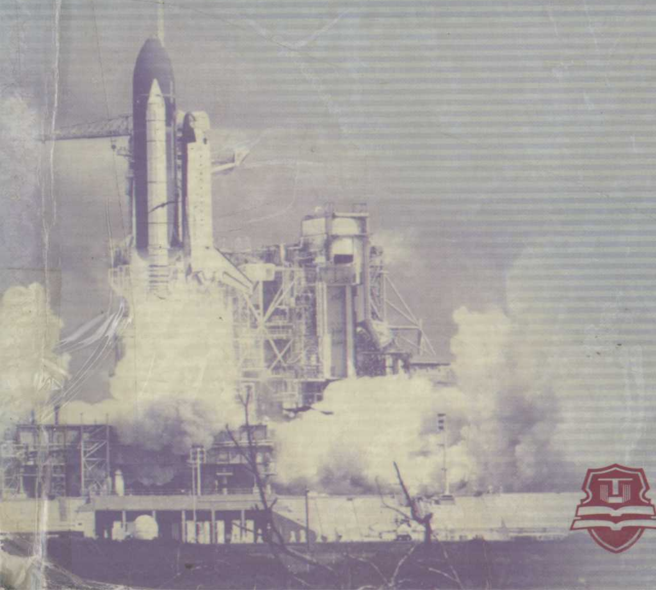
任传荣 等编

高等数学习题课讲义



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学习题课讲义

（修订版）

任传荣　张　青　廖一原
韩　雁　石新华

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题讲义/任传荣等编.—2版.—天津:天津大学出版社,2001.7
ISBN 7-5618-1020-2

Ⅰ.高… Ⅱ.任… Ⅲ.高等数学-高等学校-习题 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第045590号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷	天津市宝坻县第二印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	850mm×1168mm　1/32
印　　张	17
字　　数	442千
版　　次	2001年7月第2版
印　　次	2001年7月第1次
印　　数	1—4 000
定　　价	23.00元

前　言

高等数学是工科院校重要的基础课之一，而习题课又是一个重要的教学环节，因为只有完成一定数量的习题，才能理解和掌握高等数学的基本概念和基本方法．搞好习题课教学，有助于加强学生的基本功训练，培养和提高数学演算能力、逻辑推理能力和空间图形的想像能力，进而达到系统理解、深化和巩固课堂所学内容的目的．

为了加强高等数学习题课教学，根据该课程的特点和要求，在教学实践的基础上，我们编写了这本《高等数学习题课讲义》．全书共分 12 章．包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数及微分方程．每章均包括基本要求、基本概念和主要结论、例题（包括判断与证明题）、练习题，并附有练习题答案，可供学生自检之用．

本书可供各类工科院校作为高等数学习题课教材或参考书，也可作为学生参加该课程考试的复习材料．

本书第一、二、三章由任传荣编写；第四、五、六章由张青编写；第七、八章由廖一原编写；第九、十章由韩雁编写；第十一、十二章由石新华编写．

在讲义的编写过程中，得到诸多老师和同志们的大力支持．张国强副教授和潘晓苏副教授对本书进行了认真审阅，天津大学毛云英教授于繁忙中认真审阅了初稿，并对本书提出了许多宝贵的意见，在此向他们表示谢意．同时感谢天津大学出版社及其他对出版本书给予大力支持的同志．

限于编者水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正.

编者

1998 年 7 月

修订版前言

本书第一版自1998年出版以来,得到广大读者和使用本书的同行的认可和关心,在此表示衷心感谢!为了配合高等数学课程的教学改革,我们通过近几年的教学实践,并在汲取同行及广大读者宝贵意见的基础上,对第一版作了本次修订.

这次修订主要目的是:(1)配合高等数学课程的教学改革,按照分块教学模式,将高等数学分成六部分:一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、级数与微分方程。每部分相应配套了综合练习题.(2)为了提高学生综合运用高等数学知识的能力,并且结合部分报考研究生学生的需要,补充增添了一定量的综合题,并给出了答案,对其中典型题做了提示与解答.

这次修订工作由贾云暖、刘广瑄两位老师承担,其中一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数三部分的综合练习题由贾云暖编写;多元函数微分学、多元函数积分学、级数与微分方程三部分的综合练习题由刘广瑄编写。

《高等数学习题课讲义》既可作为各高等院校高等数学习题课教材,也可作为一年级大学生和考研学生的学习参考书。

编者

2001.6.

目　录

第一部分　一元函数微分学

第二部分　一元函数积分学

第三部分　向量代数与空间解析几何

第四部分　多元函数微积分学

第五部分　级数与微分方程

第一部分　一元函数微分学

第一章　函数与极限

学习目的与要求　理解函数、极限和连续这三个高等数学中的基本概念，其中极限的概念及其运算是本章的重点与难点.掌握极限的运算法则和两个极限存在准则，以及基本初等函数的性质及其图形，要了解间断点的概念和闭区间上连续函数的性质.

函　　数

一、基本概念和主要结论

1.函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是已知数集，如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应规律 f，总有惟一确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数.记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

2.函数的图形

已知函数 $y=f(x)$，定义域为 D，称平面点集：$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形.

3.函数的几种特性

(1)有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$，如果存在正数 M，使得对于一切的 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数

7.23-康

集 I 上有界.

(2)单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或减少)的.

(3)周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于一切 $x\in D$,有 $(x+T)\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.通常我们说函数的周期是指最小正周期.

(4)奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意的 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.如果对于任意的 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

4.反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.于是对于任意的 $y\in W$,有惟一确定的 $x\in D$ 与之对应,使得 $y=f(x)$,这样在 W 上定义了一个新的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.记作 $x=\varphi(y)$(或 $x=f^{-1}(y)$).

5.复合函数 内函数的值域为外函数定义域的子集.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2,值域为 W_2,并且 $W_2\subset D_1$,由此对于任意的 $x\in D_2$ 有惟一确定的 $\varphi(x)=u\in W_2\subset D_1$,于是对此 $u\in D_1$ 有惟一确定的 $y=f(u)$,这样确定的新函数 $y=f[\varphi(x)]$,$x\in D_2$,称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

6.初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函

数，统称为基本初等函数．凡是由基本初等函数，经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

二、例题

判断题

1．若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为周期函数（周期均为正整数），则 $f(x)+g(x)$ 必为周期函数． (√)

事实上，设 T_1、T_2 分别为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期，T 为 T_1 与 T_2 的最小公倍数，则 T 必为 $f(x)+g(x)$ 的周期．

?2．周期函数一定有最小正周期． (×)

例如，函数 $f(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$ 为周期函数，但无最小正周期．

$\frac{1}{f(x)}$

3．若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=x$． (×)

事实上，$f[f(x)]=\begin{cases} x, & x\neq 0; \\ \text{无定义}, & x=0. \end{cases}$

4．设函数 $f(u)=\arcsin u$，$u=\varphi(x)=2+x^2$，则 $f[\varphi(x)]$ 一定为 x 的复合函数． (×)

$|u|\le 1$

事实上，两个函数不能复合．

5．若函数 $f(u)$ 为偶函数，$u=\varphi(x)$ 为奇函数，则 $f[\varphi(x)]\cdot\varphi(x)$ 一定为奇函数． (√)

事实上，$f[\varphi(-x)]\cdot\varphi(-x)=-f[\varphi(x)]\cdot\varphi(x)$．

6．设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 (a,b) 上的无界函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 一定为 (a,b) 上的无界函数． $y=\sin x$ $y=\frac{1}{x}$ (×)

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为无界函数，$g(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上也为无界函数，但 $f(x)\cdot g(x)=1$ 为 $(0,+\infty)$ 上的有界函数．

$y=\frac{\sin x}{x}$

7. 设 $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同. (×)

事实上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同.

8. 设 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同. (√)

事实上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同, 并且对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}$.

计算与证明题

例 1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$, 求(1) $f[f(x)]$, (2) $f(x)$ 的反函数.

解: (1) $f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\dfrac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x^2/1+x^2)}}=$

$\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}(x>0)$.

(2) 令 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 两边平方有

$$y^2=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

从而有 $x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 或 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}(0<x<1)$.

例 2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解: $f[g(x)]=\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)}=\dfrac{x-1}{x+1}(x\neq 0, x\neq -1)$.

$$g[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}(x\neq 1, x\neq -1).$$

例 3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-l,+l)$ 内有定义, 试证

$F_1(x)=f(x)+f(-x), F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 分别为偶

$(1) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{2x^2}{1+x^2}}} = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\ (x>0)$ $\quad x = \sqrt{\dfrac{y^2}{1+y^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

$(2)\ y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad y^2(1-x^2) = x^2$, $y^2 - x^2y^2 = x^2$, $y^2 = (1+y^2)x^2$ $\quad \therefore y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

函数和奇函数.

证: 因为 $F_1(-x) = f(-x) + f[-(-x)]$

$$= f(-x) + f(x) = F_1(x),$$

$$F_2(-x) = f(-x) - f[-(-x)] = f(-x) - f(x)$$

$$= -F_2(x).$$

所以它们分别为偶函数和奇函数. $f(x)$ 大于 $\forall M>0$.

例 4. 证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

证: 对于任意给定的正数 M, 取 $n = [M] + 1$, 此时 $\dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \in (0,1)$, 则有

$$f\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M.$$

所以, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

例 5. 证明任意有理数均为狄利克雷函数的周期. n

证: 根据狄利克雷函数的定义, 有

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数;} \\ 0, x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$ $[M]+1$

设 r 为任意给定的有理数, 于是当 x 为有理数时, $r + x$ 也为有理数, 当 x 为无理数时, $r + x$ 也为无理数, 于是

$$\mathrm{D}(x + r) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数;} \\ 0, x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

从而, $\mathrm{D}(x + r) = D(x)$. 但不存在最小正周期.

例 6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| = 1; \\ -1, & |x| > 1. \end{cases}$ $\quad g(x) = \mathrm{e}^x$.

求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

$f[g(x)] = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \dfrac{x-1}{x+1}$

$g[f(x)] = \dfrac{1+x}{1-x}$

解:

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & (|e^x|<1)\\0, & (|e^x|=1)\\-1, & (|e^x|>1)\end{cases}=\begin{cases}1, & (e^x<1)\\0, & (e^x=1)\\-1, & (e^x>1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0;\\0, & x=0;\\-1, & x>0.\end{cases}$$

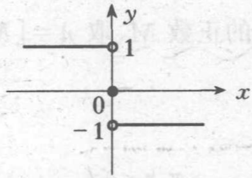


图 1-1

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, |x|<1\\e^0, |x|=1\\e^{-1}, |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e, & |x|<1;\\1, & |x|=1;\\\dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

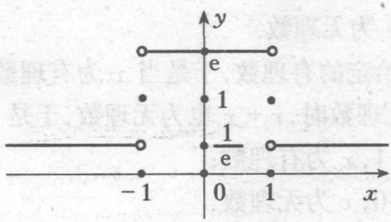


图 1-2

三、练习题 1-1

1. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$