普通高等教育"十二五"规划教材
国家精品课程配套教材

首届全国高等学校国家级教学名师奖获得者
四十余载教学与科研之经验心得的精品力作

高等代数

丘维声 著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
国家精品课程配套教材

高等代数

丘维声 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是高等代数课程的配套教材，是作者积40多年在北京大学讲授高等代数及相关课程，以及从事科研工作的经验和心得写成的，有许多独到的科学见解. 本书鲜明地突出了“研究线性空间的结构及其态射(即线性映射)”这条主线，科学地安排讲授体系：第一章线性方程组的解法；第二章行列式；第三章线性空间；第四章矩阵的运算；第五章一元多项式环；第六章线性映射；第七章双线性函数，二次型；第八章具有度量的线性空间；第九章 n 元多项式环. 本书精心配备每一节的例题和习题. 本书力求使高等代数与几何水乳交融，并按照数学的思维方式编写各章节的内容，使学生既比较容易地学到高等代数的知识，又从中受到数学思维方式的熏陶和训练，另外本书还配有习题答案与提示的全文在线阅读(具体阅读流程见前言第 x 页页底编者按).

本书可作为综合性大学、理工类大学和高等师范院校的高等代数课程的教材，还可作为高等代数或线性代数课程的教学参考书，也是数学教师和科研工作者高质量的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/丘维声著；—北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-036836-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①丘… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 039651 号

责任编辑：王胡权／责任校对：陈玉凤

责任印制：阎　磊／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版　开本：787×1092 1/16

2013 年 3 月第一次印刷　印张：37 1/2

字数：957 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是作者积 40 多年在北京大学讲授高等代数及其相关课程 (解析几何、抽象代数、群表示论、数学的思维方式与创新等), 以及从事科研工作的经验和心得, 在《高等代数 (上册、下册)》第一版、第二版 (参考文献 [3], [4]) 和《高等代数 (上册、下册)—— 大学高等代数课程创新教材》(参考文献 [1], [2]) 的基础上, 深入钻研, 潜心思考写成的. 本书有一些独到的科学见解, 集中体现了作者在北京大学长期坚持不懈地进行高等代数课程建设和教学改革的成果. 本书的主要特色如下.

一、更加鲜明地突出了 "研究线性空间的结构及其态射 (即线性映射)" 这条主线, 科学地安排讲授体系

高等代数课程的教学内容看上去似乎是一块一块的, 不像数学分析课程那样主线明确: 研究函数的导数、微分和积分. 其实高等代数课程的主线也是明确的: 研究线性空间的结构及其态射 (即线性映射). 这是由古典代数学研究的问题 (解方程和解方程组) 和近世代数学的革命性变革 (研究代数系统的结构及其态射 (即保持运算的映射)) 所决定的. 改变高等代数课程给人的上述印象 (内容一块一块的, 彼此联系不密切), 就需要我们在编写教材时, 用一条主线把各部分内容串起来, 科学地安排教学体系.

古典代数学研究的问题是解方程和解方程组, 最容易切入到高等代数课程研究的中心问题 (线性空间的结构及其态射) 的是解 n 元一次方程组 (即 n 元线性方程组). 因此在本书中, 第一章讲 n 元线性方程组的解法. 在讲了高斯消元法和利用阶梯形矩阵 (相应的阶梯形方程组) 判别线性方程组的解的情况以后, 便提出如何直接从线性方程组的系数和常数项判别方程组有无解、有多少解这个问题. 解剖两个方程的二元一次方程组的例子, 自然而然地引出了 2 级矩阵的行列式 (即 2 阶行列式) 的概念. 为了探索 n 个方程的 n 元线性方程组如何直接从原方程组的系数和常数项判别它有无解、有多少解, 就需要引出 n 级矩阵的行列式 (即 n 阶行列式) 的概念, 并且研究行列式的性质. 因此本书第二章讲行列式. n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解的充分必要条件, 是方程组的系数矩阵的行列式不等于 0. 为了彻底解决从线性方程组的系数和常数项判别它有无解、有多少解的问题以及研究线性方程组解集的结构, 从矩阵的初等行变换受到启发, 要研究数域 K 上所有 n 元有序数组组成的集合 K^n, 在 K^n 中规定加法和数量乘法运算. 由此以及由几何空间 (以定点 O 为起点的所有定位向量组成的集合, 有向量的加法运算和数量乘法运算) 等例子抽象出数域 K 上线性空间的概念. 于是本书的第三章讲线性空间. 运用近世代数学研究代数系统的结构和态射的观点, 我们在第三章从 4 条途径研究线性空间的结构：第 1 条途径, 类比几何空间中基的概念, 对于任意的线性空间 V 引进基的概念, 从而线性空间 V 中每个元素都能由这个基中有限多个元素唯一地线性表出. 第 2 条途径, 类比几何空间中, 过定点 O 的直线、过定点 O 的平面, 对任意的线性空间 V 引进子空间的概念, 研究子空间的交与和, 以及子空间的直和. 第 3 条

途径, 为了研究数域 K 上众多的线性空间中哪些在本质上是相同的, 引进线性空间同构的概念, 并且研究数域 K 上有限维线性空间同构的充分必要条件. 第 4 条途径, 给出线性空间 V 的一个划分, 把划分中的每一个子集看成一个元素, 引进商空间的概念. 运用近世代数学的观点, 还需要研究线性空间之间的态射 (保持运算的映射), 即线性映射. 对于有限维线性空间之间的线性映射而言, 矩阵是研究线性映射的有力工具, 因此本书第四章讲矩阵的运算. 数域 K 上的所有 $s\times n$ 矩阵组成的集合 $M_{s\times n}(K)$ 对于矩阵的加法和数量乘法成为数域 K 上的一个线性空间; $s\times n$ 矩阵与 $n\times s$ 矩阵可以做乘法运算. 这样我们在第四章一方面利用第三章线性空间的理论来研究 $M_{s\times n}(K)$ 的结构, 以及 $M_n(K)$ 的一些子空间 (例如, n 级对称矩阵组成的集合, n 级斜对称矩阵组成的集合等) 的结构, 另一方面又对矩阵的乘法作了深入的研究 (包括矩阵乘积的秩和行列式, 可逆矩阵, 分块矩阵的乘法, 矩阵的相抵, 矩阵的广义逆等). 为了研究有限维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最简单形式的矩阵表示, 需要用到一元多项式环的结构 (唯一因式分解定理) 以及一元多项式环的通用性质. 因此本书第五章讲一元多项式环. 在古典代数学中, 研究一元高次方程的求根, 发展了一元多项式的理论. 我们运用近世代数学研究代数系统的结构及其态射的观点, 在第五章以研究一元多项式环的结构及其态射 (即一元多项式环的通用性质) 为主线. 我们还指出, 数域 K 上一元多项式组成的集合 $K[x]$ 对于多项式的加法和数量乘法成为数域 K 上的一个线性空间, 它是无限维的线性空间的一个例子. 我们在第五章中从整数集 $\mathbb{Z}$, 数域 K 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$, 数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 都有加法和乘法两种运算, 并且加法满足结合律、交换律, 有零元, 每个元素有负元, 乘法满足结合律和对于加法的左、右分配律, 水到渠成地引出了环的概念. 我们还从星期这一熟悉的现象引出了整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 7 同余关系, 类比引出了 $\mathbb{Z}$ 上的模 m 同余关系. 从今天是星期三, 过了 355 天是星期几这样的问题引出了模 7 剩余类的加法运算; 类比引出了模 m 剩余类的加法运算, 进一步类比引出了模 m 剩余类的乘法运算. 由此引出了模 m 剩余类环 $\mathbb{Z}_m$ 的概念. 从模 7 剩余类环 $\mathbb{Z}_7$ 的每个非零元都是可逆元, 以及数域中每个非零数都有倒数, 水到渠成地引出了域的概念. 我们证明了若 p 是素数, 则 $\mathbb{Z}_p$ 是一个域. $\mathbb{Z}_p$ 与数域的本质区别在于, $\mathbb{Z}_p$ 的特征为 p, 而数域 K 的特征为 0. 前面几章关于数域 K 上的线性方程组、线性空间、矩阵 (包括 n 级矩阵的行列式)、一元多项式环的理论都可以推广到任意一个域 F 上. 第六章讲线性映射. 线性映射是域 F 上的线性空间 V 到线性空间 V' 的保持加法和纯量乘法的映射, 线性空间 V 到自身的线性映射称为 V 上的线性变换. 线性空间 V 到域 F(把域 F 看成自身上的线性空间) 的线性映射称为 V 上的线性函数. 第六章从五个方面研究线性映射:

(1) 研究线性映射的运算.

(2) 研究线性映射的整体结构. 域 F 上线性空间 V 到线性空间 V' 的所有线性映射组成的集合记作 $\mathrm{Hom}(V,V')$, 它对于加法和纯量乘法成为域 F 上的一个线性空间; V 上所有线性变换组成的集合 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 既是域 F 上的一个线性空间, 又是一个有单位元的环.

(3) 研究线性映射的核和像.

(4) 研究有限维线性空间之间线性映射和线性变换的矩阵表示, 着重研究线性变换的最简单形式的矩阵表示.

(5) 研究域 F 上线性空间 V 上的线性函数.

为了在线性空间中引进度量概念, 从几何空间中向量的长度、两个非零向量的夹角都可以通过向量的内积来表示受到启发, 第七章讲双线性函数, 并且利用对称双线性函数的理论来研究二次型. 第八章讲具有度量的线性空间, 分别在实数域和复数域上的线性空间中引进内积的概念, 从而分别得到实内积空间 (有限维实内积空间称为欧几里得空间) 和酉空间. 我们研究了实内积空间和酉空间的结构, 以及与内积有关的变换, 分别为正交变换、对称变换和酉变换、Hermite 变换. 古典代数学研究 n 元高次方程组的解, 促使要研究 n 元多项式的理论. 本书第九章讲 n 元多项式环. 我们仍然运用近世代数学研究代数系统的结构和态射的观点, 在第九章中以研究数域 K 上 n 元多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的结构及其态射 (即 n 元多项式环的通用性质) 为主线. 我们研究了 n 元对称多项式组成的子集的结构, 它是 n 元多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的一个子环, 这个子环的结构体现在对称多项式基本定理上. 利用对称多项式基本定理, 可以求出数域 K 上一元多项式 $f(x)$ 的判别式 $D(f)$. 利用数域 K 上两个多项式的结式, 可以解两个方程的二元高次方程组; 还可以解 n 个方程的 n 元高次方程组.

从上述看到, 本书以 "研究线性空间及其态射 (即线性映射)" 为主线, 把高等代数课程的教学内容串起来, 形成了自然的、科学的讲授体系.

二、按照数学的思维方式讲授数学知识

数学这门学科以抽象思维和逻辑思维著称. 但是这些不是数学思维的全部. 数学的思维方式是一个全过程：观察客观现象, 提出要研究的问题, 抓住主要特征, 抽象出概念, 或者建立模型; 运用解剖麻雀、直觉、归纳、类比、联想、逻辑推理等进行探索, 猜测可能有的规律; 采用公理化的方法, 即只使用公理、定义和已经证明了的定理进行逻辑推理来严密论证, 揭示出事物的内在规律, 从而使纷繁复杂的现象变得井然有序.

按照 "观察 — 抽象 — 探索 — 猜测 — 论证" 这一数学的思维方式讲授数学知识, 就可以使学生比较容易地学好数学, 而且从中受到数学思维方式的熏陶和训练, 这对于学生今后从事任何工作都有帮助, 终身受益.

本书自然、清晰、深入浅出地引出重要概念, 通过探索, 猜测可能有的规律, 然后给予证明. 例如, 我们观察几何空间 V 中, U 是过定点 O 的一个平面, W 是过定点 O 的一条直线且 W 不在平面 U 内, 平行于直线 W 在平面 U 上的投影 $\mathscr{P}_U$ 具有性质：$\mathscr{P}_U(\alpha) = 0, \forall \alpha \in W$. 而当 $\beta \notin W$ 时, $\mathscr{P}_U(\beta) \neq 0$. 从这个例子受到启发, 引出域 F 上线性空间 V 到 V' 的线性映射 $\mathscr{A}$ 的核这个概念：V 的子集 $\{\alpha \in V | \mathscr{A}\alpha = 0'\}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的核, 记作 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 于是直线 W 是投影 $\mathscr{P}_U$ 的核, 而平面 U 是 $\mathscr{P}_U$ 的像. 直线 W 以及平行于 W 的所有直线给出了几何空间 V 的一个划分. 直线 W 以及平行于 W 的所有直线组成的集合称为几何空间 V 的一个商集, 记作 V/W. 任给 $\gamma \neq 0$, 直线 W 在沿 γ 平移下的像是 $\{\gamma + \eta | \eta \in W\}$, 记作 $\gamma + W$, 这是商集 V/W 的一个元素. 在商集 V/W 中规定加法运算和数量乘法运算：$(\alpha + W) + (\beta + W) := (\alpha + \beta) + W$, $k(\alpha + W) := k\alpha + W$, 容易验证这些规定是合理的, 于是商集 V/W 成为实数域上的一个线性空间, 称它为 V 对 W 的商空间. 从这个例子受到启发, 引出线性空间 V 对于子空间 W 的商空间的概念. 直线 $\gamma + W$ 与平面 U 有一个交点 A. 于是直线 $\gamma + W$ 对应于 U 中唯一的一个向量 $\overrightarrow{OA}$, 从而商空间 V/W 与平面 U 有一个一一对应, 且容易验证这个对应保持加

法和数量乘法, 因此这是一个同构映射, 从而 $V/W \cong U$, 于是 $\dim(V/W) = \dim U = 2$. 又 $\dim W = 1$, 因此有 $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$. 由此猜测: 设 W 是域 F 上 n 维线性空间 V 的一个子空间, 则 $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$. 然后去证明这个猜测是真的 (在 W 中取一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 把它扩充成 V 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$, 去证 $\alpha_{s+1} + W, \cdots, \alpha_n + W$ 是商空间 V/W 的一个基). 在上述几何空间 V 的例子中, 由于 $\mathrm{Ker}\mathscr{P}_U = W, \mathrm{Im}\mathscr{P}_U = U$, 因此 $V/W \cong U$ 也就是 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{P}_U \cong \mathrm{Im}\mathscr{P}_U$. 从这个例子猜测: 设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射, 则 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cong \mathrm{Im}\mathscr{A}$. 然后证明这个猜测是真的 (考虑 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 到 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 的一个对应法则 $\sigma : \alpha + \mathrm{Ker}\mathscr{A} \mapsto \mathscr{A}\alpha$, 去证 σ 是映射和单射. 显然 σ 是满射. 验证 σ 保持加法和纯量乘法, 从而 σ 是 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 到 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 的一个同构映射). 当 V 是有限维时, 从上述两个结论立即得到重要结论:

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathscr{A}) + \dim(\mathrm{Im}\mathscr{A}) = \dim V.$$

又如, 本书在讲次数大于 1 的整系数多项式在有理数域上不可约的 Eisenstein 判别法时, 不是一开始就写出这个定理, 接着进行证明. 而是首先引导学生探索次数大于 1 的整系数多项式 $f(x)$ 在什么条件下, 它在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 我们解剖了两个例子: x^2+4x+2 与 x^2+4x+4. 前者有 $-2 \pm \sqrt{2}$ 两个无理根, 因此在 $\mathbb{Q}$ 上不可约; 后者等于 $(x+2)^2$, 因此在 $\mathbb{Q}$ 上可约. 我们让学生观察 x^2+4x+2 与 x^2+4x+4 的系数的共同点与不同点. 共同点是: 素数 2 能整除常数项和一次项系数, 但是不能整除首项系数. 不同点是素数 2 的平方能整除 x^2+4x+4 的常数项 4, 但是 2 的平方不能整除 x^2+4x+2 的常数项 2. 由此猜测有下述命题: 设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 是一个次数 $n > 0$ 的整系数多项式. 如果存在一个素数 p 使得, $p|a_0, p|a_1, \cdots, p|a_{n-1}, p\nmid a_n$, 且 $p^2\nmid a_0$, 那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 然后证明这个猜测是真的. 于是自然而然地得到了 Eisenstein 判别法. 在上述探索过程中, 学生对于条件 "$p^2\nmid a_0$" 留下了较深刻的印象.

三、有一些独到的科学见解

本书明确提出了数域 K 上一元多项式环 $K[x]$ 和 n 元多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的通用性质, 并且把它们运用到全书各个相关课题中, 起到了清晰阐述问题的重要作用. 我们让学生观察在 $K[x]$ 中, $(x+3)^2 = x^2+6x+9$; 设 $\boldsymbol{A} \in M_n(K)$, 在 $K[\boldsymbol{A}]$ 中, 根据矩阵乘法的分配律等得, $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{A}^2+6\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}+(3\boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{A}^2+6\boldsymbol{A}+9\boldsymbol{I}$, 此式可以看成是在 $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ 中, x 用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代入得到的, 其中用到了 K 到 $K\boldsymbol{I}$ 的环同构映射 $\tau : k \mapsto k\boldsymbol{I}$. 注意到 $K\boldsymbol{I}$ 是 $K[\boldsymbol{A}]$ 的一个子环, 且 $K\boldsymbol{I}$ 含有 $K[\boldsymbol{A}]$ 的单位元 $\boldsymbol{I}$. 由此受到启发, 我们猜测 $K[x]$ 有下述重要性质:

设 K 是一个数域, R 是一个有单位元 $1'$ 的交换环, 并且 K 到 R 的一个子环 R_1(它含有 $1'$) 有一个环同构映射 τ. 任意给定 $t \in R$, 令

$$\begin{aligned} \sigma_t : K[x] &\longrightarrow R \\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} \tau(a_i) t^i =: f(t), \end{aligned}$$

则 σ_t 是 $K[x]$ 到 R 的一个映射, 使得 $\sigma_t(x)=t$, 并且 σ_t 保持加法和乘法运算, 即如果在 $K[x]$ 中有下列等式:

$$f(x)+g(x)=h(x),\quad f(x)g(x)=p(x),$$

那么在环 R 中有相应的等式:

$$f(t)+g(t)=h(t),\quad f(t)g(t)=p(t).$$

我们把映射 σ_t 称为 x 用 t 代入.

可以证明上述猜测是真的 (关键是由于 $K[x]$ 中每个元素 $f(x)$ 写成 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的表法唯一, 因此 σ_t 是 $K[x]$ 到 R 的一个映射, 然后容易验证 σ_t 保持加法和乘法运算). 这个定理称为一元多项式环 $K[x]$ 的通用性质. 这个定理中数域 K 可换成域 F, 环 R 可取成 $F[x]$, 也可取成 $F[\boldsymbol{A}]$, 还可取成 $F[\mathscr{A}]$, 其中 $\mathscr{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换. 于是由 $K[x]$ 中的有关加法和乘法的等式, 通过把 x 用 $K[x]$ 中的多项式代入 (或 x 用 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代入, 或 x 用线性变换 $\mathscr{A}$ 代入), 可得到 $K[x]$ 中新的有关加法和乘法的等式 (或 $F[\boldsymbol{A}]$ 中, 或 $F[\mathscr{A}]$ 中有关加法和乘法的等式).

一元多项式环的通用性质在研究域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最简单形式的矩阵表示中起了十分重要的作用. 为了寻找 $\mathscr{A}$ 的最简单形式的矩阵表示, 第一步是要设法把线性空间 V 分解成 $\mathscr{A}$ 的若干个非平凡不变子空间的直和, 此时在每个非平凡不变子空间中取一个基, 它们合起来成为 V 的一个基. 线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的这个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵, 这是 $\mathscr{A}$ 的比较简单的矩阵表示. 如何去寻找 $\mathscr{A}$ 的这些非平凡的不变子空间呢? 由于 $\mathscr{A}$ 的任一多项式 $g(\mathscr{A})$ 与 $\mathscr{A}$ 可交换, 因此 $\mathrm{Ker}g(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 由此受到启发, 我们希望找到域 F 上若干个一元多项式 $f_1(x),\cdots,f_s(x),(s\geqslant 2)$, 使得 $V=\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}f_s(\mathscr{A})$. 这需要 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$ 满足什么条件呢? 先看 $s=2$ 的情形. 为了使和 $\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})+\mathrm{Ker}f_2(\mathscr{A})$ 为直和, 就应当有 $\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})\cap\mathrm{Ker}f_2(\mathscr{A})=0$. 联想到两个一元多项式 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素的充分必要条件是: 存在 $u(x),v(x)\in F[x]$, 使得 $u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1$. 于是若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素, 则 x 用 $\mathscr{A}$ 代入, 从上式得, $u(\mathscr{A})f_1(\mathscr{A})+v(\mathscr{A})f_2(\mathscr{A})=\mathscr{I}$. 任给 $\beta\in\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})\cap\mathrm{Ker}f_2(\mathscr{A})$, 则 $f_1(\mathscr{A})\beta=0,\quad f_2(\mathscr{A})\beta=0$. 利用上式得, $\beta=\mathscr{I}\beta=u(\mathscr{A})f_1(\mathscr{A})\beta+v(\mathscr{A})f_2(\mathscr{A})\beta=u(\mathscr{A})0+v(\mathscr{A})0=0$. 因此 $\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})\cap\mathrm{Ker}f_2(\mathscr{A})=0$. 由此猜测有下述结论:

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathscr{A}$ 是 V 上的一个线性变换, $f_1(x),f_2(x)\in F[x]$, 且 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素, 令 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, 则

$$\mathrm{Ker}f(\mathscr{A})=\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})\oplus\mathrm{Ker}f_2(\mathscr{A}).$$

证明这个猜测为真, 只需要再证 $\mathrm{Ker}f(\mathscr{A})=\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})+\mathrm{Ker}f_2(\mathscr{A})$. 这仍然需要利用 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素的充分必要条件中的等式. 这个结论可以用数学归纳法推广到 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素的情形. 即若 $F[x]$ 中的多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素, 令 $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$, 则 $\mathrm{Ker}f(\mathscr{A})=\mathrm{Ker}f_1(\mathscr{A})\oplus\mathrm{Ker}f_2(\mathscr{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}f_s(\mathscr{A})$. 为了得到 V 的直和分解式, 就需要寻找 $f(x)\in F[x]$ 使得, $\mathrm{Ker}f(\mathscr{A})=V$. 由于 $\mathrm{Ker}\mathscr{O}=V$, 因此要找一个

$f(x)$, 使得 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$. 满足这个条件的 $f(x)$ 称为 $\mathscr{A}$ 的一个零化多项式, 可以证明 $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个零化多项式 (这是 Hamilton-Cayley 定理). 在 $\mathscr{A}$ 的所有非零的零化多项式中, 次数最低且首项系数为 1 的多项式称为 $\mathscr{A}$ 的最小多项式. $\mathscr{A}$ 的最小多项式是唯一的, 通常记作 $m(\lambda)$. 容易证明: $g(\lambda) \in F[\lambda]$ 是 $\mathscr{A}$ 的零化多项式当且仅当 $m(\lambda)|g(\lambda)$.

本书利用域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式来探索 $\mathscr{A}$ 的最简单形式的矩阵表示. 本书证明了下列重要结论:

$\mathscr{A}$ 可对角化当且仅当 $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成不同的一次因式的乘积.

$\mathscr{A}$ 有 Jordan 标准形当且仅当 $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积.

若 $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda) = p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda)$, 其中有 $p_j(\lambda)$ 是次数大于 1 的首一不可约多项式, 则 $\mathscr{A}$ 有有理标准形.

本书在讲二次型时也有独到的科学见解. 域 F 上一个 n 元二次齐次多项式称为域 F 上的一个 n 元二次型. 一个 n 元二次型可以写成 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{X}' = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{A}$ 是 n 级对称矩阵, 把 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵. 域 F 上所有 n 元二次型组成的集合记作 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]_q$, 域 F 上所有 n 级对称矩阵组成的集合记作 $S_n(F)$. 令 $\sigma: \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{A}$, 则 σ 是 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]_q$ 到 $S_n(F)$ 的一个映射, 显然 σ 是满射, 单射, 从而 σ 是双射. 在 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]_q$ 中, 把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 $c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n, c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n, \cdots, c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n$ 代入, 其中 $c_{ij} \in F,\quad i, j = 1, 2, \cdots, n$, 简称为 $\boldsymbol{X}$ 用 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 代入, 其中 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$; 若 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵, 则称 $\boldsymbol{X}$ 用 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 代入为一个非退化的线性替换. 容易证明: 域 F 上的一个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 经过一个非退化线性替换: $\boldsymbol{X}$ 用 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 代入, 变成一个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}$, 它的矩阵是 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 由此受到启发, 引出下述概念: 域 F 上两个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$, 如果存在一个非退化线性替换: $\boldsymbol{X}$ 用 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 代入, 使得 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 变成 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$, 那么称二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 等价, 记作 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \cong \boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$. 从这个定义和上述结论立即得到: 域 F 上两个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 等价当且仅当它们的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. n 元二次型的等价是集合 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]_q$ 上的一个二元关系. 容易验证它具有反身性、对称性和传递性, 因此它是一个等价关系. 许多实际问题提出要研究域 F 上一个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 能否通过非退化线性替换化成一个只含平方项的二次型, 这也就是在 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的等价类里能否找到一个只含平方项的二次型. 根据上述结论, 也就是在 $\boldsymbol{A}$ 的合同类里能否找到一个对角矩阵. 最后这个问题已经在对称双线性函数一节里解决了: 设 f 是特征不为 2 的域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个对称双线性函数, 则 V 中存在一个基, 使得 f 在此基下的度量矩阵为对角矩阵. 由于对称双线性函数 f 在 V 的任一基下的度量矩阵都是对称矩阵, 且 f 在不同基下的度量矩阵是合同的, 因此特征不为 2 的域 F 上的 n 级对称矩阵一定合同于一个对角矩阵. 从而特征不为 2 的域 F 上的 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 等价于一个只含平方项的二次型: $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$, 称它为二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的一个标准形, 其中系数不为 0 的平方项的个数等于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 称它为二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的秩.

根据万哲先院士的建议, 我们在本书的第七章 §7.3 讲了 Witt 消去定理, 并且在 §7.5 用 Witt 消去定理简洁地证明了实二次型的惯性定理 (n 元实二次型的规范形是唯一的). 在此

向万哲先院士表示衷心感谢.

两个实内积空间 (或酉空间)V 和 V' 同构, 通常是定义为：如果存在 V 到 V' 的一个双射 σ, 且 σ 保持加法、数量乘法, 保持内积不变, 那么称 σ 是实内积空间 (或酉空间)V 到 V' 的一个同构映射, 此时称 V 与 V' 是同构的. 我们经过深入钻研, 抓住了实内积空间 (或酉空间) 同构的内在本质. 因此在本书中是这么定义的：设 V 和 V' 是实内积空间 (或酉空间), 如果存在 V 到 V' 的一个满射 σ, 且 σ 保持向量的内积不变, 即 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$, $\forall\alpha,\beta\in V$, 那么称 σ 是 V 到 V' 的一个保距同构 (映射), 此时称 V 与 V' 是保距同构的, 记作 $V\cong V'$. 然后我们证明了：保距同构 σ 保持向量的长度不变, σ 是 V 到 V' 的一个线性映射, σ 是单射, 从而 σ 是双射. 由此得到：若 σ 是实内积空间 (或酉空间)V 到 V' 的一个保距同构, 则 σ 是实线性空间 (或复线性空间)V 到 V' 的一个同构映射. 今后我们把线性空间 V 到 V' 的同构映射称为线性同构. 于是实内积空间 (或酉空间)V 到 V' 的保距同构 σ 必定是线性同构, 从而保距同构 σ 具有线性同构的一切性质. 例如, 若 V 是 n 维的, 则 V 到 V' 的保距同构 σ 把 V 的一个基映成 V' 的一个基, 从而 V' 也是 n 维的. 又由于 σ 保持内积不变, 因而 σ 把 V 的一个标准正交基映成 V' 的一个标准正交基. 若 V 和 V' 都是 n 维欧几里得空间 (或酉空间), 则只要 V 到 V' 的一个映射 σ 满足 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta),\quad\forall\alpha,\beta\in V$, 那么 σ 就是 V 到 V' 的一个保距同构. 不难证明：两个欧几里得空间 (或酉空间) 保距同构的充分必要条件是它们的维数相同. 保距同构是所有实内积空间 (或酉空间) 组成的集合上的一个二元关系, 容易验证它具有反身性、对称性和传递性, 从而保距同构是一个等价关系.

几何空间中绕一条直线的旋转, 镜面反射都保持向量的长度不变, 保持两个非零向量的夹角不变, 从而保持向量的内积不变, 这促使我们研究实内积空间 V 到自身上的保持向量内积不变的映射. 于是引出一个概念：实内积空间 V 到自身的满射 $\mathscr{A}$ 如果保持向量的内积不变, 即 $(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\beta),\quad\forall\alpha,\beta\in V$, 那么称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的一个正交变换. 结合保距同构的定义立即得到：$\mathscr{A}$ 是实内积空间 V 上的一个正交变换当且仅当 $\mathscr{A}$ 是 V 到自身的一个保距同构. 由保距同构的性质立即得到正交变换的性质. 由保距同构关系的传递性和对称性立即得到：实内积空间 V 上两个正交变换的乘积还是正交变换, 正交变换的逆变换还是正交变换. 类似地, 引出下述概念：酉空间 V 到自身的满射 $\mathscr{A}$ 如果保持向量的内积不变, 那么称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的一个酉变换. $\mathscr{A}$ 是酉空间 V 上的酉变换当且仅当 $\mathscr{A}$ 是 V 到自身的一个保距同构. 从而 V 上两个酉变换的乘积还是酉变换, 酉变换的逆变换还是酉变换.

四、力求使高等代数与几何水乳交融

高等代数与几何有密切联系, 这是人们的共识. 如何把高等代数与几何真正结合起来, 这是需要下工夫的. 本书力求使高等代数与几何水乳交融.

本书始终抓住了几何空间 V 中的两个典型例子：平面绕一个定点 O 的旋转; 设 U 是过定点 O 的一个平面, W 是过定点 O 的一条直线且 W 不在平面 U 内, 考虑几何空间 V 沿与直线 W 平行的方向在平面 U 上的投影 $\mathscr{P}_U$. 在本书的第四章 §4.1 中, 我们用平面绕定点 O 的旋转的合成 (乘积) 引出了矩阵乘法的定义. 在第六章的开头, 用这两个例子引出了线性映射的概念. 在第六章的 §6.3 中, 用投影 $\mathscr{P}_U$ 引出了线性映射的核的概念; 并且利用投

影 $\mathscr{P}_U$ 进行探索, 猜测有下述结论: 设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射, 则 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cong \mathrm{Im}\mathscr{A}$. 在 §6.6 中, 利用投影 $\mathscr{P}_U$ 引出了线性变换的特征值和特征向量的概念, 以及特征子空间的概念; 并且从投影 $\mathscr{P}_U$ 的分别属于特征值 1 和特征值 0 的特征子空间中的向量的关系猜测: 域 F 上线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的, 然后证明这个猜测是真的. 在 §6.7 中, 我们指出: 对于域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 要找出 V 的一个基使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵具有最简单的形式. 这个问题等价于对于域 F 上的 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$, 在 $\boldsymbol{A}$ 的相似类里找一个具有最简单形式的矩阵. 直觉猜测 $\boldsymbol{A}$ 的相似类里具有最简单形式的矩阵能够揭示所研究的与 $\boldsymbol{A}$ 有关的问题的内在本质. 例如, 在平面直角坐标系 Oxy 中, 二次曲线 S 的方程为 $5x^2+4xy+2y^2-2=0$, 试问: S 是什么样的二次曲线? 解决这个问题的想法是: 找一个合适的直角坐标系 Ox^*y^*, 使得 S 在 Ox^*y^* 中的方程的 x^*y^* 项的系数为 0, 这样就可以看出 S 是什么样的二次曲线了. 为此需要作直角坐标系的变换, 设坐标变换公式为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 是直角坐标系 Oxy 到直角坐标系 Ox^*y^* 的过渡矩阵. 把 S 的原方程的二次项部分写成$(x,y)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 其中的 2 级实对称矩阵记作 $\boldsymbol{A}$. 把坐标变换公式代入得, $(x^*,y^*)\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$. 为了使 S 的新方程中不出现 x^*y^* 项, 就只需要使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵. 设直角坐标系 Ox^*y^* 是把原直角坐标系Oxy 绕原点 O 的旋转得到的, 设转角为 θ, 则坐标变换公式中的过渡矩阵$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 容易计算得, $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{I}$, 因此 $\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}'$. 从而 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$. 因此为了使 S 的新方程中不出现 x^*y^* 项, 就只需要在 $\boldsymbol{A}$ 的相似类里找出一个对角矩阵. 这是不是能办到呢? 这就引出了一个概念: 域 F 上的一个 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如果能够相似于一个对角矩阵, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 类似地, 对于域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 如果 V 中存在一个基使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵是对角矩阵, 那么称 $\mathscr{A}$ 可对角化. 于是需要探索线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化的条件. $\mathscr{A}$ 可对角化的一个充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. 从线性变换可对角化的充分必要条件可以得到域 F 上 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件. 对于上面讲到的二次曲线 S. 由于 2 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 1, 6, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 经过计算得, S 在 Ox^*y^* 中的方程为 $x^{*^2}+6y^{*^2}-2=0$. 由此看出, S 是椭圆. 由此看到, $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1, 6 正好是 S 的新方程中 x^{*^2} 项、y^{*^2} 项的系数. 从计算知道, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量 $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)'$ 给出了 x^* 轴的正向, 即椭圆 S 的长轴的一个方向; $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的一个特征向量 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)'$ 给出了 y^* 轴的正向, 即椭圆 S 的短轴的一个方向. 这展示了矩阵的特征值和特征向量的一个应用. 在第八章 §8.5 中, 我们从几何空间 V 在过定点 O 的平面 U 上的正交投影 $\mathscr{P}$ 所具有的性质: $\forall\alpha,\beta\in V$, 有 $(\mathscr{P}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{P}\beta)$, 引出了实内积空间 V 上的变换 $\mathscr{A}$ 如果满足 $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)$, $\forall\alpha,\beta\in V$, 那么称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的

一个对称变换. 从 $\mathscr{P}$在 U 的一个标准正交基 η_1, η_2 与 $U^{\perp}$ 的一个单位向量 η_3 合起来所成的 V 的标准正交基 η_1, η_2, η_3 的矩阵为对角矩阵$\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{1, 1, 0\}$, 猜测对于 n 维欧几里得空间 V 上的对称变换 $\mathscr{A}$, V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵. 然后用数学归纳法给予证明, 从这个结论立即推导出：对于n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 一定存在一个 n 级正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵. 然后运用这个结论, 我们在本书的阅读材料 6 中讲了二次曲线的类型, 以及二次曲线的不变量和半不变量. 在阅读材料 7 中, 我们运用实二次型等价的充分必要条件为它们的秩相等且正惯性指数也相等, 证明了二次曲面有且只有 17 种.

五、准确地、科学地阐述概念和定理

解一元高次方程 $f(x) = 0$ 的关键是把 $f(x)$ 因式分解. 这时必然遇到 “什么样的两个多项式叫做相等” 这个问题. 因此从解一元高次方程的问题抽象出来的多项式的概念应当是下面这样：

设 K 是一个数域, x 是一个符号, 形如下述的表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $n \in \mathbb{N}; a_i \in K, i = 0, 1, \cdots, n$, 称它们为系数; 如果满足 “两个这种形式的表达式相等当且仅当它们含有完全相同的项 (除去系数为 0 的项外, 系数为 0 的项允许任意删去和添加)”, 那么这种表达式称为数域 K 上的一元多项式, x 称为不定元.

域 F 上线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量的定义是：如果存在 $\lambda_0 \in F$, 以及 $\alpha \in V$ 且 $\alpha \neq 0$, 使得 $\mathscr{A}\alpha = \lambda_0 \alpha$, 那么称 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 称 α 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量. 当 V 是 n 维时, V 中取定一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 设 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, α 在此基下的坐标为 $\boldsymbol{X}$, 则

$$\begin{aligned} & \lambda_0\text{是}\mathscr{A}\text{的一个特征值,}\alpha\text{是}\mathscr{A}\text{的属于}\lambda_0\text{的一个特征向量} \\ \Longleftrightarrow\ & \mathscr{A}\alpha = \lambda_0\alpha, \lambda_0 \in F, \alpha \in V\text{且}\alpha \neq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda_0 \boldsymbol{X}, \lambda_0 \in F, \boldsymbol{X} \in F^n\text{且}\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

于是自然而然地引出下述概念：

设 $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$, 如果存在 $\lambda_0 \in F$, 以及 $\boldsymbol{\alpha} \in F^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}$, 那么称 λ_0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

从这看出, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上的 n 级矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 (如果有的话) 一定是域 F 中的元素. 于是实数域上的 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 (如果有的话) 一定是实数. 不能把实数域上的 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的虚根作为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因此 “n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数” 这句话是不准确的. 准确地、科学地叙述这个定理应当是：“n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的复根都是实数”.

六、精心配备每一节的例题和习题

本书的例题都是经过精心挑选的, 它们的解答以及与本书配套的全文在线电子版习题答

案与提示① 中给出的不少习题的解答都很有特色, 丰富了高等代数课程的内容.

本书可用作综合性大学、理工科大学和高等师范院校的 “高等代数” 课程的教材. 全书供两个学期使用. 第一学期讲第一章至第五章, 第二学期讲第六章至第九章, 其中加 “*” 号的节和阅读材料不作为教学要求, 可以不讲. 各章的讲课学时分配如下 (供参考): 引言 3 学时, 第一章 3 学时, 第二章 7 学时, 第三章 20 学时, 第四章 12 学时, 第五章 15 学时, 第六章 25 学时, 第七章 10 学时, 第八章 16 学时, 第九章 5 学时. 总的讲课时数为 116 学时, 总的习题课时数为 42 学时或 56 学时, 总学时 (共两个学期) 为 158 学时或 172 学时.

感谢科学出版社的昌盛和王胡权编辑, 他们为本书的编辑出版付出了辛勤劳动.

真诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见.

丘维声

北京大学数学科学学院

2012年8月

①编者按: 读者可按下列步骤在线全文阅读高等代数习题解答与提示部分的内容.

1. 登陆科学文库网站http://reading.sciencepress.cn/; 点击页面左上角的 “注册” 二字, 并按照网站提示注册成为科学文库网站的会员;

2. 以会员方式登录科学文库网站, 并在该书纸本版封二位置刮开涂层获取您的激活码, 按页面提示输入激活码;

3. 点击《高等代数》封面或者图书名称进入该书页面, 按页面提示点击 “全文阅读” 即可全文在线阅读高等代数习题解答与提示部分的内容;

4. 再次登录科学文库网站时, 可按以下两种方式进入该书阅读链接页面: (1) 点击会员中心; (2) 在首页检索框内输入该书书名、作者或者 ISBN 号.

目　　录

引　言

§0.1　高等代数的研究对象

我们生活的现实空间在数学上抽象为几何空间, 几何空间可以看成是由所有点组成的集合, 也可以看成是以定点 O 为起点的所有向量组成的集合, 其好处在于向量有加法和数量乘法运算. 如图 0.1, 经过定点 O 的一个平面 π 上取定两个不共线的向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$, 则平面 π 上每一个向量 $\overrightarrow{OM}$ 都可以唯一地表示成 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的线性组合: $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$. 我们把 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 称为平面 π 的一个基, (x,y) 称为 $\overrightarrow{OM}$ 在基 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 下的坐标. 于是平面 π 为下述集合:

$$\pi=\{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}|x,y\in\mathbb{R}\}.$$

这样平面 π 的结构就完全清楚了. 平面 π 的一个基中有两个向量, 我们称平面 π 是 2 维的, 在平面 π 外取一点 C, 则 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 称为三个不共面的向量. 几何空间中每一个向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以唯一地表示成 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 的线性组合:

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}.$$

我们把三个不共面的向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 称为几何空间的一个基, (x,y,z) 称为 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 下的坐标, 于是几何空间为下述集合:

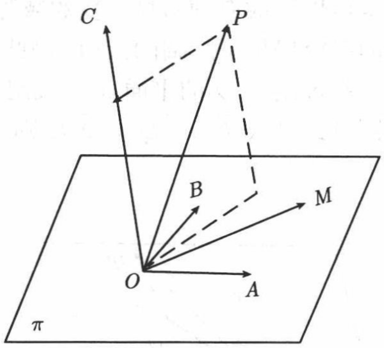

图 0.1

$$\{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}|x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

这样几何空间的结构就完全清楚了. 几何空间的一个基中有三个向量, 我们称几何空间是 3 维的. 设一个运动物体在时刻 t 位于点 P, 则把 (t,x,y,z) 称为这个物体的时–空坐标. 考虑下述集合:

$$\mathscr{U}=\{(t,x,y,z)|t,x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

类似于几何空间中向量的坐标的运算规定 $\mathscr{U}$ 中的加法和数量乘法, 连同类似于几何空间中向量的加法的 4 条运算法则和数量乘法的 4 条运算法则一起, $\mathscr{U}$ 称为 4 维时–空空间. 有没有大于 4 维的空间?

需要考虑大于 4 维的空间的动力之一是研究 n 个未知量的一次方程组 (称为 n 元线性方程组) 有没有解的判定和有解时求解的方法以及解集的结构. n 元线性方程组的一般形