局部p-凸空间引论

王见勇 著

科学出版社

局部 p-凸空间引论

王见勇　著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是关于局部 p-凸($0<p\leq 1$)空间理论的专著. 全书共分七章和一个附录. 在总结经典成果的基础上, 本书用共轭锥取代可能平凡的共轭空间, 借助(赋范)拓扑锥建立局部 p-凸空间理论. 第 1 章简介拓扑线性空间与赋准范空间基础. 第 2~5 章是本书的主体, 主要介绍 p-凸集与 p-凸泛函、局部 p-凸空间与其共轭锥的构造和性质以及二者的相互决定关系等, 其中分离定理、Hahn-Banach 延拓定理、局部有界定理与一致有界定理构成 p-凸分析的四大基本定理. 第 6, 7 两章是对基本理论的应用与提升, 分别研究 Lebesgue 空间 L^p, l^p 与 Hardy 空间 H^p 的局部(q-)凸性, 给出其共轭锥的次表示定理. 附录介绍一个新颖有趣的课题——集合与泛函的积分凸性, 以满足部分读者的广泛阅读兴趣.

p-凸分析是非线性泛函分析中的一个重要分支, 与凸分析一样, 具有可以预见的广泛应用前景. 本书可作为基础数学与应用数学以及相关专业的研究生、本科生与数学工作者的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

局部 p-凸空间引论/王见勇著. —北京: 科学出版社, 2013

ISBN 978-7-03-036975-8

Ⅰ. ①局… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①局部凸线性空间–研究 Ⅳ. ①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 043601 号

责任编辑: 赵彦超 李静科 / 责任校对: 刘亚琦
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2013 年 3 月第一次印刷 印张: 14 3/4
字数: 292 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

在泛函分析领域, 空间理论工作者的兴趣大多集中于以 Banach 空间和 Hilbert 空间等为代表的局部凸空间. 局部凸空间上存在充分多的连续线性泛函以分离原空间, 使其共轭空间与原空间相互依存, 演绎出一系列非常精彩的对偶空间理论. 当 $0<p<1$ 时, 虽然大家知道 Lebesgue 空间 L^p, l^p 与 Hardy 空间 H^p 等均非局部凸, 但对这类空间的深层表现知之不多. 非局部凸空间的共轭空间可能很小甚至平凡, 使经典对偶理论没有用武之地, 因此人们对于这类空间关注甚少是可以理解的. 然而这种“甚少”却给我们提供了非常广阔的研究空间.

在 L^p, l^p 与 $H^p(0<p<1)$ 等非局部凸空间的“不良”特性的影响下, Simons[34] 与 Rolewicz[29] 等首先在局部有界空间范畴内引进了局部 p-凸空间的概念, 后来 Jarchow[13] 等将此概念推广到了一般拓扑线性空间, 开辟了局部 p-凸空间研究领域, 简称 p-凸分析. Rolewicz[29] 与 Kalton[14~17] 等大师的研究为 p-凸分析奠定了基础, 定光桂教授等国内专家的成果, 如 [7], [8], [22] 等, 极大地丰富了 p-凸分析理论宝库.

然而与枝繁叶茂的凸分析相比, 目前的 p-凸分析只是一株非常弱小的嫩苗. 为了克服局部 p-凸空间的共轭空间可能很小甚至平凡以致不能分离原空间的不足, 我们在 [37] 中引进了由连续 p-次半范全体构成的共轭锥的概念, 并且证明了当空间局部 p-凸时其共轭锥充分大, 足以分离原空间. 用共轭锥取代可能平凡的共轭空间, 可以演绎出与经典凸分析相媲美的 p-凸分析理论体系. 本书将分七章系统介绍现有局部 p-凸空间理论.

第 1 章简单介绍拓扑线性空间与赋准范空间等基本概念, 给出若干经典例子, 为全书提供空间背景. 本章第四节介绍开映射定理与闭图像定理等, 为后续章节提供理论依据.

第 2 章研究集合与泛函的 p-凸性质, 给出 p-凸集合的代数结构与拓扑结构, 得到 p-次半范的连续性定理等. 这里 p-Minkowski 泛函是沟通 p-凸集合与 p-次半范的重要工具.

第 3 章给出局部 p-凸空间的定义, 研究局部 p-凸拓扑与 p-次半范族的相互决定关系, 给出局部 p-凸空间的分离定理与 Krein-Milman 定理等. 本章第四节在局部 p-凸空间中给出 p-次半范的 Hahn-Banach 延拓定理. 分离定理与 Hahn-Banach 延拓定理是 p-凸分析的理论基础.

第 4 章研究局部有界空间, 以凹性模为工具, 通过构造等价 p-(半) 范数, 证明

每个局部有界空间均属于某局部 p-凸空间类, 藉此发掘局部 p-凸空间理论的内涵. 本章第三、四两节研究万有空间问题, 构造性地证明可分赋 p-范空间族与可分局部拟 p-凸空间族的万有空间的存在性. 第五节给出 Orlicz 空间 $L_\varphi(\mu)$ 与 l_φ 局部有界的充分必要条件.

第 5 章前几节研究凸锥的代数、拓扑与度量结构, 为局部 p-凸空间共轭锥的表示研究奠定基础, 第五节给出共轭锥 X_p^* 上的一致有界定理与共鸣定理.

作为局部 p-凸空间的典型代表, 本书第 6, 7 两章集中研究 Lebesgue 空间 L^p, l^p 与 Hardy 空间 H^p 的局部凸性与局部 q-凸性等, 给出 $0<p\leqslant 1$ 时 l^p, L^p 与 H^p 的共轭锥的次表示定理等.

附录介绍由作者借助 Bochner 积分引进的积分凸性概念与一些初步研究结果. 积分凸性是个新颖而有趣的课题, 在凸分析与最优化理论等领域具有潜在的应用价值.

本书是作者多年从事局部 p-凸空间理论学习与研究的总结. 本书也对作者发表过的有些文章进行了改进与完善. 共轭锥的引入与次表示的提出为局部 p-凸空间研究提供了一条有效途径. 然而与凸分析相比, 目前 p-凸分析的研究成果非常有限, 存在大量显而易见的问题等待我们去解决. 由于 p-凸分析在 $0<p<1$ 时的非线性性质, 使凸分析的代数方法难以借鉴, 只能大量采用分析方法去研究. 这种挑战无疑又增加了局部 p-凸空间研究的难度、意义与乐趣. 阅读本书无需很多准备知识, 只要熟悉数学分析、高等代数及拓扑与泛函初步即可. 为了方便阅读, 本书从基础出发, 证明比较细致. 希望本书能够抛砖引玉, 使较多年轻读者藉此走上局部 p-凸空间研究之路.

在完稿之际, 作者衷心感谢引领自己走进泛函分析领域的定光桂教授, 对马吉溥、朱广田、刘培德、丘京辉、程立新、李冲、Joseph Diestel 教授等众多同行专家通过各种形式给予自己的帮助谨表谢意. 最后, 作者也对所在学校与相关学科给予的经费资助表示感谢.

就作者所知, 这是第一本专门论述局部 p-凸空间理论的书籍. 初次尝试, 材料选择与体系安排很难把握, 书中难免存在一些缺点与错误, 诚请专家与读者不吝指正.

王见勇

2012 年 10 月

于苏州常熟寓所

符 号 说 明

§1.1

$\overline{A}$ 或 cl$A$: A 的闭包

$\mathring{A}$ 或 int A: A 的内部

∂A: A 的边界

bal$A$: 均衡包

star$A$: 星形包

X^*: 共轭 (对偶) 空间

X': 代数共轭 (对偶) 空间

§1.2

(X,ρ): 度量 (线性) 空间

$(X,\|\cdot\|)$: 赋准 (Δ-) 范空间

$B(r)$: 半径为 r 的开球

$\overline{B}(r)$: 半径为 r 的闭球

B: 单位开球

$\overline{B}$: 单位闭球

§1.3

(Ω,Σ,μ): 测度空间

$L^0(\mu)$: 可测函数空间

$L^\infty(\mu)$: 有界可测函数空间

l^∞: 有界数列空间

$C(\Omega)$: 连续函数空间

c: 收敛数列空间

c_0: 收敛于 0 的数列空间

c_{00}: 有限非 0 数列空间

$\|\cdot\|_\varphi$: Orlicz 范数

$L_\varphi(\mu)$: Orlicz 函数空间

l_φ: Orlicz 数列空间

l^0: 数列空间

$L^p(\mu)$: Lebesgue 函数空间

l^p: Lebesgue 数列空间

$\|\cdot\|_p$: p-范数

§1.4

ker T: T 的零 (核) 空间

G(T): T 的图像

§2.1

$[x,y]_p$: p-曲线段

$[x,y]$: 直线段

co$_pE$: p-凸包

aco$_pE$: 绝对 p-凸包

§2.2

$\overline{\mathrm{co}}_pE$: 闭 p-凸包

$\overline{\mathrm{aco}}_pE$: 均衡闭 p-凸包

ext$_pA$: p-端点集

ext$A$: 端点集

§2.3

$B_f(a)$: f 的半径为 a 的球

$\overline{B}_f(a)$: f 的半径为 a 的闭球

B_f: f 单位开球

$\overline{B}_f$: f 单位闭球

X_p': 代数 p-共轭锥

X_p^*: (拓扑 p-) 共轭锥

ρ_{A_p}: 由 A 生成的 p-Minkowski 泛函

§4.2

$c(A)$: 集合凹性模

$c(X)$: 空间凹性模

§4.3

$\mathcal{B}$: 局部有界空间类

$\mathcal{B}_p$: 赋 p-范空间类
$\mathcal{S}_p$: 可分赋 p-范空间类
$\dim_l X$: 线性维数
$E[c]$: 由 c 生成的截段
$\operatorname{supp} x$: 函数 x 的支撑集
$\mathcal{F}(E)$: 有限支撑函数集

§4.4

$\vee_{\alpha\in A}\tau_\alpha$: 总合拓扑

§5.1

$\mathrm{Conv}(E)$: E 的凸子集族

§5.2

$x\oplus V$: 集 V 到 x 的拟平移
$x\oplus\mathcal{U}_\theta$: 邻域基 $\mathcal{U}_\theta$ 的拟平移

§5.4

$\mathcal{U}_\mathcal{A}$: 一致收敛拓扑
$\mathcal{A}_f$: 有限子集族
$\mathcal{A}_b$: 有界子集族
$\mathcal{U}_f$: 有限一致收敛拓扑
$\mathcal{U}_b$: 有界一致收敛拓扑

§5.5

B°: B 的极集

§6.1

g_n^*: 坐标泛函
S_n: 部分和算子

§6.3

$X_p^*\simeq M$: 次表示
$m^+\times m^+$: $(l^p)_p^*$ 与 $(l^p)_q^*$ 的影子锥
$M^+(\mu)\times M^+(\mu)$: $[L^p(\mu)]_p^*$ 的影子锥
f_σ: f 的伴随泛函

§6.4

$l^\infty(X_p^*)$: $[l^p(X)]_p^*$ 的影子锥
$l^\infty(M_p^+(T))$: $[l^p(\mathbf{C})]_p^*$ 的影子锥
$L^\infty(\mu,X_p^*)$: $[L^p(\mu,X)]_p^*$ 的影子锥
$L^\infty(\mu,M_p^+(T))$: $[L^p(\mu,\mathbf{C})]_p^*$ 的影子锥

§7.1

H^p: Hardy 空间
$\mathcal{N}$: Nevanlinna 函数类
$\mathcal{H}^p$: H^p 的边界函数类

§7.3

$S^\perp$: S 的零化子

§7.4

$L^\infty(T,\mathbf{C}_p^*)$: $(H^p)_p^*$ 的影子锥

§8.1

$\mathrm{co}_\int A$: 积分 ($\int$-) 凸包
$\overline{\mathrm{co}}_\int A)$: 积分 ($\int$-) 闭凸包
$\mathrm{ext}_\int A$: 积分 ($\int$-) 端点集

目　　录

第 1 章　拓扑线性空间与赋准范空间

泛函分析的早期成果较多关注内积空间与赋范空间. 虽然这两类空间概括了相当广泛的客观对象, 但理论发展与应用需求逐渐显示出仅有内积与范数结构是不够的, 许多问题只有在拓扑线性空间中才能得到解决. 本章简单介绍拓扑线性空间、度量线性空间与赋准范空间等基本概念, 讨论它们之间的相互关系, 并给出若干典型例子, 为研究局部 p-凸空间理论提供空间背景. 有关拓扑线性空间的系统知识可以参看 [30], [31] 等专门教程. 本章最后给出开映射定理与闭图像定理等, 为后续章节提供理论依据.

1.1　拓扑线性空间

本章总设 X 是数域 $\boldsymbol{K}$(实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$) 上的线性空间, 用 θ 表示空间的零元素或零泛函, 0 表示数零. 用 $\varnothing$ 表示空集, $\{x\}$ 表示独点集, 用 (x_n) 表示序列. 用 $\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集, 在不致混淆时, 用 ∞ 表示 $+\infty$. 在拓扑空间中, 用 $\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}A$ 表示集合 A 的闭包, $\overset{\circ}{A}$ 或 $\mathrm{int}A$ 表示 A 的内部, ∂A 表示其边界. 若无特别声明, 我们约定映射 $T: X \to Y$ 的定义域是整个 X.

定义 1.1.1　如果线性空间 X 上存在使加法与数乘运算都连续的拓扑 τ, 则称 (X, τ) 是**拓扑线性空间**, 称 τ 为**线性拓扑**.

用映射的语言来说, τ 是 X 上的线性拓扑等价于映射

(1) $(x, y) \to x + y \ \ (X \times X \to X)$,

(2) $(\lambda, x) \to \lambda x \ \ (\boldsymbol{K} \times X \to X)$

都连续.

由加法的连续性可知线性拓扑具有平移不变性, 即当 $\mathcal{U}_\theta$ 是拓扑线性空间 (X, τ) 的 θ 点邻域基时, 对于任何一点 $x \in X$, 集族

$$\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_\theta = \{x + U : U \in \mathcal{U}_\theta\}$$

构成 x 的邻域基. 反过来, 当 $\mathcal{U}_x$ 是 $x (\neq \theta)$ 的邻域基时, 集族

$$\mathcal{U}_\theta = \{U - x : U \in \mathcal{U}_x\}$$

是 θ 点邻域基. 由此可知线性拓扑可以通过 θ 点邻域基来刻画.

下面给出几个常用概念. 设 X 是线性空间, $x, y \in X$. 用

$$[x, y] = \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \geqslant 0, \lambda + \mu = 1\}$$

表示以 x, y 为端点的直线段. 设 $A \subset X$. 若当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时总有 $\lambda A \subset A$, 则称 A 是**均衡集**. 称包含 A 的最小均衡集为 A 的**均衡包**, 记为 $\mathrm{bal}A$. 不难验证

$$\mathrm{bal}A = \bigcup_{|\lambda| \leqslant 1} \{\lambda x : x \in A\}.$$

若当 $x \in A$ 时总有 $[\theta, x] \subset A$, 则称 A 是**星形集**. 称包含 A 的最小星形集为 A 的**星形包**, 记为 $\mathrm{star}A$. 不难验证

$$\mathrm{star}A = [0, 1]A.$$

对于两个子集 $A, B \subset X$, 当存在 $\delta > 0$ 使 $[0, \delta]B \subset A$ 时, 称 A **吸收** B. 如果 A 吸收空间中每一点, 即对任意的 $x \in X$, 存在 $\delta > 0$ 使 $[0, \delta]x \subset A$, 则称 A 具有**吸收性**. 由定义可知集 A 的吸收性等价于 A 能吸收 X 的所有有限子集, 这时必有 $\theta \in A$. 在拓扑线性空间中, 当 A 能被 θ 点任何邻域吸收时称 A 是**有界集**. 存在有界 θ 点邻域的拓扑线性空间称为**局部有界空间**. 集合的有界性有许多等价定义, 每个局部有界空间均可归入某局部 p-凸空间类, 我们将在第 4 章对这些问题进行比较深入地讨论. 设 X, Y 是拓扑线性空间. 如果存在到上的一一线性映射 $T : X \to Y$ 使得 T 与 T^{-1} 都连续, 则称 X 与 Y **拓扑同构**, 简称**同胚**.

下面两个结论属于线性拓扑与邻域基的关系定理.

定理 1.1.1　设 X 是拓扑线性空间, $\mathcal{U}_\theta$ 是 θ 点邻域基. 则

(b_1) 对每个 $U \in \mathcal{U}_\theta$, 存在 $V \in \mathcal{U}_\theta$ 使 $V + V \subset U$, 其中

$$V + V = \{v_1 + v_2 : v_1, v_2 \in V\};$$

(b_2) 每个 $U \in \mathcal{U}_\theta$ 均是吸收集;

(b_3) 对每个 $U \in \mathcal{U}_\theta$, 存在 θ 点均衡邻域 W 使 $W \subset U$.

证明　由 $\theta + \theta = \theta$ 及加法运算的连续性可知 (b_1) 成立.(b_2) 由 $0 \cdot x = \theta$, $x \in X$ 及数乘运算 tx 对 t 的一元连续性可得. 为了证明条件 (b_3), 设 $U \in \mathcal{U}_\theta$. 由 $0 \cdot \theta = \theta$ 以及数乘运算的连续性可知存在 θ 点邻域 W_1 及 $\delta > 0$ 使当 $|t| \leqslant \delta$ 时 $tW_1 \subset U$. 取 $W = \bigcup\limits_{|t| \leqslant \delta} tW_1$, 则 W 是 θ 的均衡邻域且 $W \subset U$.　□

不难看出, 集 A 的闭包可以表示为

$$\overline{A} = \bigcap \{A + U : U \in \mathcal{U}_\theta\},$$

其中 $\mathcal{U}_\theta$ 是 θ 点邻域系 (基). 由此得当 $V\in\mathcal{U}_\theta$ 时 $\overline{V}\subset V+V$. 再由定理 1.1.1 可得:

推论 任何拓扑线性空间中总存在由均衡开 (闭) 集构成的 θ 点邻域基.

定理 1.1.2 设 X 是线性空间, $\mathcal{U}_\theta$ 是 X 中某含 θ 的子集族. 如果 $\mathcal{U}_\theta$ 满足条件 $(\mathrm{b}_1)\sim(\mathrm{b}_3)$ 与

(b_4) 对任意的 $U_1,U_2\in\mathcal{U}_\theta$, 存在 $U_3\in\mathcal{U}_\theta$ 使 $U_3\subset U_1\bigcap U_2$,

则存在线性拓扑 τ 使 $\mathcal{U}_\theta$ 为拓扑线性空间 (X,τ) 的 θ 点邻域基.

注 $\mathcal{U}_\theta$ 满足条件 (b_3) 意味着对每个 $U\in\mathcal{U}_\theta$, 存在均衡集 $W\in\mathcal{U}_\theta$ 使 $W\subset U$.

证明 假设 $\mathcal{U}_\theta$ 是 X 中满足条件的子集族. 考虑满足以下条件的集合 E: 对于任意的 $x\in E$, 存在 $U\in\mathcal{U}_\theta$ 使 $x+U\in E$. 由点集拓扑知识可知这样的集合全体构成 X 上唯一拓扑 τ, 使当 $x\in X$ 时, 集族 $\mathcal{U}_x=x+\mathcal{U}_\theta$ 构成 τ 下 x 的邻域基[20].

下面只要证明加法与数乘运算在 (X,τ) 中连续即可. 设 $x,y\in X$, $U\in\mathcal{U}_\theta$. 选取 $V\in\mathcal{U}_\theta$ 使得 $V+V\subset U$, 则由

$$(x+V)+(y+V)\subset(x+y)+U$$

可知加法运算连续. 为了证明数乘运算连续, 设 $t_0\in\boldsymbol{K}$, $x_0\in X$. 对于任意的 $U\in\mathcal{U}_\theta$ 及自然数 k, 由 $\underbrace{\theta+\cdots+\theta}_{k}=\theta$ 与加法运算连续可知, 存在 $V\in\mathcal{U}_\theta$ 使

$$\underbrace{V+\cdots+V}_{k}\subset U.$$

由条件 (b_2), (b_3) 可知存在均衡吸收单减集列 $(V_n)\subset\mathcal{U}_\theta$ 使

$$\underbrace{V_n+\cdots+V_n}_{n}\subset U,\qquad n=1,2,\cdots.$$

取 n 使 $|t_0|\leqslant n$. 由 (b_2) 可知存在 $\sigma\in(0,1]$ 使 $\sigma x_0\in V_{n+2}$. 对于数域 $\boldsymbol{K}$ 中的单位球 D, 当 $t\in t_0+\sigma D$, $x\in x_0+V_{n+2}$ 时, 由 V_{n+2} 的均衡性得

$$(t-t_0)(x-x_0)\in\sigma V_{n+2}\subset V_{n+2},$$

$$t_0(x-x_0)\in nV_{n+2},$$

$$(t-t_0)x_0\in(t-t_0)\sigma^{-1}V_{n+2}\subset V_{n+2}.$$

最后由等式

$$tx=t_0x_0+(t-t_0)(x-x_0)+t_0(x-x_0)+(t-t_0)x_0,$$

以及前面三个式子可知

$$tx\in t_0x_0+V_{n+2}+nV_{n+2}+V_{n+2}\subset t_0x_0+U.$$

这就证明了数乘运算同样连续. □

从定理 1.1.2 的证明不难看出, 条件 (b_4) 保证拓扑 τ 存在, 其他三个条件确保 τ 是线性拓扑. 由此得到:

推论　在具有拓扑 τ 的线性空间 X 上, τ 为线性拓扑的充分必要条件是存在满足条件 $(b_1)\sim(b_3)$ 的 θ 点邻域基 $\mathcal{U}_\theta$, 使 $x+\mathcal{U}_\theta$ 是 x 的邻域基.

由 [51] 等可知线性拓扑的一个重要特性是分离公理 $T_0 \sim T_3$ 相互等价, 称满足这些公理的拓扑线性空间是 **Hausdorff 空间**. 由以上分析可知拓扑线性空间 (X,τ) 为 Hausdorff 空间的充分必要条件是存在 θ 点邻域基 $\mathcal{U}_\theta$ 满足

$$\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}_\theta\} = \{\theta\}.$$

设 $A \subset X$. 当 $[x,y] \subset A$ 对任意的 $x,y \in A$ 都成立时, 称 A 是**凸集**, 即 A 是凸集的充分必要条件为

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A, \qquad x,y \in A, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

定义 1.1.2　拓扑线性空间 (X,τ) 称为**局部凸的**, 如果存在由凸集构成的 θ 点邻域基.

局部凸空间是一类非常重要的拓扑线性空间, 拓扑线性空间的绝大部分理论涉及局部凸空间. 由定理 1.1.1 的推论不难看出, 任何局部凸空间中都存在由均衡开 (闭) 凸集构成的 θ 点邻域基. 下面将要展示的 Hahn-Banach 定理及其几何形式是凸分析的关键定理之一, 其证明可以参看任何一本拓扑线性空间教科书.

定理 1.1.3(Hahn-Banach 定理[31,p.49])　设 X 是局部凸空间, X_0 是子空间. 则 X_0 上的任何连续线性泛函 f_0 均可延拓为 X 上的连续线性泛函 f.

设 F 是定义在 X 上的函数集. 若对任意的 $x,y \in X$, $x \neq y$, 存在 $f \in F$ 使 $f(x) \neq f(y)$, 则称 F **分离** X(**中点**). 用 X' 表示 X 上全体线性泛函构成的线性空间, 称为 X 的**代数对偶**. 当 X 是拓扑线性空间时用 X^* 表示其上的全体连续线性泛函构成的线性空间, 称为 X 的**对偶或共轭 (空间)**. 当 X^* 仅含零泛函 θ 时称 X^***平凡**. 注意到拓扑线性空间的每个有限维子空间 (与某 $\boldsymbol{K}^n$ 同胚) 上的任何线性泛函都连续, 故由定理 1.1.3 立即得到:

定理 1.1.4(分离定理)　设 X 是局部凸 Hausdorff 空间, 则其共轭空间 X^* 充分大, 足以分离 X.

设 X 是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间, $\theta \neq f \in X'$, $a \in \boldsymbol{K}$. 则称集合

$$H = \{x \in X : f(x) = a\}$$

是 X 中的**超平面**; 当 X 是实线性空间时约定其上的线性函数取实值, 这时称 $G_a = \{x : f(x) < a\}$ 与 $G^a = \{x : f(x) > a\}$ 是由 H 确定的两个半开空间, 称 $F_a = \{x :$

事实上, 当 $\lambda_2 \neq 0$ 时, 由 $0 \leqslant \left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| \leqslant 1$ 与均衡性立即可得

$$\|\lambda_1 x\| = \left\|\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\lambda_2 x\right\| \leqslant \|\lambda_2 x\|.$$

显然条件 (n_2) 也意味着 $\|\cdot\|$ 的对称性

$$\|\lambda x\| = \|x\|, \quad |\lambda| = 1.$$

对于任意自然数 $n > 1$, 由 (n_4) 与单调性 (n_2) 可知

$$\|nx\| \leqslant C\|(n-1)x\| \leqslant \cdots \leqslant C^{n-1}\|x\|.$$

于是对于任意的 $\lambda \in \boldsymbol{K}$ 与 $x \in X$, 当设 $|\lambda| \leqslant n+1$ 时,

$$\|\lambda x\| \leqslant \|(n+1)x\| \leqslant C^n\|x\|. \tag{1.2}$$

除满足极限性质 (n_3) 外, 由 (1.2) 可知 Δ-范数 $\|\cdot\|$ 也满足另一个极限性质

$$\lim_{x_n \to 0}\|\lambda x_n\| = 0. \tag{1.3}$$

当 $|\lambda_n| < 1$ 时, 由 $\|\lambda_n x_n\| \leqslant \|x_n\|$ 可知 $\|\cdot\|$ 也满足第三个极限性质

$$\lim_{\lambda_n \to 0, x_n \to 0}\|\lambda_n x_n\| = 0. \tag{1.4}$$

三个极限性质 (n_3), (1.3) 与 (1.4) 一道刻画了数乘运算的连续性. 这就证明了每个赋 Δ-范空间均是 Hausdorff 拓扑线性空间.

多数文献 (例如 [29]) 将极限性质 (1.3), (1.4) 作为条件与 (n_3) 一并列入相关定义, 但却缺少均衡性条件 (n_2). 比较而言条件 (n_2) 既简洁又易验证, 常见经典空间无出其右, 这是我们在 Δ-范数定义 1.2.2 中将其列入条件的原因之一; 条件 (n_2) 结合 (n_4) 可以导出极限性质 (1.3) 与 (1.4), 这是我们对 (n_2) 特别关注的第二个原因. 下面例子说明 (n_2) 与 (n_4) 并不蕴涵极限条件 (n_3).

例 1.2.1 设 X 是由满足

$$\|x\| = \sup \sqrt[n]{|x_n|} < \infty$$

的全体数列 $x = (x_n)$ 构成的线性空间, 则 $\|\cdot\|$ 显然满足 (n_1), (n_2). 由

$$\sqrt[n]{|x_n + y_n|} \leqslant \sqrt[n]{|x_n|} + \sqrt[n]{|y_n|}$$

1.2　度量线性空间与赋准范空间

在上节我们将线性结构与拓扑结构相容的空间称为拓扑线性空间. 本节讨论的度量线性空间是线性结构与度量结构相容的空间. 我们先从度量开始讨论.

定义 1.2.1　设 X 是非空集合. 如果存在二元实函数 $\rho: X \times X \to \mathbf{R}_+$ 满足

(m_1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(m_2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

(m_3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$,

则称 ρ 是**度量**, 称 (X,ρ) 是**度量空间**, 由度量产生的拓扑叫做**度量拓扑**. 当 ρ 是线性空间 X 上的度量时, 如果由 ρ 导出的拓扑是线性拓扑, 即加法与数乘运算连续, 则称 ρ 是**线性度量**, 称 (X,ρ) 是**度量线性空间**.

由条件 (m_1) 可知每个度量空间均是 Hausdorff 空间. 只满足 (m_2), (m_3) 的度量称为**伪度量**.

在线性空间 X 上, 由二元函数定义的线性度量与由一元函数定义的 Δ-范数密切相关.

定义 1.2.2　设 X 是线性空间. 若存在一元函数 $\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}_+$ 使

(n_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(n_2) $\|\lambda x\| \leqslant \|x\|,\ \ x \in X, \lambda \in \boldsymbol{K}, |\lambda| \leqslant 1$ (均衡性);

(n_3) $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} \|\lambda_n x\| = 0,\ \ x \in X$;

(n_4) $\|x+y\| \leqslant C\max(\|x\|, \|y\|),\ \ x, y \in X$,

这里 C 是大于 1 的常数, 则称 $\|\cdot\|$ 是**Δ-范数**, 称 $(X, \|\cdot\|)$ 是**赋 Δ-范空间**.

当 $\|\cdot\|$ 是 X 上的 Δ-范数时, 我们用 $B(r)$, $\overline{B}(r)$ 分别表示 $(X, \|\cdot\|)$ 中半径为 r 的开球与闭球, 即

$$B(r) = \{x \in X : \|x\| < r\},$$

$$\overline{B}(r) = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}.$$

用 B 与 $\overline{B}$ 分别表示相应的单位开、闭球. 这时可在 X 上定义极限

$$x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0\ \ (n \to 0), \tag{1.1}$$

用 τ 表示相应的拓扑. 性质 (n_1) 等价于 τ 是 Hausdorff 拓扑. 由条件 (n_4) 可知加法运算连续. 均衡性条件 (n_2) 相当于 $\|\cdot\|$ 的单调 (非减) 性, 即当 $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$ 时,

$$\|\lambda_1 x\| \leqslant \|\lambda_2 x\|.$$

定义的二元函数 ρ 显然是一个平移不变量度, ρ 的均衡性由 $\|\cdot\|$ 的均衡性可知, 且度量拓扑就是由 $\|\cdot\|$ 经 (1.1) 定义的线性拓扑 τ.

反过来, 当 ρ 是 X 上具有均衡性的平移不变度量时, 定义

$$\|x\| = \rho(x, \theta), \qquad x \in X, \tag{1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 显然满足条件 (n_1), (n_2). 由 ρ 的三角不等式与平移不变性可知

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \rho(x+y, \theta) \leqslant \rho(x+y, y) + \rho(y, \theta)\\ &= \rho(x, \theta) + \rho(y, \theta) = \|x\| + \|y\|,\end{aligned}$$

即三角不等式 (n_5) 成立. 再由 ρ 是线性度量可知

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \|\lambda_n x\| = \lim_{\lambda_n \to 0} \rho(\lambda_n x, \theta) = 0,$$

即 (n_3) 同样成立. 这就证明了由 ρ 经 (1.6) 定义的 $\|\cdot\|$ 是一个准范数. 由 ρ 的平移不变性可知, $\|\cdot\|$ 经 (1.5) 产生的度量就是 ρ 本身, 这就证明了 ρ 与 $\|\cdot\|$ 相互等价. □

与定理 1.2.2 类似, 线性空间上的准半范与具有平移不变及均衡性的伪线性度量相互对应, 只是相应的拓扑不满足分离公理而已. 本书主要采用 Δ-范数与准范数叙述线性度量与线性拓扑. 两个 Δ-范数等价意味着由它们导出的收敛或拓扑等价. 由定义, 每个准范都是 Δ-范数, 下面定理说明每个 Δ-范数可以转化为一个等价准范.

定理 1.2.3 设 $\|\cdot\|$ 是线性空间 X 上的 Δ-范数. 取常数 $C > 2$ 使 (n_4) 成立. 则对满足 $C = 2^{1/p}$ 的常数 p, 由

$$|||x||| = \inf\left\{\sum_i \|x_i\|^p : \sum_i x_i = x\right\}, \qquad x \in X \tag{1.7}$$

定义的 $|||\cdot|||$ 是与 $\|\cdot\|$ 等价的准范数.

证明 对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, 由 (n_4) 可以归纳证明不等式

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} C^k \|x_k\|. \tag{1.8}$$

当 $n = 2$ 时 (1.8) 显然. 假设当 $n = m$ 时结论已经证明, 则当 $n = m + 1$ 时,

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1}\| &\leqslant C \max(\|x_1\|, \|x_2 + \cdots + x_{m+1}\|)\\ &\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant m+1} C^k \|x_k\|,\end{aligned}$$