分块算子矩阵谱理论及其应用

吴德玉　阿拉坦仓 编著

科学出版社

分块算子矩阵谱理论及其应用

吴德玉　阿拉坦仓　编著

科学出版社
北京

内 容 提 要

本书以 2×2 分块算子矩阵的谱分析为主线，对分块算子矩阵的一些最基本的结构和性质进行阐述. 全书共分 4 章. 第 1 章简要介绍了 Hilbert 空间和 Hilbert 空间中线性算子(包括有界和无界)谱分析相关的基本概念和一些理论；第 2 章讨论了有界分块算子矩阵的谱分析，包括对角分块算子矩阵和上三角分块算子矩阵的谱理论、2×2 分块算子矩阵的二次数值域、Schur 补等问题；第 3 章讨论了无界分块算子矩阵的闭性(可闭性)问题、二次数值域、共轭算子问题和谱估计等内容；第 4 章讨论了一类特殊的分块算子矩阵——无穷维 Hamilton 算子的谱理论、特征函数系的完备性等内容.

本书适合于数学系高年级本科生及研究生使用，也可供相关专业的教师和专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

分块算子矩阵谱理论及其应用/吴德玉，阿拉坦仓编著. —北京：科学出版社，2013
ISBN 978-7-03-036796-9

Ⅰ. ①分…　Ⅱ. ①吴…　②阿…　Ⅲ. ①谱算子—研究　Ⅳ. ①O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 037915 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：郭瑞芝
责任印制：阎　磊／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第 一 版　开本：720 × 1000 B5
2013 年 3 月第一次印刷　印张：15
字数：290 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

Hilbert 空间中的线性算子理论, 尤其是自伴算子谱理论, 是 20 世纪数学科学领域取得的最重要的成果之一, 它的奠基人是 D.Hilbert. 通过研究线性算子的谱理论, 不仅可以了解算子本身的结构, 还可以刻画系统的能量变化、稳定性以及解的构造等特性. 目前, 自伴算子谱理论已经形成了比较完善的框架体系, 求解偏微分方程的分离变量法 (又称 Fourier 级数法) 就是以该理论为基础的. 值得一提的是, 自伴算子对应的是能量守恒系统 (也称为封闭系统), 而现实问题中存在着很多能量不守恒的系统（也称为开放系统）, 它对应的是非自伴算子. 因此, 非自伴算子谱理论与自伴算子谱理论同样重要, 甚至更广泛. 目前为止, 非自伴算子谱理论还未形成系统的理论框架, 只能对个别算子进行个别研究.

在诸多线性算子中有一类值得我们去关注, 那就是分块算子矩阵. 分块算子矩阵是以 Hilbert 空间或 Banach 空间中线性算子为元素的特殊矩阵, 它广泛出现于系统理论、非线性分析以及发展方程问题等领域. 例如, 由无穷维 Hamilton 系统导出的无穷维 Hamilton 算子、电磁场论问题导出的 Dirac 算子以及 Krein 空间中的标准对称算子等. 从实际应用角度来说, 分块算子矩阵在应用偏微分方程求解问题、弹性力学、流体力学、磁流体动力学以及量子力学等数学物理问题中有重要应用. 例如, Ekman 边界层稳定性理论可以转化为如下系统:

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda\mathcal{B}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

这里 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 分别表示形如

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} (-D^2+\alpha^2)^2+\mathrm{i}\alpha RV(-D^2+\alpha^2)+\mathrm{i}\alpha RV'' & 2D \\ 2D+\mathrm{i}\alpha RU' & -D^2+\alpha^2+\mathrm{i}\alpha RV \end{bmatrix}$$

和

$$\mathcal{B}=\begin{bmatrix} -D^2+\alpha^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

的分块算子矩阵, 其中 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}, t\in[0,+\infty)$, 函数 U,V 是速度剖面, α,R 是具有特定含义的常数.

从理论研究角度来说, Hilbert 空间中的一般线性算子在一定条件下可以转化成分块算子矩阵. 例如, 当 Hilbert 空间 X 满足 $X=M_1\oplus M_2$, 其中 M_1 和 M_2 是 X

的闭线性子空间, 从 X 到 M_1, M_2 的投影算子 P_1, P_2 满足 $P_i\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T), i = 1, 2$, 则线性算子 T 可以表示成分块算子矩阵

$$T = \begin{bmatrix} Q_1^*P_1TP_1Q_1 & Q_1^*P_1TP_2Q_2 \\ Q_2^*P_2TP_1Q_1 & Q_2^*P_2TP_2Q_2 \end{bmatrix},$$

其中算子 $Q_k: M_k \to X, k = 1, 2$ 定义为

$$Q_1x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall x_1 \in M_1$$

和

$$Q_2x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \forall x_2 \in M_2.$$

容易验证 $Q_k^*, k = 1, 2$ 是 X 上到 M_k 中的有界算子, 且满足

$$Q_k^*\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_k, \quad \forall x_k \in M_k, k = 1, 2.$$

进一步, 当 M_1 是算子 T 的不变子空间, 则 $Q_2^*P_2TP_1Q_1 = 0$; 如果算子 T 被 M_1 和 M_2 完全可约, 则 $Q_2^*P_2TP_1Q_1 = 0$ 且 $Q_1^*P_1TP_2Q_2 = 0$, 即在一定的空间分解下, 算子 T 可表示成上三角分块算子矩阵或下三角分块算子矩阵, 甚至是对角分块算子矩阵. 此时, 关于算子 T 的研究问题可以转化成 2×2 分块算子矩阵的研究问题. 因此, 关于分块算子矩阵的研究不仅有广泛的实际应用价值, 而且有深厚的理论背景.

目前, 关于分块算子矩阵谱理论研究已经取得了很大的进展, 国内外学者围绕分块算子矩阵的谱分析, 包括谱扰动、谱补问题、可逆补、二次数值域以及 Frobinus-Schur 分解等研究内容, 发表了多篇高水平学术论文. 其中, 国内有杜鸿科教授、侯晋川教授和内蒙古大学阿拉坦仓教授为带头人的内蒙古大学无穷维 Hamilton 算子研究团队等; 国外有 R.Mennicken、C.Treter、H.Zguitti、T.Y.Azizov 和 Kruina 等学者. 然而, 目前为止国内还未正式出版过专门介绍分块算子矩阵谱理论的教材及专著. 基于以上原因, 我们把自己的研究成果与国内外同行的研究成果进行结合, 撰写了本书.

本书以 2×2 分块算子矩阵的谱分析为主线, 对分块算子矩阵的一些最基本的结构和性质进行阐述. 第 1 章简要介绍 Hilbert 空间的概念和 Hilbert 空间中的线性算子 (包括有界和无界) 谱相关的基本理论和一些结果, 包括谱点分类以及数值域的谱包含关系等, 为引入分块算子矩阵谱分析奠定了基础. 第 2 章讨论有界分块算子矩阵的谱分析, 包括对角分块算子矩阵和上三角分块算子矩阵的谱理论等. 此

外, 还讨论有界分块算子矩阵的二次数值域、Schur 补等问题, 为实现分块算子矩阵理论从有界到无界的推广作铺垫. 第 3 章讨论无界分块算子矩阵的闭性 (可闭性) 问题、二次数值域、共轭算子问题以及生成 C_0 半群问题等内容, 更深刻揭示了分块算子矩阵的研究价值和理论意义. 第 4 章作为前 3 章的应用, 讨论一类特殊的分块算子矩阵 —— 无穷维 Hamilton 算子, 包括非负 Hamilton 算子的可逆性、无穷维 Hamilton 算子的辛自伴性、特征函数系的完备性等问题以及极大确定不变子空间的存在性问题. 值得一提的是, 通过研究无穷维 Hamilton 算子极大确定不变子空间的存在性问题, 我们还探讨不定度规空间中线性算子谱理论和 $\Im$- 数值域的谱包含关系等问题.

本书的宗旨是向读者较系统地介绍分块算子矩阵的理论和方法, 以 2×2 分块算子矩阵的谱分析为主线, 对分块算子矩阵的一些最基本的结构和性质进行阐述. 作者设定的目标有两个：一是填补国内分块算子矩阵谱理论相关教材或专著的空白; 二是用最简练的语言介绍分块算子矩阵谱理论研究现状的同时, 作为该理论的应用介绍一类特殊分块算子矩阵 —— 无穷维 Hamilton 算子, 使本书有很好的可读性. 本书适合于数学系高年级本科生或研究生使用, 也可供相关专业的教师和专业人员参考.

在本书写作期间得到了内蒙古大学阿拉坦仓教授为带头人的无穷维 Hamilton 算子研究团队的大力支持和帮助. 黄俊杰教授、侯国林教授、海国君博士、金国海博士和齐雅茹博士在繁忙的教学科研之余, 仔细审读了书稿, 提出了很有价值的意见和建议, 对此作者表示衷心感谢! 还感谢内蒙古大学数学科学学院领导和全体同事, 他们所提供的轻松愉快的工作环境保证了本书的撰写进度. 两位作者的妻子高玉梅女士和李红女士, 始终全力支持作者的科研事业, 为作者营造了温馨的家庭环境, 谨以此书献给她们. 本书的研究内容得到了国家自然科学基金 (项目编号:10962004, 11101200)、高等学校博士学科点专项科研基金 (项目编号：20111501110001)、内蒙自然科学基金 (项目编号：2010MS0108) 和内蒙古大学高层次引进人才科研启动基金 (项目编号:Z20090103) 的支持.

由于时间仓促, 编者水平有限, 书中难免有不当之处, 敬请专家和读者批评指正!

吴德玉　阿拉坦仓

2012 年 8 月于内蒙古大学

目　　录

第 1 章　Hilbert 空间中的线性算子理论

1.1　Hilbert 空间

1.1.1　内积空间

有限维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量的“角度”和“长度”可以通过欧氏空间中两个向量的内积来定义, 即空间 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零向量 x 与 y 的夹角 θ, 有公式

$$\cos\theta = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|},$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 是向量的内积, $\|\cdot\|$ 表示向量的长度, 而且

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

因此, 内积是在有限维向量空间中研究问题的重要工具.

类似于有限维空间中的内积, 在无穷维空间中也可以引入内积的概念.

定义 1.1.1　设 X 为复线性空间, 如果对任意 $x,y \in X$ 都恰有一个复数, 记为 (x,y) 与之对应, 并且这个对应满足以下性质:

(1)(正定性) $(x,x) \geqslant 0, (x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$;

(2)(可加性) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

(3)(齐次性) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

(4)(共轭对称性) $(x,y)=\overline{(y,x)}$,

其中 $x,y,z \in X, \alpha \in \mathbb{C}$, 则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积. X 上定义了内积称为内积空间.

由内积的定义, 对任意 $x,y \in X, \alpha \in \mathbb{C}$ 有 $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y)$.

定义 1.1.2　在内积空间 X 中, 我们定义

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.1}$$

并称其为 x 的范数.

以下是内积空间的例子.

例 1.1.1　设 $\mathbb{C}^n$ 是 $n(n \in \mathbb{N})$ 维复向量空间, 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), y=(y_1,y_2,\cdots,y_n) \in \mathbb{C}^n$, 定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i},$$

则 $\mathbb{C}^n$ 是内积空间.

例 1.1.2　设 $X=L^2[a,b]$, 即在区间 $[a,b]$ 上定义的满足 $\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$ 的复值可测函数的全体, 对任意 $x(t),y(t)\in X$, 定义

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

则 X 是内积空间.

例 1.1.3　设 $X=C_{\mathbb{R}}[0,1]$ 是闭区间 $[0,1]$ 上定义的实值连续函数的全体, 对任意 $x(t),y(t)\in X$, 定义

$$(x,y)=\int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

则 X 是内积空间.

引理 1.1.1(Schwarz 不等式)　设 X 为内积空间, 则

$$|(x,y)|\leqslant \|x\|\cdot\|y\|,$$

其中 $x,y\in X$.

证明　如果 $x=0$, 则 Schwarz 不等式显然成立. 因此, 不妨设 $x\neq 0$, 则对任意 $\alpha\in\mathbb{C}$ 有

$$0\leqslant(\alpha x-y,\alpha x-y)=|\alpha|^2(x,x)-\alpha(x,y)-\overline{\alpha}(y,x)+(y,y).$$

取 $\alpha=\dfrac{(y,x)}{(x,x)}$, 考虑到 $(x,y)=\overline{(y,x)}$, 上式变为

$$(y,y)-\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)}\geqslant 0,$$

化简即得 $|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$. 结论证毕.∎

运用范数定义和 Schwarz 不等式容易证明如下结论.

引理 1.1.2(三角不等式)　设 X 为内积空间, 则

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,$$

其中 $x,y\in X$.

定义 1.1.3　令 $\{f_n\}$ 为内积空间 X 中的序列, 如果存在 $f\in X$ 使得当 $n\to\infty$ 时

$$\|f_n-f\|\to 0$$

成立, 则称 $\{f_n\}$ 收敛到 f, 且称 f 为 $\{f_n\}$ 的极限. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 或者 $f_n\to f$. 其中范数 $\|f_n-f\|$ 由式 (1.1.1) 定义.

推论 1.1.1 设 X 为内积空间, 则

(1)$f_n \to f$ 蕴含 $\|f_n\| \to \|f\|$ 且序列 $\{f_n\}$ 有界;

(2)$f_n \to f, g_n \to g$ 蕴含 $(f_n, g_n) \to (f, g)$,

其中 $\{f_n\}, \{g_n\} \subset X$.

证明 (1)由三角不等式得

$$\big|\|f_n\| - \|f\|\big| \leqslant \|f_n - f\|,$$

从而 $\|f_n\| \to \|f\|$. 由上式还得

$$\|f_n\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f\|,$$

于是 $\{f_n\}$ 有界.

(2)由于

$$\begin{aligned}|(f_n, g_n) - (f, g)| &\leqslant |(f_n, g_n) - (f_n, g)| + |(f_n, g) - (f, g)| \\ &\leqslant \|f_n\|\|g_n - g\| + \|f_n - f\|\|g\|,\end{aligned}$$

由 (1) 知 $\{f_n\}$ 有界, 当 $f_n \to f, g_n \to g$ 时

$$\|f_n\|\|g_n - g\| + \|f_n - f\|\|g\| \to 0,$$

结论证毕.■

定义 1.1.4 令 $\{f_n\}$ 为内积空间 X 中的序列, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n, m > n_0$ 时

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

成立, 则称 $\{f_n\}$ 为空间 X 中的 Cauchy 列.

容易证明, 内积空间中的任意收敛序列定是 Cauchy 列, 且 Cauchy 列具有如下性质.

推论 1.1.2 设 X 为内积空间.

(1)如果 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列, 则序列 $\{\|f_n\|\}$ 收敛 (因此有界);

(2)如果 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 则序列 $\{(f_n, g_n)\}$ 是收敛列, 其中 (f_n, g_n) 表示 f_n 和 g_n 的内积.

证明 (1) 由三角不等式得

$$\big|\|f_n\| - \|f_m\|\big| \leqslant \|f_n - f_m\|,$$

从而序列 $\{\|f_n\|\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列. 由于 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列是收敛列, 于是结论得证.

(2)只需证明 $\{(f_n, g_n)\}$ 是 Cauchy 列即可. 由 (1) 知 $\{f_n\}, \{g_m\}$ 有界, 即存在 $M > 0$ 使得对所有 $n, m \in \mathbb{N}$ 有

$$\|f_n\| \leqslant M, \qquad \|g_m\| \leqslant M.$$

又因为

$$\begin{aligned}|(f_n, g_n) - (f_m, g_m)| &\leqslant |(f_n, g_n - g_m)| + |(f_n - f_m, g_m)| \\ &\leqslant M(\|g_n - g_m\| + \|f_n - f_m\|),\end{aligned}$$

于是序列 $\{(f_n, g_n)\}$ 是 Cauchy 列. 结论证毕.■

1.1.2　完备内积空间

由推论 1.1.2 可知, $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列蕴含 $\{\|f_n\|\}$ 是收敛列, 那么, $\{f_n\}$ 是否为收敛呢? 即 Cauchy 列是否蕴含收敛列呢? 答案是否定的.

例 1.1.4　设 $X = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$(例 1.1.3), $f_1 = 1$ 且 $n = 2, 3, \cdots$ 时, 有

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 - n(x - \dfrac{1}{2}), & \text{当 } \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{当 } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

则对 $2 \leqslant n \leqslant m$ 有

$$\|f_n - f_m\|^2 \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n - f_m|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n},$$

从而 $\{f_n(x)\}$ 是 Cauchy 列. 下面证明 $\{f_n(x)\}$ 不是收敛列. 假定存在 $f \in X$ 使得 $f_n \to f$, 则对 $2 \leqslant n \leqslant m$ 有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - 1|^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \\ =&\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - f_m(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(x) - f_m(x)|^2 \mathrm{d}x \\ \leqslant&\int_0^1 |f(x) - f_m(x)|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $m \to \infty$ 时上式右边趋于 0, 从而对每个 $n \geqslant 2$ 有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - 1|^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0.$$

鉴于 $f(x)$ 的连续性, 由上式得当 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时 $f(x) = 1$ 且当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 时 $f(x) = 0$. 这又与 $f(x)$ 的连续性矛盾. 因此, $\{f_n(x)\}$ 不是收敛列.

定义 1.1.5 如果内积空间中的每个 Cauchy 列均为收敛列, 则称此内积空间为完备内积空间, 也称为 Hilbert 空间.

例 1.1.5 内积空间 $\mathbb{C}^n$ 是 Hilbert 空间.

例 1.1.6 设 $X = \ell^2$, 即满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ 的复值数列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的全体. 定义内积

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i},$$

则 ℓ^2 是内积空间, 且是一个 Hilbert 空间.

例 1.1.7 设 $X = L^2[0,1]$, 即在区间 $[0,1]$ 上定义的满足 $\int_0^1 |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$ 的全体复值可测函数, 定义内积

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)} \mathrm{d}t,$$

则 X 成为一个 Hilbert 空间.

例 1.1.8 内积空间 $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ 不是 Hilbert 空间 (例 1.1.4).

定义 1.1.6 内积空间 X 中的两个元素 x, y 称为正交的, 如果 $(x, y) = 0$, 记为 $x \perp y$. 内积空间 X 中的两个集合 M, N 称为正交的, 记为 $M \perp N$, 如果对任意 $x \in M, y \in N$ 有 $x \perp y$.

设 M 是内积空间 X 的子集, M 的正交补定义为

$$M^{\perp} = \{x \in X : x \perp y, \forall y \in M\},$$

即 X 中与 M 正交的元素全体. 如果 X 是 Hilbert 空间, M_1, M_2 是两个子集且满足 $M_1 \perp M_2$, 则 $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, 即 M_1, M_2 只有唯一的公共元素 0, 此时形如 $x_1 + x_2$ 的元素的全体 $\{x_1 + x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$ 称为 M_1 和 M_2 的正交和, 记为 $M_1 \oplus M_2$.

区别于一般 Banach 空间, Hilbert 空间具有如下射影定理描述的美好性质, 具体证明可参阅文献 [1].

定理 1.1.1(射影定理) 设 M 是 Hilbert 空间 X 的闭线性子空间, 则每个 $x \in X$ 都可以唯一地表示成

$$x = y + z, \quad y \in M, z \in M^{\perp}.$$

由 x 与 M 唯一确定的 y 也称为 x 在 M 上的正交射影.

容易证明下列结论.

定理 1.1.2　设 M, N 是内积空间 X 中的非空集合.

(1)如果 $M \subset N$, 则 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$ 且 $M^{\perp\perp} \subset N^{\perp\perp}$;

(2)$M \subset M^{\perp\perp}$;

(3)$M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$;

(4)如果 $x \in M \cap M^{\perp}$, 则 $x = 0$;

(5)$\{0\}^{\perp} = X, X^{\perp} = \{0\}$.

推论 1.1.3　设 M 是内积空间 X 中的非空集合, 则 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$, 其中 $\overline{M}$ 表示 M 的闭包.

证明　由正交补定义有 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$, 又因 $(M^{\perp})^{\perp}$ 是闭的, 故

$$\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}.$$

设 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$, 因为 $\overline{M}$ 是 X 的子空间, 根据射影定理

$$x = y + z, \quad y \in \overline{M}, z \in \overline{M}^{\perp}.$$

考虑到 $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$, 上述表达式两侧与 z 作内积得

$$0 = (x, z) = (y, z) + (z, z) = (z, z),$$

故 $z = 0$, 从而 $x = y \in \overline{M}$. 结论证毕.■

定理 1.1.3(Pythagoream 等式)　如果 $x \perp y$, 则 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. 更一般地, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相互正交, 则 $\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

证明　由于 $x \perp y$, 有

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

更一般地, 假设 $k = n - 1$ 时成立, 则 $k = n$ 时, 令 $x = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k, y = x_n$, 则 $x \perp y$ 且

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

即 $\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$. 结论证毕. ■

引理 1.1.3(极化恒等式)　内积空间 X 中任意两个向量 x, y 有关系式

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \mathrm{i}\|x + \mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x - \mathrm{i}y\|^2)$$

成立.

证明　由于

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y),$$

$$\|x-y\|^2=(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y),$$

$$\|x+\mathrm{i}y\|^2=(x,x)-\mathrm{i}(x,y)+\mathrm{i}(y,x)+(y,y),$$

$$\|x-\mathrm{i}y\|^2=(x,x)+\mathrm{i}(x,y)-\mathrm{i}(y,x)+(y,y),$$

于是

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2=4(x,y),$$

结论证毕.∎

定义 1.1.7 内积空间 X 中的一族元素 $\{x_n\}$ 称为正规正交集, 如果满足

$$(x_i,x_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

设 $\{x_n\}\subset X$ 是线性无关的序列, 则 $\{x_n\}$ 可以正规正交化. 令

$$\begin{aligned}
&y_1=x_1,\\
&y_2=x_2-\frac{(y_1,x_2)}{(y_1,y_1)}y_1,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&y_n=x_n-\frac{(y_1,x_n)}{(y_1,y_1)}y_1-\frac{(y_2,x_n)}{(y_2,y_2)}y_2-\cdots-\frac{(y_{n-1},x_n)}{(y_{n-1},y_{n-1})}y_{n-1},
\end{aligned}$$

再取

$$v_n=\frac{y_n}{\|y_n\|},\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $\{v_n\}$ 就是正规正交集.

定理 1.1.4(Pythagoream 定理) 设 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 是内积空间 X 中的正规正交集, 则对任意 $x\in X$ 有关系式

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^N|(x,x_n)|^2+\|x-\sum_{n=1}^N(x,x_n)x_n\|^2$$

和

$$\|x\|^2\geqslant\sum_{n=1}^N|(x,x_n)|^2$$

成立.

证明 由于

$$x=\sum_{n=1}^N(x,x_n)x_n+x-\sum_{n=1}^N(x,x_n)x_n,$$

而且经计算得知 $\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n$ 与 $x-\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n$ 是正交的. 于是

$$\begin{aligned}(x,x)&=\|\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\|^2+\|x-\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\|^2\\&=\sum_{n=1}^{N}|(x,x_n)|^2+\|x-\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\|^2.\end{aligned}$$

进而也有 $\|x\|^2\geqslant\sum_{n=1}^{N}|(x,x_n)|^2$. 结论证毕.■

根据 Pythagoream 定理容易证明下列推论.

推论 1.1.4　如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 X 中的正规正交集, 则对任意 $x\in X$ 有

$$\|x\|^2\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}|(x,x_n)|^2.$$

特别地, $n\to\infty$ 时 $(x,x_n)\to 0$.

定义 1.1.8　设 S 是 Hilbert 空间 X 中的正规正交集, 如果 X 中没有其他的正规正交集真包含 S, 则称 S 为 X 的正规正交基.

下面的引理将给出 Hilbert 空间正规正交基的一个等价描述, 根据正规正交基的定义证明是显然的.

引理 1.1.4　设 S 是 Hilbert 空间 X 中的正规正交集, 则 S 为 X 的正规正交基的充分必要条件是 X 中没有非零元与 S 中的每个元正交.

根据 Zorn 引理, 可以证明每个非零的 Hilbert 空间有正规正交基; 每个可分 Hilbert 空间有可数的正规正交基. 证明可参阅文献 [2].

定理 1.1.5(Parseval 等式)　设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可分 Hilbert 空间 X 中的正规正交基, 则对每个 $x\in X$ 有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,x_n)|^2.$$

证明　由于 $\|\sum_{n=1}^{\infty}(x,x_n)x_n\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|(x,x_n)|\leqslant\|x\|$, 且

$$\left(x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,x_n)x_n,x_j\right)=0,\quad j=1,2,\cdots,$$