"十二五"国家重点图书出版规划项目

电子与通信工程系列

随机信号分析

Random Signal Analysis

主　编　陈义平　谢玉鹏

副主编　吕中志　吴海燕

主　审　赵金宪

哈爾濱工業大學出版社

"十二五"国家重点图书出版规

电子与通信工程系列

随机信号分析

Random Signal Analysis

主　编　陈义平　谢玉鹏
副主编　吕中志　吴海燕
主　审　赵金宪

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书系高等学校工科电子类专业基础教材。全书共分为7章，主要内容包括概率论基础、随机信号、平稳随机信号及其谱分析、各态历经性与随机实验、随机信号通过线性系统、窄带随机信号、随机信号通过非线性系统、泊松过程与马尔可夫链。本书主要从工程应用的角度，讨论随机信号的基本理论和分析方法，力求联系工程实践，强调物理意义，内容全面，叙述清楚，例题与图示丰富，便于教学与自学。书中列举了大量例题和一些 MATLAB 应用程序，每章附有大量的习题供练习。

本书可作为高等院校通信、电子信息类专业本科生和研究生的教材或教学参考书，也可供相关专业的师生和相关领域的科研、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/陈义平，谢玉鹏主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.11

ISBN 978-7-5603-3778-4

Ⅰ.①随… Ⅱ.①陈…②谢… Ⅲ.①随机信号—信号分析—高等学校—教材 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 199329 号

电子与通信工程
图书工作室

责任编辑 李长波
封面设计 刘长友
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 16.25 字数 327 千字
版　　次 2012 年 11 月第 1 版 2012 年 11 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3778-4
定　　价 30.00 元

高等学校"十二五"规划教材

电子与通信工程系列

总　序

电子信息与通信工程是当今世界发展最快的领域，该技术领域的新概念、新理论、新技术不断涌现，其知识更新速度也是令人吃惊。这就使得从事电子信息与通信工程技术的科技人员要不断学习，把握前沿动态，吸收最新知识。近年来，各高校通过教学改革，在引导学生将最新知识应用于社会实践，解决实际问题，培养学生实践动手能力、探索性学习能力和创新思维能力等方面取得了可喜成就。

为了培养国家和社会急需的电子信息与通信工程领域的高级科技人才，配合高等院校电子信息与通信工程专业的教学改革和教材建设，哈尔滨工业大学出版社组织哈尔滨工业大学、哈尔滨理工大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、黑龙江科技学院等多所高校，通过共同研讨和合作，相互取长补短、发挥各自的优势和特色，联合编写了这套面向普通高等院校"电子与通信工程系列"教材。

本系列教材的编写目标：结合新的专业规范，融合先进的教学思想、方法和手段，体现科学性、先进性和实用性，强调对学生实践能力的培养，以适应新世纪对通信、电子人才培养的需求。

本系列教材编写要求：专业基础课教材概念清晰、理论准确、深度合理、内容精炼，并注意与专业课教学的衔接；专业课教材覆盖面广、深度适中，体现相关领域的新发展和新成果，注重理论联系实际。

本系列教材的编委会阵容强大，编者都是在教学工作第一线的骨干教师。他们具有多年丰富的教学和科研经历，掌握最新的理论知识，具有丰富的实践经验，是一支高水平的教材编写队伍。

本系列教材理论性与工程实践性紧密结合，旨在引导读者将电子信息与通信工程的理论、技术与应用有机结合，适合于高等学校电子、信息、通信和自动控制等专业的教材选取。我深信：这套教材的出版，对于推动电子信息与通信工程领域的教学改革、提高人才培养质量必将起到积极的推动作用，并以其内容的先进性、实用性和系统性为特色而获得成功。

吴　群
哈尔滨工业大学教授
2010 年 4 月

前言

PREFACE

“随机信号分析”是电子信息类专业主要的专业基础课程之一，是研究随机信号特点与规律的理论。随机信号与确定信号一样，是通信、雷达、语音信号处理、信号与信息处理、自动控制等领域中必须涉及的信号形式。因此，工科院校中电类甚至一些机械类专业的学生应该对随机信号有必要的了解，并掌握一些随机信号理论、仿真及分析处理的基本方法。

本书主要是为电子信息类专业本科生、研究生学习随机信号分析的基本方法而编写的一本教材；但是，本书的核心内容、基本概念和分析方法对于其他需要接触到随机信号统计分析专业的学生同样是重要的。

“信号与系统”与“随机信号分析”是电子信息类专业两门主要的专业基础课，前者主要以分析确定性的信号与系统为主要内容；后者则以分析统计信号以及与系统的相互作用为主要内容。

“随机信号分析”课程一般在大学本科三年级以后开课，在本课程之前，所接触的大多数课程都是建立在因果律或者确定性的基础上，因而人们的思维方法也往往是这样的，对具体的函数形式、波形、必然结果感兴趣。初学这门课程时，往往会感到这门学科比较模糊、难于理解，为此在讲授时有必要对本课程的特点与学习方法作一些介绍。学习、理解、掌握这门课程必须从它的特点出发，采用不同的学习方法才能对本课程有较好的把握。由于对随机信号的分析来讲，人们往往不是对一个实验结果感兴趣，而是关心大量实验结果的某些统计特性，因而随机信号的描述方式以及推演方式都应以统计特性为出发点。这样，尽管从个别的实现看不出任何规律性的内容，但从统计的角度却表现出了一定的规律性，即统计规律性。它是本门学科一个最根本的概述，从一开始就必须加以注意。另外，本课程重点研究一般化的系统、干扰和信号，因而对它们往往仅给出它们的系统函数和数学模型，而不讨论具体的系统，更不会局限于一些具体的电路系统上，举出一些具体的电路系统例子也只是用于说明一般的带普遍性的问题和处理方法。

本门课程虽属基础理论性课程，但要真正掌握上述基本概念，能够应用它解决实际问题，必须演算大量的习题，因而本书选编了大量的习题，一些章节给出 MATLAB 仿真实例。

本书由陈义平、谢玉鹏任主编并统稿，吕中志、吴海燕任副主编。陈义平编写第1、7章，谢玉鹏编写第2、3章，吕中志编写第4、5、6章，吴海燕编写第1、7章的习题，并参加资料收集和整理工作。赵金宪教授担任主审。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏或不足之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2012年7月

目录

CONTENTS

第 1 章

随机变量基础

概率论与随机变量是随机信号分析与处理的理论基础，本章主要复习和总结这些知识，对随机现象本质的理解达到进一步的深化，同时扩充一些书中后面需要用到的新知识点。

1.1 概率论的基本术语

为了掌握随机现象的统计规律，必须对随机现象进行大量观测或试验。

1. 随机试验

满足下列三个条件的试验称为随机试验：

① 试验在相同条件下可重复进行。

② 试验出现哪种结果，是不可能准确预言的。

③ 试验有多重结果，并且事先明确知道该试验的所有可能的结果。

随机试验通常用 E 表示，比如投掷硬币，就是一个随机试验，它满足以上三个条件。首先，投掷硬币是可以重复进行的；其次试验的结果可能是正面，也可能是反面，即有两种可能的结果，而且只有这两种结果事先可以明确，但具体到某次试验，试验前是不能预知出现哪种结果的。

2. 随机事件

在随机试验中，对试验中可能出现也可能不出现而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情，称为随机事件，简称为事件，如投掷硬币出现正面就是一个随机事件。

3. 基本事件

随机试验中最简单的、不可再分割的随机事件称为基本事件，如投掷骰子出现 1，2，…，6 点是基本事件，出现偶数点是随机事件，但不是基本事件。

4. 样本空间

随机试验 E 的所有基本事件组成的集合称为样本空间，记为 S，如投掷骰子的样本空

间为{1,2,3,4,5,6}。

5. 频数和频率

一般的，在相同条件下的大量的 n 次重复试验中，事件 A 出现的次数 n_A 称为事件 A 的频数，比值$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 出现的频率。频率反映了事件 A 出现的频繁程度，若事件 A 发生的可能性大，那么相应的频率也大，反之则较小。

6. 概率

对于相同的试验次数 n，事件 A 发生的频率可能不同，n 越小，这种波动越大，n 越大，波动越小，当 n 趋于无穷时，频率趋于一个稳定的值，可以把这个稳定的值定义为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，即

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

这一定义称为概率的统计定义。概率的统计定义不仅提供了事件A发生的可能性大小的度量方法，而且还提供了估计概率的方法，只要重复试验的次数 n 足够大，就可以用下式来估计概率

$$\hat{P}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \tag{1.2}$$

1.2 随机变量的定义

概率论是从数量方面来反映随机事件的统计规律性，为了便于从数量上描述、处理和解决各种与随机现象有关的理论和应用问题，就需要把随机试验的结果数量化。

在随机试验中，试验的结果有多种，如打靶命中的环数及一批产品中的次品数等。另一些随机试验尽管其可能结果与数值间没有直接的联系，如投掷硬币出现正面或反面等，但可以规定一些数值来表示试验的可能结果。如对于投掷硬币，用“1”表示“正面”，“0”表示“反面”。为了表示这些试验的结果，定义一个变量，变量的取值反映试验的各种可能结果，由于试验前无法确知试验结果，所以变量的值在试验前是无法确知的，即变量的值具有随机性，称这个变量为随机变量。下面给出详细的定义。

定义 设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，如果对于每一个 $e\in S$，有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 S 上的单值函数 $X(e)$，称 $X(e)$ 为随机变量，简记为 X。

从以上的定义可以看出，随机变量是定义在样本空间 S 上的一个单值函数。对应于不同的样本 e，$X(e)$ 的取值不同，$X(e)$ 的随机性在样本 e 中体现出来，因为在试验前究竟出现哪个样本事先无法确知，只有试验后才知道。X 的取值可以是连续的，也可以是离散

的，所以，根据 X 取值的不同可以分为连续型随机变量和离散型随机变量。

所谓离散型随机变量是指它的全部可能取值为有限个或可列无穷个。离散型随机变量的概率特性通常用概率分布律来描述。

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$，其概率为

$$P(X=x_k)=p_k \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.3}$$

其中，$\sum_{k=1}^{n} p_k=1$。

式(1.3) 称为 X 的概率分布或分布律。通常也用表格形式表示，见表 1.1。

表 1.1　概率分布表示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

下面介绍几种典型的离散随机变量的概率分布。

1. (0,1) 分布

设随机变量 X 的可能取值为 0 和 1 两个值，其概率分布为

$$P\{X=1\}=p,\quad P\{X=0\}=1-p \quad (0<p<1) \tag{1.4}$$

称 X 服从(0,1) 分布。如投掷硬币的试验，假定出现正面用 1 表示，出现反面用 0 表示，用 X 表示试验结果，那么 X 的可能取值为 0、1，X 是一个离散型随机变量，且服从(0,1) 分布，即

$$P\{X=1\}=P\{X=0\}=0.5 \tag{1.5}$$

2. 二项式分布

设随机试验 E 只有两种可能的结果 A 及 $\bar{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p=q$，将 E 独立地重复 n 次，这样的试验称为贝努利(Bernoulli) 试验，那么在 n 次试验中事件 A 发生 m 次的概率为

$$P_n(m)=\mathrm{C}_n^m p^m q^{n-m} \quad (0 \leqslant m \leqslant n) \tag{1.6}$$

上式刚好是 $(p+q)^n$ 展开式的第 $m+1$ 项，故称为二项式分布。

3. 泊松(Poisson) 分布

设随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,…，且概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k\,!} \quad (k=0,1,\cdots;\lambda>0) \tag{1.7}$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布。

【例 1.1】 已知

X	0	1	2
p	1/3	1/6	1/2

求：(1)$F(x)$。

(2)$P(X \leqslant 0.5)$，$P(1 < X \leqslant 1.5)$，$P(1 \leqslant X \leqslant 1.5)$。

解 (1)

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} P(x < 0) = 0 & (x < 0) \\ P(X < 1) = P(X = 0) = 1/3 & (0 \leqslant x < 1) \\ P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1/2 & (1 \leqslant x < 2) \\ P(X > 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 & (2 \leqslant x) \end{cases}$$

(2) 由分布函数可得

$$P(X \leqslant 0.5) = F(0.5) = 1/3$$

$$P(1 < X \leqslant 1.5) = F(1.5) - F(1) = 1/2 - 1/2 = 0$$

$$P(1 \leqslant X \leqslant 1.5) = F(1.5) - F(1) + P(X = 1) = 1/6$$

1.3 随机变量的分布函数与概率密度

设 X 为随机变量，x 为任意实数，定义

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} \tag{1.8}$$

为 X 的概率分布函数，或简称为分布函数。

分布函数具有如下性质：

(1)$F(x)$ 是一个不减函数，即 $x_2 > x_1$ 时有

$$F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0 \tag{1.9}$$

(2)
$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \tag{1.10}$$

(3)
$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1 \tag{1.11}$$

(4) 对于连续型随机变量 X，$F(x)$ 也是连续函数

(5)
$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) \tag{1.12}$$

(6)
$$P(X > x) = 1 - F(x) \tag{1.13}$$

对于连续型随机变量，其分布函数是连续的，在这种情况下，

$$F(x) = F(x^-) \tag{1.14}$$

所以对于任意 x 都有

$$P(X = x) = 0 \tag{1.15}$$

对离散型随机变量，分布函数是阶梯型的。设 x_i 表示 $F(x)$ 的不连续点，则

$$P(X=x_i)=p_i,\quad F(x_i)-F(x_i^-)=P(X=x_i)=p_i \tag{1.16}$$

这时 X 的统计特性由它的取值 x_i 及取值的概率 p_i 确定，也即由概率分布律确定。分布函数可表示为

$$F(x)=\sum_i p_i U(x-x_i) \tag{1.17}$$

其中，$p_i=P(X=x_i)$，$U(\cdot)$ 为单位阶跃函数。

由式(1.17)可以看出，离散型随机变量的分布函数是阶梯型函数，阶梯的跳变点位于随机变量的取值点，跳变的高度等于随机变量取该值的概率。

比如(0,1)分布的随机变量 X(图1.1)，其分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \dfrac{1}{2} & (0\leqslant x<1)\\ 1 & (x\geqslant 1)\end{cases}$$

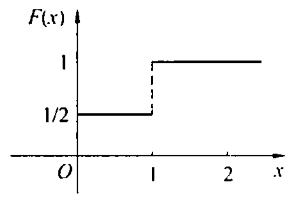

图1.1 (0,1)分布的分布函数

如果 X 的概率分布既不是连续的也不是离散的，那么称 X 为混合型随机变量。

随机变量 X 的分布函数的导数定义为它的概率分布密度，简称为概率密度或分布密度，记为 $f(x)$，即

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.18}$$

由概率密度的定义及分布函数的性质，可以得出概率密度的如下性质：

①$f(x)\geqslant 0$，也即概率密度是非负的函数。

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$，即概率密度函数与横轴 x 所围成的面积为1。

③$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$，这说明随机变量 X 落在区间(x_1,x_2)上的概率等于图1.2中阴影区域的面积。从这条性质也可以看出，对于连续型随机变量，有 $P(X=x)=0$。

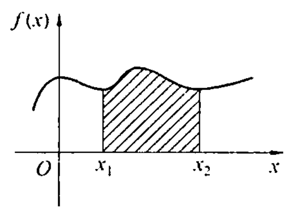

图1.2 随机变量落入(x_1,x_2)的概率

对于离散型随机变量，由于它的概率分布函数是阶梯型，那么它的概率密度函数是一串 δ 函数之和，δ 函数出现在随机变量的取值点，强度为取该值的概率，即

$$f(x)=\sum_i P_X(i)\delta(x-x_i)=\sum_i p_i\delta(x-x_i) \tag{1.19}$$

式中，x_i 为离散型随机变量 X 的取值；$p_i=P(X=x_i)$。

随机变量也可以是混合类型的，其分布函数由阶跃的间断部分和处处连续的部分组