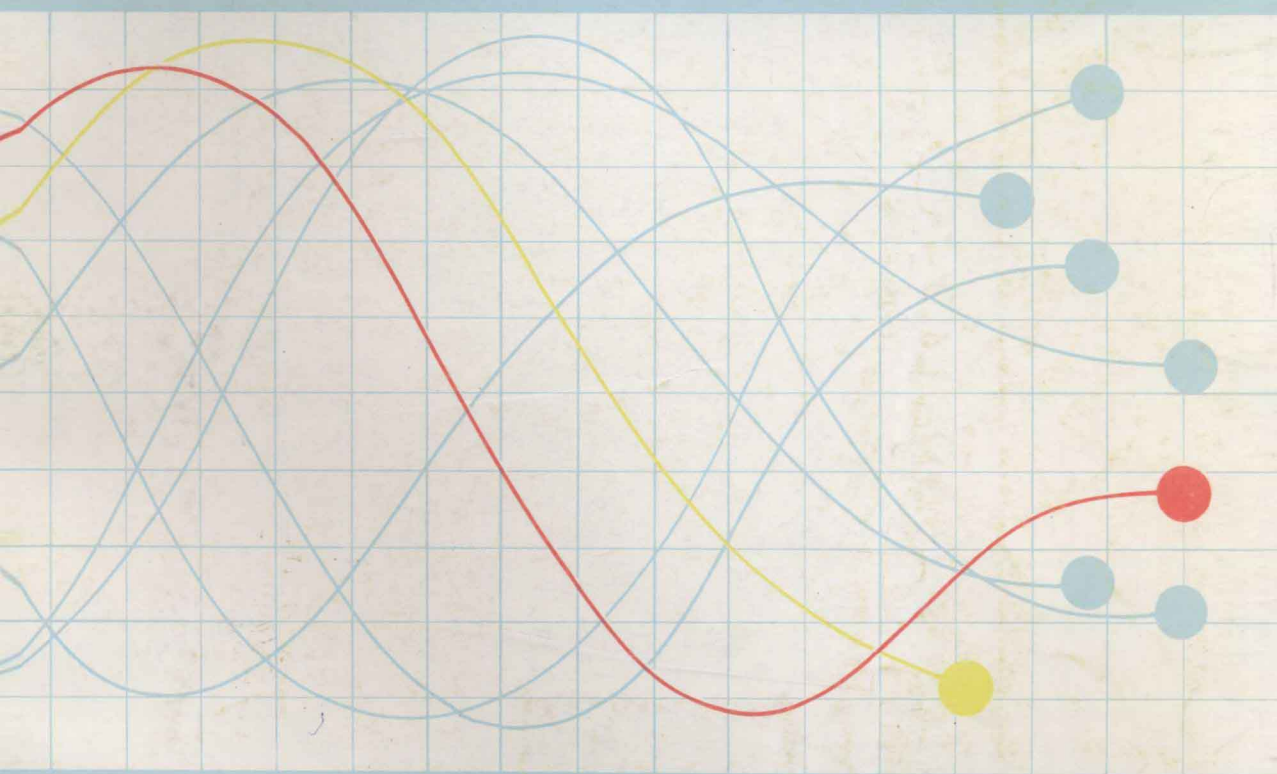


现代控制工程 设计基础

王永初 陈庄金 李钟慎 著



暨南大学出版社

现代控制工程设计基础

王永初 陈庄金 李钟慎 著

暨南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代控制工程设计基础/王永初等著

—广州:暨南大学出版社,1997.2

ISBN 7-81029-486-5

I. 现…

II. 王…

III. 现代控制理论

IV. O 231

暨南大学出版社出版发行

(510632 广州 石牌)

华侨大学印刷厂印刷

新华书店经销

1996年12月第1版 1997年2月第1次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 20.625

字数: 450千 印数: 1000册

ISBN 7-81029-486-5/O·24

定价: 33.00元

前 言

随着现代科学技术的发展,机械制造的机电一体化的趋势已十分明显,而传统的电气控制同具体对象结合渗透到机械制造、仪器仪表、电力拖动等领域,尤其是微型计算机技术的发展,正在改变着控制系统的设计方法。控制理论的实用化与工程化,是一切控制理论能在工程实践中发挥作用的关键。但是,我们在长期教授“控制工程基础”课程中发现,能灵活运用本课程知识解决实际问题的学生不多。本着增加基础,拓宽知识,增强实用的目的,在我们自编讲义的基础上,补充我们近期在控制工程研究中的成果,并吸收国内外同类教材的经验,编著本教材,作为我们教学改革的一个尝试。

本书强调建模方法的多样性,不同的系统有不同的模型表示方法,并可在一定的条件下互相转化,模型是控制系统的设计基础和控制器(或校正器或调节器)设计的重要依据。在理论分析或建模有困难的时候,实验建模不失为一种有效的手段。但是在一般“控制工程基础”的教科书上却不甚强调,本书增加的实验建模方法,可大大增加学生设计系统的能力。

在设计一个控制系统的时候,首先设计者要提出一个目标。不同的被控制对象有不同的控制目标。我们主张系统设计应遵循满意的原则,不一定花费巨大的代价去寻找最优。当然能好则好,在可能的基础上完善系统,使它简单、可靠、实用又满足要求。

控制工程基础传统的教材是以频率校正法和根轨迹法为核心。频率校正法的优点是简单,而且按此法设计的系统有较好的鲁棒性,而鲁棒性又是当今控制理论研究相当活跃的一个领域。相角裕度常用于鲁棒性研究,所以本书加强了频率校正内容。对于根轨迹法,实际应用较少,一般仅限于研究一个最优的静态增益,对一般学生来说,时间有限,单个参数优化的问题可通过本书最后几章的许多方法加以解决,因此,本书没有介绍根轨迹法的内容。但是本书增加了大量有实用意义的系统设计方法,如数字控制系统与状态空间系统的设计等对掌握现代控制技术都是十分必要的。

我们希望通过本书的学习,使学生对现代控制工程有较好的掌握,增强实际设计能力,更好为四化建设服务。本书编写时间比较紧,可能会有些缺点或不足。恳切欢迎使用本书的老师和学生批评指正。本书在编写与出版过程中得到本系研究生的许多帮助,尤其是程少珠同学为本书的出版付出辛勤的劳动和有成效的工作,在此一并致谢。

著者

1996年9月

目 录

第一章 绪论

§ 1-1 自动化、系统与控制理论	(1)
§ 1-2 系统设计的要素	(2)
§ 1-3 控制系统与自动化工具的发展	(4)
§ 1-4 系统设计必须具备的基础知识	(4)

第二章 控制系统的动态数学模型

§ 2-1 模型形式的多样化	(6)
§ 2-2 有关的数学模型	(8)
§ 2-3 数学模型的分析建模方法	(34)
§ 2-4 方框图运算方法	(41)
§ 2-5 信号流图运算方法	(51)
习 题	(57)

第三章 实验建模基础

§ 3-1 基于阶跃信号的响应方法	(62)
§ 3-2 基于频率信号的响应方法	(74)
§ 3-3 闭环测试方法	(77)
§ 3-4 伪随机信号测试方法	(95)
§ 3-5 利用最小二乘法测辨模型	(100)
习 题	(108)

第四章 系统品质分析

§ 4-1 稳定性分析	(111)
§ 4-2 系统的稳态误差分析	(129)
§ 4-3 系统的时域响应品质分析	(141)
习 题	(155)

第五章 频率特性分析法

§ 5-1 频率特性的概念	(157)
§ 5-2 开环频率特性	(169)
§ 5-3 稳定性与稳定裕度	(178)

习 题	(194)
第六章 频率特性校正与系统设计	
§ 6-1 开环系统稳定裕度校正方法	(195)
§ 6-2 在对数幅频特性图上校正的方法	(203)
§ 6-3 系统校正	(214)
§ 6-4 校正器的实现	(222)
习 题	(232)
第七章 数字控制系统	
§ 7-1 采样定理	(233)
§ 7-2 数字控制算式	(234)
§ 7-3 最小调节时间设计方法	(244)
§ 7-4 采样点间信号值的估计	(251)
§ 7-5 频域设计方法	(254)
习 题	(259)
第八章 非线性系统分析与设计	
§ 8-1 描述函数	(261)
§ 8-2 非线性系统的描述函数分析法	(266)
§ 8-3 相平面分析法	(271)
§ 8-4 若干工程实用方法	(274)
习 题	(276)
第九章 状态空间分析法	
§ 9-1 系统分析	(278)
§ 9-2 系统设计	(286)
§ 9-3 现代控制工程的发展趋势	(301)
习 题	(302)
附录:控制系统的计算机辅助分析与仿真	
§ 1 MATLAB 介绍	(304)
§ 2 控制系统的计算机辅助分析	(308)
§ 3 控制系统的计算机仿真	(318)
参考文献	(323)

第一章 绪 论

§ 1-1 自动化、系统与控制理论^{〔1〕}

自动化是一个国家生产力和现代化的重要标志。自动化是我国六大高新技术之一,在各行各业发挥着日益重要的作用。利用仪表与自动控制装置代替人工实现对生产设备或生产过程的直接操作,这就是自动化。一个最简单的自动化系统,包括被控制设备(或过程),检测仪表、执行机构(或调节阀门)与校正器(或控制器或调节器)四个部份。这种由众多不同功能部份构成的一个有机且协调的整体称为系统。系统的含义随着时代的进步与科学技术的发展而延伸,并渗透到工程与非工程的许多领域,如社会、经济、教育、环境、生态、医疗卫生等。我们常常听说生态系统,宏观调控系统,教育系统等,都说明我们今天学习的这门系统理论基础,对我们今后涉及的许多学科都有密切关系。一个工程控制系统同个非工程控制系统有着本质上的一致性。图 1-1 a)与 b)表示工程控制系统与非工程控制系统的基本组成方框图。其中图 a)为工程控制系统,图 b)为非工程控制系统。任何一个控制系统,都有一个要被控制的对象,如工程中的机电设备、化工

与炼油生产过程、自动导航的飞行器等,非工程类的各类社会与经济部门等。例如某项经济宏观调控政策的贯彻实施,其效果必须通过信息机构反馈,同原来规划或预先确定的目标参考信号比较,经控制决策机构运畴决定,发出修改或执行的命令,执行机关必须给于准确无误地贯彻,以保证某项经济政策的实施。工程控制系统有类似于上述

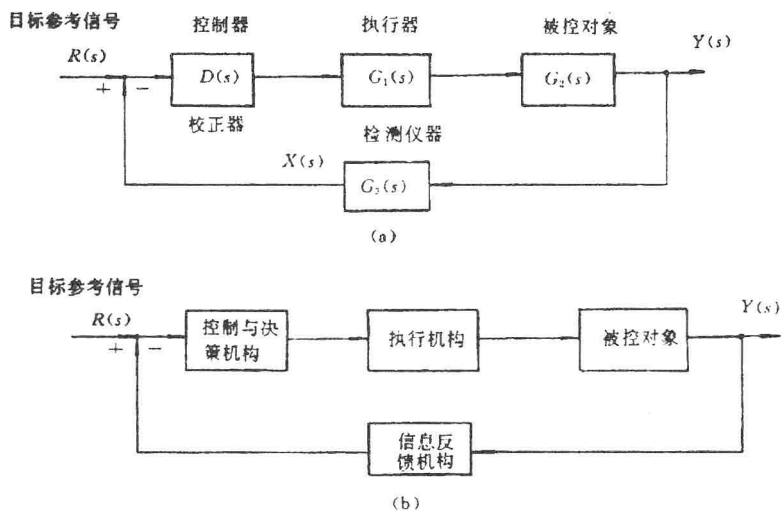


图 1-1 工程与非工程控制系统

功能的四个部份,不同的是它们不是一些部门,而是一些实物装置。

工程控制系统的设计,实际上是选择合适的检测仪表与执行机构,并设计优化控制器(或校正器),其核心是设计满足特定对象与特定要求的控制装置,或者选用通用的调节控制仪表,并为之设计最优的调整参数,本教材围绕这个核心问题介绍了许多基础知识,系统理论与设计

方法。

控制理论是一个自动化系统设计的理论依据。任何一种控制理论都经历了不成熟、成熟与工程化的过程,都是与当时生产力和科学发展的需求相适应的。控制理论发展大致经历三个阶段:(1)经典控制理论:从本世纪 40 年代末至 50 年代末,由于新的机械设备、动力装备以及军工器械的发展,对单回路系统的稳定性品质提出了很高的要求,促使了经典控制理论的发展,其主要成果是频率特性方法和根轨迹法;(2)现代控制理论:从 60 年初期开始,由于宇航与军事工业的发展,要求系统的控制品质已不局限于稳定性问题,还要求高精度和快速性的品质,于是产生了以状态空间方法为基础的现代控制理论。经典控制理论的特点是简单,只需要确定被控制对象的输入与输出特性,就可以进行系统设计。现代控制理论则要求提供大量的系统内部状态的信息,因此控制系统的设计比较复杂。现代控制理论的核心课题是优化控制,其基础是可控性分析方法、可观测性分析方法和建立在时域基础上的稳定性分析方法、鲁棒性分析方法,并涉及到计算机软、硬件知识,现代数学的众多分支,在多变量、时变对象的控制方面有大量应用;(3)大系统理论,专家系统与智能控制。这些方面是在现代控制理论基础上发展起来的,研究系统的范围大大拓宽,深入到许多非工程类的控制和大量目前尚存的控制难点。本教材不是控制理论专业化方面的教材,因此重点介绍应用价值较大的经典控制理论、数字控制方法及目前用得着的部份现代控制理论。

§ 1-2 系统设计的要素^[2]

系统设计应包括理论系统设计与实际实施系统设计。理论设计是针对特定的被控制对象,利用某种控制理论,设计一个符合要求的控制器(或校正器)的传递函数、控制模型或控制算式。系统实施设计是将理论设计的系统付诸实现。

图 1-1 a)已说明一个实际工程控制系统的组成,这四个组成部分分别表示成 $D(s)$ 、 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ 、 $G_3(s)$ 。并可记成

$$M(s) = D(s)G(s) \tag{1-1a}$$

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \tag{1-1b}$$

$M(s)$ 为开环系统传递函数, $D(s)$ 为控制器(或校正器)的传递函数, $G_2(s)$ 为被控制对象的传递函数, $G_1(s)$ 与 $G_3(s)$ 分别为执行器与检测仪表的传递函数。因而图 1-1 a)可化简成图 1-2 所示的单位反馈控制系统结构方框图。在理论设计时,总是假设 $G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$ 已知, $M(s)$ 的最优函数 $M^*(s)$ 可以按系统的品质要求事先确定,于是控制器 $D(s)$ 就可以求出

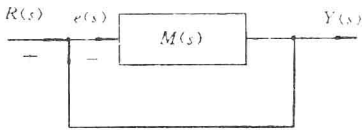


图 1-2 单位反馈控制系统组成框图

$$D(s) = \frac{M^*(s)}{G(s)} \tag{1-2}$$

或

$$20lg|D(\omega)| = 20lg|M^*(\omega)| - 20lg|G(\omega)| \tag{1-3}$$

或者假设图 1-2 的闭环传递函数

$$W(s) = \frac{M(s)}{1 + M(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)} \quad (1-4)$$

已知,寻找 $D(s)$ 函数。由式(1-4)可得

$$D(s) = \frac{W(s)}{[1 - W(s)]G(s)} \quad (1-5)$$

随着控制理论的发展, $G(s)$ 与 $W(s)$ 可能越来越复杂,利用某种装置实现 $D(s)$ 会遇到很大的困难,所以实际构成系统时,必须考虑其如何实现的问题。这些问题包括

1. 如何准确实现 $D(s)$ 的问题

$D(s)$ 的选择要尽量逼近理论计算的结果,无论是用电网络或气、液组件或计算机算式实现都不能太复杂。我们提醒读者,“能用简单的方式实现,就尽量简单”,不要花费巨大的代价取得没有多大实用意义的完美。我们认为简单、实用,意味着实时与可靠。

$D(s)$ 选择要尽量避免:(1)单独使用微分环节,例如 $D(s) = k_d s$,这个函数电网络无法实现,即使可在计算机上利用差分逼近

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{e(s)} &= k_d s \\ U(z^{-1}) &= k_d \frac{1 - z^{-1}}{\Delta T} e(z^{-1}) \\ U_n &= \frac{k_d}{\Delta T} e_n - \frac{k_d}{\Delta T} e_{n-1} \end{aligned}$$

假如采样周期 ΔT 很小, k_d 较大,当 e_n 误差产生时, U_n 会有很大的跳变,轻者严重冲击执行机构,重者造成字长较短的计算机溢出停机。早期工业过程常用一种比例积分微分(PID)控制装置

$$D(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + k_d s \right)$$

由于上述理由,已逐渐被如下函数替代

$$D(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \frac{T_d s + 1}{\frac{T_d}{c} s + 1} \right) \quad C > 1$$

2. 必须考虑执行机构与检测仪表实际特性的影响。

$G(s)$ 是广义对象特性,除了被控制对象本身的特性外,还包含执行机构与检测仪表的特性。如果 $G_2(s)$ 是通过分析(机理模型)得到的,则还应乘上 $G_1(s)$ 与 $G_3(s)$,才是 $G(s)$ 。另一个要注意的问题是按图1-2的单位负反馈控制结构设计系统时,图1-2的被控制信号 $Y(s)$ 相当于图1-1 a)的检测信号 $X(s)$,这两者之间是有区别的。为了使这两者的差别减少, $G_3(s)$ 的静态增益要尽可能接近于1,惯性时间常数应尽量小,即

$$G_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1} \approx 1$$

检测仪表的选择还应考虑抗噪声干扰,以避免检测信号的失真,尤其是注意不能用积分器作滤波器,否则会造成随机性的稳态调节误差。

3. 系统各组成部份信号的匹配

理论设计的系统很少考虑各环节之间信号的匹配,而实施的系统则必须考虑信号的匹配。

信号匹配有两种含义：一个环节输出的信号能够被另一个环节接收，且每一个信号在稳态时，均应尽量保持在其运行范围的中值点附近。假设环节的信号运行范围为

$$I_x = I_{max} \sim I_{min}$$

则工作点应尽量接近如下数值：

$$I_o = \frac{I_{max} - I_{min}}{2}$$

实际问题各式各样，这里不能一一介绍。这里简略说明，目的在于提示读者，真正掌握控制系统设计理论、方法或技巧，必须通过实践的摸索和试验。入门不难，深入掌握也是完全可能的。

§ 1-3 控制系统与自动化工具的发展^[3]

本教材主要是介绍单回路控制系统的设计理论，有了这个基础，很容易延伸到复杂（多回路）系统的设计。

自动化装置经历了自行设计网络到仪表化与数字化的过程，系统设计由单机控制发展到流程优化控制，尤其是近十多年来出现了集散系统控制装置（DCS），系统控制开始划层次，形成纵向与横向的系统结构模式。因此自动化系统的含义更加扩大，它可以有许多不同层次的子系统，依照一定规律结合在一起。所以，一个子系统的设计需要考虑的问题比一个简单的单回路控制系统要考虑的问题更多，这些子系统涉及到互相关联与互相制约的问题。可以说，自动化系统是一门集众多知识与现代科学成果的产物。

从传统的角度分析，控制系统分属两大类型：机电控制系统与生产过程控制系统。机电控制系统的特点是响应速度快，调节时间短（一般在 0.1~5 秒之间）。因此控制器多数采用专门特制的校正网络来实现，由于机电设备控制要求差别很大，这类校正装置难于通用化，最多是单机配套通用化。过程控制系统的特点是响应速度慢，调节时间长（一般从几秒至几十秒），控制器一般都定型化与通用化，通称工业调节器（主要有比例、比例积分与比例积分微分调节器）。但是随着控制理论、控制技术的发展，这两类系统已经互相渗透，控制方法逐渐趋于一致，尤其是微型计算机出现以后，两类系统采用的优化控制方法几乎是一致的。

§ 1-4 系统设计必须具备的基础知识^[4]

系统设计的依据是被控制对象的数学模型。数学模型就是用数学方法来描述对象或自动化装置在输入信号作用下其输出信号固有的变化规律，模型既可以写成微分方程式、差分方程式、拉普拉斯变换传递函数、Z 变换传递函数，也可以写成状态方程式；既可以写成一个集中的函数，也可以分解成方框图或信号流图的各有关环节的结合形式；既可以用机理分析的方法求得，也可以通过实验求得。掌握数学模型的建立与实验方法，对系统设计是至关重要的，可以说是基础的基础。

自动控制既然已经成为一门新兴的学科，必然有它的理论基础。控制工程涉及的理论基础很多，我们只能选择那些确实有用，而且经常要用的理论加以介绍，考虑到微型计算机及大量的数字控制装置的应用现状，适当介绍一些现代控制理论和数字控制系统理论是时代发展的

需要。因此本教材除了介绍模型方面的知识以外,还着重介绍如下的内容:

1. 系统的品质指标:

进行任何一项工作,总有一个目标,系统设计当然不能例外。在进行系统设计之前,设计者应当结合对象的特点与所处地位的重要性,提出设计要实现的目标,系统的设计目标无非是控制系统应满足的动态与稳定(或静态)精度,以及克服一个外扰影响最小的调节时间,或者是某种综合指标函数达到最优化。目前许多控制工程基础的教科书,均列出各种单项指标的计算公式或图表,均是对某种特定系统而言,如二阶振荡系统 $W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$,而读者实际可能遇到的系统并非如此,应用时务需谨慎。正因为这样,本教材强调学生掌握理论基础,解决问题能力的培养,灵活应用教材所介绍的理论与方法。

2. 频域分析方法

频域分析方法在本教材中占有相当大的比重。振幅裕度与相角裕度的概念特别重要,并注意一个系统只要这两个裕度(合称稳定裕度)选择合适,设计的系统总是令人满意的。本教材与同类教材相比,论述设计方法更加直观,从调节时间 t_s ,确定穿越频率 ω_c ,再确定振幅裕度或相角裕度。学生在学习时可以通过这个思路去领会,就会有较好的学习效果。

3. 数字控制系统

数字控制系统的设计方法不如模拟控制系统的设计方法成熟。数字控制系统理论涉及的数学知识较多,本教材因篇幅限制难以深入介绍,仅介绍目前广泛采用并行之有效的一些方法。在设计数字控制系统时,既可以采用这些方法,也可以按模拟系统的设计方法进行设计,然后将模拟的控制器(或校正器),通过数字模型与模拟模型的拟合方法,转换成相应的数字控制器(或数字校正器)。数字校正器同模拟校正器一样都是为完成某种控制系统校正任务而设计的。但它又同模拟校正器不一样。模拟校正器是人们看得见的元器件构成的硬设备,数字校正器却是一种软设备,是将算式编制成的一种专门子程序。

4. 时域设计方法

为适应现代控制技术发展的需要,本教材介绍现代控制理论的一些基本概念和设计方法,并侧重介绍著者近期研究的成果与同学们共勉,共同为促进本学科的发展作出应有的贡献。

第二章 控制系统的动态数学模型

§ 2-1 模型形式的多样化

控制系统设计就是针对被控制对象的特性和控制要求,选择或设计相应的控制装置。因此了解被控制对象的特性对系统分析与设计至关重要。数学模型被用以描述被控制对象的控制特性。

数学模型是人们对被控制对象或装置特性认识的集中体现。一个被控制对象或装置的数学模型形式不是唯一的。目前最常用的数学模型是线性模型,如线性微分方程式,其实被控制对象严格呈线性关系的是极少数的。只有当我们限制某些变量的变化范围时,才可以用线性模型近似地代替非线性模型。

线性模型最基本的形式是线性微分方程式,根据应用的需要可以转换成状态方程式、差分方程式、连续型的传递函数、离散型的传递函数、连续频率特性函数、离散频率特性函数、脉冲响应函数、阶跃响应函数等。这些不同模型类的关系如图 2-1 所示^[5]。

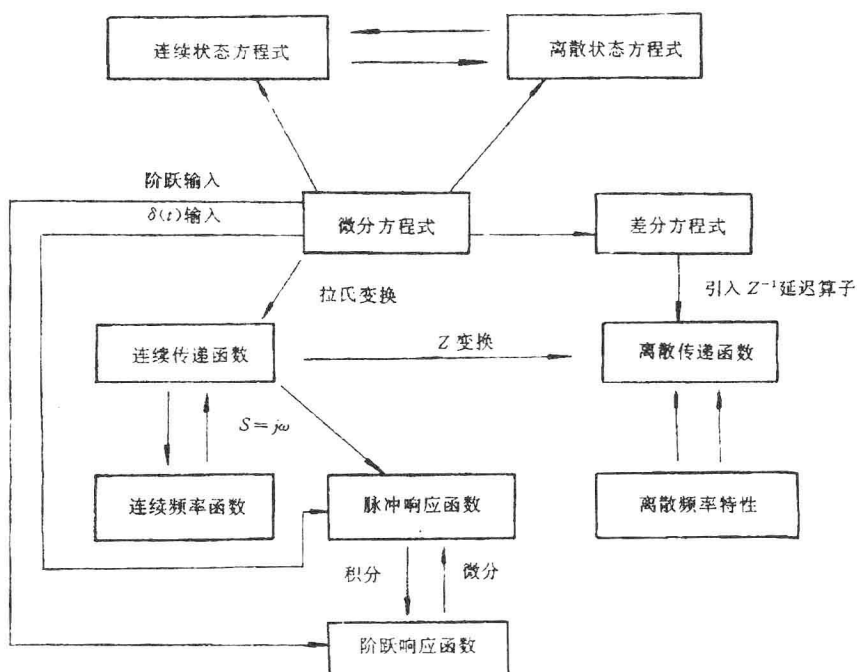


图 2-1 不同模型类的关系示意图

这里以一个最简单的例子来说明。已知一阶常系数线性微分方程式为

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad (2-1)$$

式中 $x(t)$ 为模型的输出变量, $f(t)$ 为模型的输入变量, a 为常数。 $f(t)$ 与 $x(t)$ 同模型的联系由图 2-2 表示。图中问号“?”表示模型与信号(自变量)的属性, 如时间 t , 拉普拉斯变换算子 s (简称拉氏变换算子 s), z 变换算子 z , 但时常用 z^{-1} 表示。

例如 $f(t) = A = 1$ (单位阶跃函数), 则在 $x(t)$ 的初始值为零的情况下, 由式(2-1)可求得

$$x(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) = H(t) \quad (2-2)$$

对 $x(t)$ 取一次时间导数

$$\frac{dx(t)}{dt} = e^{-at} = h(t) \quad (2-3)$$

$H(t)$ 称为模型式(2-1)的单位阶跃函数, $h(t)$ 称为模型式(2-1)的单位脉冲响应函数。

假如对式(2-1)的变量及变量的导数重新加以定义

$$\begin{aligned} X_1(t) &\triangleq x(t) \\ X_2(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \triangleq \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{X}_1(t) \\ f(t) &\triangleq U(t) \end{aligned}$$

这里符号“ $\triangleq$ ”表示定义的意思。则式(2-1)可重新写成

$$\dot{X}_1(t) = -aX_1(t) + U(t)$$

这是状态方程式的一般表示形式。

上述的运算, “?”问号填入的是时间变量 t , 因为它是在时间域内进行运算或变换, 故称时域模型。时域运算比较麻烦, 如图 2-1 方框中填入 $h(t)$ 函数, 其输出信号 $x(t)$ 不等于输入信号 $f(t)$ 与 $h(t)$ 的乘积, 即

$$x(t) \neq h(t) \cdot f(t)$$

式中“ $\cdot$ ”符号表示点积, 也称直积(即直接相乘)。而是

$$x(t) = h(t) * f(t)$$

式中“ $*$ ”符号表示卷积(或褶积), 表示如下意义

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t) * f(t) \\ &= \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2-4)$$

点积与卷积问题, 很容易引起初学者混淆, 学习本课程时必须注意。正因为时域运算不甚方便, 人们才想到研究一种可以采用点积的变换方法, 如在式(2-1)的两边分别乘以 e^{-st} , 然后在 $t = [0, \infty)$ 的区间内积分, 得到另一种以 s (复数算子, 也称拉氏变换算子) 表示的模型

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{dx(t)}{dt} dt + a \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

积分后得到



图 2-2 模型及其输入与输出信号

$$sX(s) + aX(s) = F(s)$$

并记成

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s+a} \quad (2-5)$$

其中

$$X(s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (2-6a)$$

$$F(s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2-6b)$$

$X(s)$ 与 $F(s)$ 分别定义为信号 $x(t)$ 与 $f(t)$ 的拉氏变换。式(2-5)则为传递函数,表示输出信号的拉氏变换与输入信号的拉氏变换之比。

§ 2-2 有关的数学基础

一、拉氏变换

在经典控制理论中,拉氏变换是最常用的数学工具,它可以将微分方程的运算转化成代数运算。

(一)定义

设函数 $x(t)$ 满足:

- (1) $t < 0$ 时, $x(t) = 0$;
- (2) $t \geq 0$ 时, $x(t)$ 在每个有限区间上均为分段连续;
- (3) 存在常数 M 及 $s_0 \geq 0$, 使 $|x(t)| \leq Me^{s_0 t}$ ($0 < t < \infty$);

则下列两式存在

$$\int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt = X(s) \quad (2-7a)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} X(s) e^{st} ds = x(t), [a = \operatorname{Re}(s) > s_0] \quad (2-7b)$$

式中 $\operatorname{Re}(s)$ 表示 s 复变量的实数部份。

称 $X(s)$ 为 $x(t)$ 的拉氏变换,记为

$$X(s) \triangleq \mathcal{L}[x(t)] \quad (2-8a)$$

并称 $x(t)$ 为 $X(s)$ 的拉氏反变换(或拉氏逆变换),记成

$$x(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (2-8b)$$

(二)性质

设 a, b 为常数,则

$$(1) \mathcal{L}[ax(t)] = a \mathcal{L}[x(t)] = aX(s)$$

$$(2) \mathcal{L}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a \mathcal{L}[x_1(t)] + b \mathcal{L}[x_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s)$$

这两个性质均符合线性变换函数的特性;(1)因变量放大(或缩小);(2)线性信号叠加。因此拉氏变换可用以线性系统的分析与设计。

(三)定理

一个比较复杂的函数,通常可以利用拉氏变换的性质或定理,求出其相对应的拉氏变换函数。这些定理有:

(1)自变量比例尺定理

因自变量通常为时间变量 t ,故亦称时间比例尺定理

$$\mathfrak{L}\left[x\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aX(as)$$

证明:记 $\tau=\frac{t}{a}$, 则

$$\mathfrak{L}\left[x\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\int_0^{\infty} x\left(\frac{t}{a}\right) e^{-st} dt=a \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s \tau} d \tau$$

其中

$$\bar{s}=as$$

且有

$$a \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s \tau} d \tau=a X(\bar{s})=a X(as)=\mathfrak{L}\left[x\left(\frac{t}{a}\right)\right]$$

(2)微分定理

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d}{dt} x(t)\right]=s X(s)-x(o)$$

证明:根据

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(t) \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) d e^{-st} = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} x(t) d e^{-st} \\ &= -\frac{1}{s} \left[x(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx(t)}{dt} dt \right] \quad (\text{分部积分}) \\ &= \frac{x(o)}{s} + \frac{1}{s} \mathfrak{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] \end{aligned} \quad (2-9)$$

故有

$$\mathfrak{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=s X(s)-x(o)$$

以上为一阶微分定理,如果继续采用分部积分方法,则式(2-9)可写成

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x(o)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{x(o)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(-\frac{1}{s}\right) d e^{-st} \\ &= \frac{x(o)}{s} - \frac{1}{s^2} \left[\frac{dx(t)}{dt} e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} dt \right] \\ &= \frac{x(o)}{s} + \frac{x^{(1)}(o)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathfrak{L}\left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right] \end{aligned}$$

故有

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right]=s^2 X(s)-s x(o)-x^{(1)}(o)$$

这就是二阶微分定理。上述过程一直进行到 n 次,可求得 n 阶微分定理

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]=s^n X(s)-s^{n-1} x(o)-s^{n-2} x^{(1)}(o)-\cdots-s x^{(n-2)}(o)-x^{(n-1)}(o)$$

式中

$$x^{(n-i)}(t) \triangleq \frac{d^{(n-i)}x(t)}{dt^{n-i}}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

当所有的 $x^{(i)}(0) = 0$ 时, 则

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s)$$

(3) 积分定理

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^\infty x(t)dt\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0)}{s}$$

式中

$$x^{-1}(t) \triangleq \int_0^t x(t)dt$$

证明:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\int_0^\infty x(t)dt\right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x(t)dt\right]e^{-st}dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x(t)dt\right]\left(-\frac{1}{s}\right)de^{-st} \\ &= -\frac{1}{s}\left\{\left[\int_0^\infty x(t)dt \cdot e^{-st}\right] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt\right\} \\ &= \frac{\left[\int_0^\infty x(t)dt\right] \Big|_0^\infty}{s} + \frac{X(s)}{s} = \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0)}{s}\end{aligned}$$

上述为一阶积分定理。对于二阶积分变换同样有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\iint_0^\infty x(t)(dt)^2\right] &= \int_0^\infty \left[\iint_0^\infty x(t)(dt)^2\right]e^{-st}dt = \int_0^\infty \left[\iint_0^\infty x(t)(dt)^2\right]\left(-\frac{1}{s}\right)de^{-st} \\ &= -\frac{1}{s}\left\{\left[\iint_0^\infty x(t)(dt)^2 \cdot e^{-st}\right] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x(t)dt\right]e^{-st}dt\right\} \\ &= -\frac{1}{s}\left[-x^{-2}(0) - \frac{X(s)}{s} - \frac{x^{-1}(0)}{s}\right] = \frac{X(s)}{s^2} + \frac{x^{-1}(0)}{s^2} + \frac{x^{-2}(0)}{s}\end{aligned}$$

按照同样的推导过程可得

$$\mathfrak{L}\left[\underbrace{\int \cdots \int_0^\infty}_{n\text{阶}} x(t)(dt)^n\right] = \frac{X(s)}{s^n} + \frac{x^{-1}(0)}{s^n} + \frac{x^{-2}(0)}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{x^{-(n-1)}(0)}{s^2} + \frac{x^{-n}(0)}{s}$$

式中

$$x^{-i}(0) \triangleq \underbrace{\int \cdots \int_0^\infty}_{i\text{阶}} x(t)(dt)^i \Big|_{t=0} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

当所有的 $x^{-i}(0) = 0$ 时, 则

$$\mathfrak{L}\left[\underbrace{\int \cdots \int_0^\infty}_{n\text{阶}} x(t)(dt)^n\right] = \frac{X(s)}{s^n}$$

(4) 衰减定理

$$\mathfrak{L}[e^{-at}x(t)] = X(s+a)$$

证明:

$$\mathfrak{L}[e^{-at}x(t)] = \int_0^\infty e^{-at}x(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty x(t)e^{-(s+a)t}dt$$

重新定义 $\bar{s} = s + a$, 则有

$$\text{原式} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(s+a)t} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(\bar{s}) = X(s+a)$$

(5) 海维赛移位定理

记如下函数为海维赛单位函数

$$h_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

一个时间函数 $x(t)$ 与 $h_a(t)$ 点积, 其关系用图 2-3 说明

则有

$$\mathcal{L}[x(t-a) \cdot h_a(t-a)] = e^{-as} X(s)$$

证明:

$$\mathcal{L}[x(t-a) \cdot h_a(t-a)] = \int_0^{\infty} x(t-a) e^{-st} dt$$

设

$$\tau = t - a$$

则有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x(t-a) e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s(\tau+a)} d(\tau+a) \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-as} X(s) \end{aligned}$$

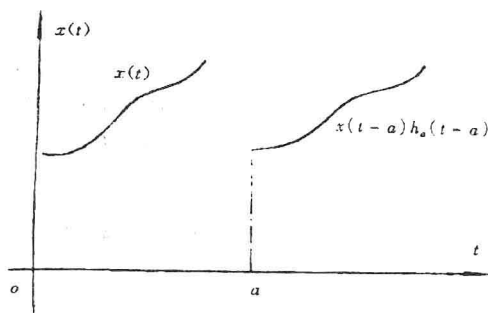


图 2-3 $x(t)$ 及其移位函数

(6) 初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

证明: 根据一阶微分定理

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0)$$

得到

$$x(0) = sX(s) - \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

上式两边取 $s \rightarrow \infty$ 的极限, 得

$$\underbrace{x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} x(0)}_{x(0) \text{ 不包含 } s} = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

因

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = 0$$

故有

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

(7) 终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

证明: 由于

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt = x(t) \Big|_0^{\infty} = x(\infty) - x(0)$$