判、系统理论、信息检索、医学、生物学等各个方面. 从理论到应用，从软技术到硬技术都取得了丰硕成果，对相关领域和技术特别是一些高新技术的发展产生了日益显著的影响. 如模糊技术可将红绿灯改造得更灵活、模糊智能家电（模糊控制的洗衣机、以模糊规则为基础的照相机、模糊感应的空调等）使生活更方便.

（四）突变现象与突变理论

自然和社会生活中的许多事物的变化过程可以分为两类：一类是连续的、平滑的渐变过程；另一类是当这种连续的渐变发展到一定程度时所产生的飞跃、突变的过程，这种突变过程所发生现象称为突变现象. 例如，水的温度不断升高，水的密度便缓慢变小，当水温达到 100℃ 时，水的密度突然小到蒸汽出现的程度. 两块乌云的电荷不断累积，当到了一定的数量界限时便击穿空气，于是电闪雷鸣发生了. 地应力不断增加，当达到一定程度时，就会突然地动山摇，地震爆发了.

运用经典的微积分的方法，我们可以准确地描述前一过程. 由于突变造成的不连续性把系统的行为空间变成不可微的，这使得微积分无法准确描述这种过程. 这迫使数学家们

去寻找一种新的、恰当的数学工具，用以提供描述这种突变过程的数学模型. 1968 年，法国数学家伦尼 · 托姆(Rene Thom,1923—) 发表了他对这些现象研究的第一篇论文. 1972 年，他出版了《结构稳定性和形态发生学》一书，系统阐述了突变论，宣告了突变理论的诞生.

突变理论主要以拓扑学为工具，以结构稳定性理论为基础，提出了一条新的判别突变的原则：在严格控制条件下，如果质变中经历的中间过渡态是稳定的，那么它就是一个渐变过程. 比如，拆一堵墙，如果从上面开始一块一块地把砖头拆下来，整个过程就是结构稳定的渐变过程. 如果从底脚开始拆墙，拆到一定程度，就会破坏墙的结构稳定性，墙就会哗啦一声，倒塌下来. 这种结构不稳定性就是突变过程.

托姆指出，渐变的控制因素(控制空间) 产生的突变行为(行为空间)，在控制空间不超过四维的情况下，自然界的各种突变可以归结为七种基本突变类型：折叠型、尖顶型、燕尾型、蝴蝶型、双曲脐型、椭圆脐型、抛物脐型.

例如，用大拇指和中指夹持一段有弹性的钢丝，使其向上弯曲，然后再用力压钢丝使其变形，当达到一定程度时，钢丝会突然向下弯曲，并失去弹性. 这就是生活中常见的一种突变现象，它有两个稳定状态：上弯和下弯，状态由两个参数决定，一个是手指夹持的力(水平方向)，一个是钢丝的压力(垂直方向)，可用尖顶型来描述. 又如，水由液体转化为气体，甚至由液体凝结为固体，水的这几种质态之间相互转化的模型，也可用尖顶型来描述. 尖顶型和蝴蝶型是几种质态之间能够可逆转化的模型. 自然界还有些过程是不可逆的，比如死亡是一种突变，活人可以变成死人，反过来却不行. 这一类过程可以用折叠型、燕尾型等势函数最高为奇次的模型来描述. 所以，突变理论是用形象而精确的数学模型来描述质量互变过程.

托姆的这一重大发现立即引起了轰动，有人说它可以和牛顿的《自然哲学的数学原理》相媲美，因为牛顿的理论解释了所有连续的、渐变的现象，而托姆的突变理论解释了所有的不连续的、突变的现象. 有人甚至赞誉它为“数学界的一次智力革命 —— 微积分以后最重要的发现”.

三、数学发展的历史分期

按照数学发展的历史顺序，可在时间方面对数学发展史进行如下分期.

(1) 数学的起源和早期发展时期：大约公元前 6 世纪以前. 这是人类建立最基本的数学概念时期，人类从数数开始逐渐建立了自然数的概念、简单的计算方法，并认识了最简单的几何形式. 算术、几何逐渐形成.

(2) 初等数学时期：大约公元前 6 世纪到公元 16 世纪，前后延续了 2 000 多年. 这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支算术、代数、几何、三角. 这一时期的几何学以欧几里得几

何为主，主要是研究现实世界中形和量的关系，而代数学则研究数(自然数、有理数、无理数)的运算，解方程在代数学中居于中心地位.

(3) 变量数学时期：大约17世纪中叶到18世纪. 1637年，笛卡儿出版了他的划时代的著作《几何学》，奠定了解析几何的基础. 从此变量进入了数学. 微积分及相关的数学理论如级数理论、微分方程、微分几何、概率论等成为数学的中心和主要部分.

(4) 近代数学时期：19世纪到第二次世界大战. 在这一时期，几何学和代数学产生了质的发展，并且分析学的基础开始形成. 这在几何方面表现为非欧几何的产生，在代数方面表现为对群、环、域等代数结构的研究，分析方面表现为极限的精确化及集合论的出现，同时发展出一系列新的分支，如实变函数论、复变函数论、函数逼近论、微分方程定性理论、积分方程论、泛函分析等.

(5) 现代数学时期：20世纪40年代以来. 这一时期的特点是：数学的研究对象大大扩展，产生了许多新的理论和方法；数学的应用从自然科学一直深入到社会科学，这表现为几乎社会科学的所有领域的理论和方法都朝着日益数学化和形式化的方向发展，并实现从定性描述到定量描述的转化；计算机的介入大大改善了数学的应用.

总之，从时间上看，数学史是一个由简单到复杂、由低级到高级、由特殊到一般的过程.

四、结语

数学是看不见的文化，它是人类精神最精致的花朵之一，是人类世世代代努力谱写的一部永恒的知识交响乐. 在过去几千年的历史岁月中，人类通过自己的辛勤劳动，依靠自身的聪明才智创造了数学这一部恢宏的交响乐，未来人类将继续这一伟大的创造直到永远.

注：本专题参考自王庚的《数学文化与数学教育》(科学出版社，2004).

第 1 章　函数、极限与连续

微积分的发现在数学发展史上具有里程碑的意义，它将数学从常量数学推进到变量数学. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后学习打下必要的基础.

§1.1　初等函数

1.1.1　区间概念

1. 区间的定义

在中学我们就已知道区间的概念了. 实数轴上的区间共有以下 8 种形式：$[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$[a,+\infty)$，$(a,+\infty]$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$，它们定义为如下的集合.

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；　　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；　　$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

$[a,\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$；　　$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$；

$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$；　　$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$.

a 和 b 分别称为区间的左、右端点. $[a,b]$ 称为闭区间，(a,b) 称为开区间，$(a,b]$ 和 $[a,b)$ 称为半开半闭区间，$b-a$ 称为这四种区间的长度. 有时也称 $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 是开区间.

另外，在实数轴上实数集 **R** 也可表示为 $(-\infty,+\infty)$.

这里，∞ 只是一个数学符号，读做“无穷大”. 注意，我们不能把它当做实数看，更不能拿它进行运算.

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就称做点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$，如图 1-1(a) 所示，其中 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径. 若在上述邻域中除去邻域的中心点 a，则称为去心邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，如

图 1-1(b) 所示.

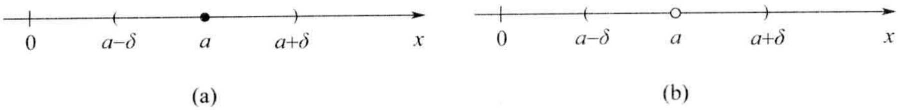


图 1-1

1.1.2 函数概念

在自然界和人类社会生活中,我们常常会碰到各种各样的量.这些量大致可以分为两类,一类在事物的变化过程中始终保持不变,称为常量.例如,匀速运动的物体,其质量和速度是常量,自由落体的加速度也是常量,等等.另一类则随着事物的变化而不断地发生改变,称为变量.例如,一天中某地的气温、某种商品的销量、某只股票的股价等都是变量.变量数学就是研究变量的数学.通常,一个变量的变化是相对于另外的量的变化而言的.例如,气温随时间、地点的变化而变化,商品的销量随价格、需求量的变化而变化等.因此,单纯地研究某一个变量毫无意义.变量数学主要研究多个变量(两个或两个以上)之间相互依赖的关系,这就是函数.

定义 1 设 D 和 W 是两个非空的实数集,f 是一个确定的对应关系.如果对于每一个数 $x \in D$,通过 f 在 W 中都有唯一确定的数 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

数集 D 称做函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.当 x 取遍 D 中的数值时,所得到的函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称做函数 f 的值域.以 $(x, f(x))$,$x \in D$ 为坐标所构成的平面点集称为函数 $y = f(x)$ 的图形.

例 1 某工厂生产某型号车床,年产量为 a 台,分若干批进行生产,每批生产准备费为 b 元,设产品均匀投入市场,且上一批用完一半后立即生产下一批,即平均库存量为批量的一半.设每年每台库存费为 c 元.显然,生产批量大则库存费用高;生产批量少则批数增多,因而生产准备费高.为了选择最优批量,试求出一年中库存费与生产准备费的和与比量的函数关系.

解 设批量为 x,库存费与生产准备费的和为 $f(x)$.因年产量为 a,所以每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$(设其为整数).于是,生产准备费为 $b\,\frac{a}{x}$.因库存量为 $\frac{x}{2}$,故库存费为 $c\,\frac{x}{2}$.由此得

$$f(x) = b\,\frac{a}{x} + c\,\frac{x}{2} = \frac{ab}{x} + \frac{cx}{2}.$$