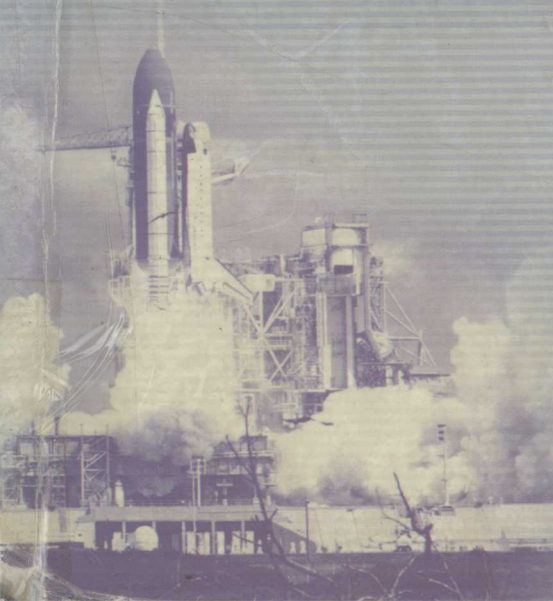


任传荣 等编

高等数学学习题课讲义



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学习题课讲义

(修订版)

任传荣 张 青 廖一原

韩 雁 石新华

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题讲义 /任传荣等编. —2 版. —天津:天津大学出版社,2001.7

ISBN 7-5618-1020-2

I. 高… II. 任… III. 高等数学—高等学校—习题
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 045590 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地 址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话	发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷	天津市宝坻县第二印刷厂
经 销	全国各地新华书店
开 本	850mm×1168mm 1/32
印 张	17
字 数	442 千
版 次	2001 年 7 月第 2 版
印 次	2001 年 7 月第 1 次
印 数	1—4 000
定 价	23.00 元

前 言

高等数学是工科院校重要的基础课之一，而习题课又是一个重要的教学环节，因为只有完成一定数量的习题，才能理解和掌握高等数学的基本概念和基本方法。搞好习题课教学，有助于加强学生的基本功训练，培养和提高数学演算能力、逻辑推理能力和空间图形的想像能力，进而达到系统理解、深化和巩固课堂所学内容的目的。

为了加强高等数学习题课教学，根据该课程的特点和要求，在教学实践的基础上，我们编写了这本《高等数学习题课讲义》。全书共分 12 章，包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数及微分方程。每章均包括基本要求、基本概念和主要结论、例题（包括判断与证明题）、练习题，并附有练习题答案，可供学生自检之用。

本书可供各类工科院校作为高等数学习题课教材或参考书，也可作为学生参加该课程考试的复习材料。

本书第一、二、三章由任传荣编写；第四、五、六章由张青编写；第七、八章由廖一原编写；第九、十章由韩雁编写；第十一、十二章由石新华编写。

在讲义的编写过程中，得到诸多老师和同志们的大力支持。张国强副教授和潘晓苏副教授对本书进行了认真审阅，天津大学毛云英教授于繁忙中认真审阅了初稿，并对本书提出了许多宝贵的意见，在此向他们表示谢意。同时感谢天津大学出版社及其他对出版本书给予大力支持的同志。

限于编者水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

1998年7月

修订版前言

本书第一版自 1998 年出版以来,得到广大读者和使用本书的同行的认可和关心,在此表示衷心感谢!为了配合高等数学课程的教学改革,我们通过近几年的教学实践,并在汲取同行及广大读者宝贵意见的基础上,对第一版作了本次修订.

这次修订主要目的是:(1)配合高等数学课程的教学改革,按照分块教学模式,将高等数学分成六部分:一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、级数与微分方程.每部分相应配套了综合练习题.(2)为了提高学生综合运用高等数学知识的能力,并且结合部分报考研究生学生的需要,补充增添了一定量的综合题,并给出了答案,对其中典型题做了提示与解答.

这次修订工作由贾云暖、刘广瑄两位老师承担,其中一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数三部分的综合练习题由贾云暖编写;多元函数微分学、多元函数积分学、级数与微分方程三部分的综合练习题由刘广瑄编写.

《高等数学习题课讲义》既可作为各高等院校高等数学习题课教材,也可作为一年级大学生和考研学生的学习参考书.

编者

2001.6.

目 录

第一部分 一元函数微分学

第一章 函数与极限	(1)
函数	(1)
一、基本概念和主要结论	(1)
二、例题	(3)
三、练习题 1-1	(6)
极限与连续函数	(7)
一、基本概念和主要结论	(7)
二、例题	(12)
三、练习题 1-2	(18)
本章练习题答案	(19)
第二章 导数与微分	(21)
一、基本概念和主要结论	(21)
二、例题	(25)
三、练习题 2-1	(32)
本章练习题答案	(33)
第三章 中值定理与导数的应用	(34)
中值定理与洛必达法则	(34)
一、基本概念和主要结论	(34)
二、例题	(37)
三、练习题 3-1	(44)
导数的应用	(45)
一、基本概念和主要结论	(45)

二、例题	(48)
三、练习题 3-2	(59)
本章练习题答案	(59)
一元函数微分学综合练习题	(61)
一元函数微分学综合练习题参考答案	(89)
一元函数微分学综合练习题典型题提示与解答	(95)

第二部分 一元函数积分学

第四章 不定积分	(106)
一、基本概念和主要结论	(106)
二、例题	(108)
三、练习题 4-1	(134)
本章练习题答案	(135)
第五章 定积分	(137)
一、基本概念和主要结论	(137)
二、例题	(144)
三、练习题 5-1	(166)
本章练习题答案	(168)
第六章 定积分的应用	(169)
一、基本概念和主要结论	(169)
二、例题	(170)
三、练习题 6-1	(187)
本章练习题答案	(188)
一元函数积分学综合练习题	(190)
一元函数积分学综合练习题参考答案	(206)
一元函数积分学综合练习题典型题提示与解答	(209)

第三部分 向量代数与空间解析几何

第七章 向量代数与空间解析几何	(220)
向量代数	(220)
一、基本概念和主要结论	(220)
二、例题	(223)
三、练习题 7-1	(228)
空间解析几何	(228)
一、基本概念和主要结论	(228)
二、例题	(233)
三、练习题 7-2	(241)
本章练习题答案	(242)
向量代数与空间解析几何综合练习题	(243)
向量代数与空间解析几何综合练习题参考答案	(248)

第四部分 多元函数微积分学

第八章 多元函数微分法及其应用	(250)
多元函数微分法	(250)
一、基本概念和主要结论	(250)
二、例题	(255)
三、练习题 8-1	(267)
多元函数微分法的应用	(268)
一、基本概念和主要结论	(268)
二、例题	(272)
三、练习题 8-2	(279)
本章练习题答案	(279)
第九章 重积分	(281)
一、基本概念和主要结论	(281)

二、例题	(287)
三、练习题 9-1	(303)
本章练习题答案	(304)
第十章 曲线积分和曲面积分	(305)
曲线积分	(305)
一、基本概念和主要结论	(305)
二、例题	(309)
三、练习题 10-1	(328)
曲面积分	(329)
一、基本概念和主要结论	(329)
二、例题	(335)
三、练习题 10-2	(352)
本章练习题答案	(353)
多元函数微积分学综合练习题	(354)
多元函数微积分学综合练习题参考答案	(378)
多元函数微积分学综合练习题典型题提示与解答	(384)

第五部分 级数与微分方程

第十一章 无穷级数	(397)
数项级数	(397)
一、基本概念和主要结论	(397)
二、例题	(401)
三、练习题 11-1	(410)
幂级数	(412)
一、基本概念和主要结论	(412)
二、例题	(416)
三、练习题 11-2	(428)
傅立叶级数	(429)

一、基本概念和主要结论	(429)
二、例题	(434)
本章练习题答案	(447)
第十二章 微分方程	(449)
一阶方程与可降阶的高阶方程	(449)
一、基本概念和主要结论	(449)
二、例题	(453)
三、练习题 12-1	(465)
二阶常系数线性方程	(468)
一、基本概念和主要结论	(468)
二、例题	(470)
三、练习题 12-2	(475)
本章练习题答案	(475)
级数与微分方程综合练习题	(477)
级数与微分方程综合练习题参考答案	(505)
级数与微分方程综合练习题典型题提示与解答	(517)

第一部分 一元函数微分学

第一章 函数与极限

学习目的与要求 理解函数、极限和连续这三个高等数学中的基本概念,其中极限的概念及其运算是本章的重点与难点.掌握极限的运算法则和两个极限存在准则,以及基本初等函数的性质及其图形,要了解间断点的概念和闭区间上连续函数的性质.

函 数

一、基本概念和主要结论

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量, D 是已知数集, 如果对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的对应规律 f , 总有惟一确定的数值与它对应, 则称 y 是 x 的函数. 记作 $y = f(x)$, 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量. 数集 $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的图形

已知函数 $y = f(x)$, 定义域为 D , 称平面点集: $C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图形.

3. 函数的几种特性

(1) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$, 如果存在正数 M , 使得对于一切的 $x \in I$ 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在数

集 I 上有界.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或减少)的.

(3) 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 T , 使得对于一切 $x \in D$, 有 $(x+T) \in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说函数的周期是指最小正周期.

(4) 奇偶性

★ 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$, $f(-x)=f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任意的 $x \in D$, $f(-x)=-f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 于是对于任意的 $y \in W$, 有惟一确定的 $x \in D$ 与之对应, 使得 $y=f(x)$, 这样在 W 上定义了一个新的函数, 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 记作 $x=\varphi(y)$ (或 $x=f^{-1}(y)$).

5. 复合函数

内函数记为 u , 外函数记为 $y=f(u)$. 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2 , 值域为 W_2 , 并且 $W_2 \subset D_1$, 由此对于任意的 $x \in D_2$ 有惟一确定的 $\varphi(x)=u \in W_2 \subset D_1$, 于是对此 $u \in D_1$ 有惟一确定的 $y=f(u)$, 这样确定的新函数 $y=f[\varphi(x)]$, $x \in D_2$, 称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

6. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函

数,统称为基本初等函数.凡是由基本初等函数,经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

二、例题

判断题

1. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为周期函数(周期均为正整数),则 $f(x) + g(x)$ 必为周期函数. (✓)

事实上,设 T_1, T_2 分别为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期, T 为 T_1 与 T_2 的最小公倍数,则 T 必为 $f(x) + g(x)$ 的周期.

2. 周期函数一定有最小正周期. (✗)

例如,函数 $f(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 为周期函数,但无最小正周期.

3. 若函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f[f(x)] = x$. (✗)

事实上, $f[f(x)] = \begin{cases} x, & x \neq 0; \\ \text{无定义}, & x = 0. \end{cases}$

4. 设函数 $f(u) = \arcsin u, u = \varphi(x) = 2 + x^2$, 则 $f[\varphi(x)]$ 一定为 x 的复合函数. (✗)

事实上,两个函数不能复合.

5. 若函数 $f(u)$ 为偶函数, $u = \varphi(x)$ 为奇函数, 则 $f[\varphi(x)] \cdot \varphi(x)$ 一定为奇函数. (✓)

事实上, $f[\varphi(-x)] \cdot \varphi(-x) = -f[\varphi(x)] \cdot \varphi(x)$.

6. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 (a, b) 上的无界函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 一定为 (a, b) 上的无界函数. (✗)

例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为无界函数, $g(x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上也为无界函数, 但 $f(x) \cdot g(x) = 1$ 为 $(0, +\infty)$ 上的有界函数.

7. 设 $f(x) = 2\ln x$, $g(x) = \ln x^2$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

(X)

事实上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同.

8. 设 $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

(✓)

事实上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同, 并且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $\sqrt[3]{x^4 - x^3} = x \sqrt[3]{x-1}$.

计算与证明题

例 1. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ($x > 0$), 求 (1) $f[f(x)]$, (2) $f(x)$ 的反函数.

$$\text{解: (1) } f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x^2/1+x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} (x > 0).$$

$$(2) \text{ 令 } y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ 两边平方有}$$

$$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$\text{从而有 } x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \text{ 或 } y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (0 < x < 1).$$

例 2. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

$$\text{解: } f[g(x)] = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{x-1}{x+1} (x \neq 0, x \neq -1).$$

$$g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x} (x \neq 1, x \neq -1).$$

例 3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-l, +l)$ 内有定义, 试证

$F_1(x) = f(x) + f(-x)$, $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 分别为偶

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x > 0) \quad x = \sqrt{1+y^2} \\
 (2) \quad & y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad y^2(1-x^2) = x^2 \\
 & y^2 - x^2 y^2 = x^2 \quad y^2 = (1+y^2)x^2 \quad \therefore y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
 \end{aligned}$$

函数和奇函数.

$$\begin{aligned}
 \text{证: 因为 } F_1(-x) &= f(-x) + f[-(-x)] \\
 &= f(-x) + f(x) = F_1(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(-x) &= f(-x) - f[-(-x)] = f(-x) - f(x) \\
 &= -F_2(x).
 \end{aligned}$$

所以它们分别为偶函数和奇函数. $f(x) \neq f(-x) \quad \forall x > 0$

例 4. 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

证: 对于任意给定的正数 M , 取 $n = [M] + 1$, 此时 $\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

$\in (0, 1)$, 则有

$$f\left[\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right] = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M.$$

所以, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

例 5. 证明任意有理数均为狄利克雷函数的周期.

证: 根据狄利克雷函数的定义, 有

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

设 r 为任意给定的有理数, 于是当 x 为有理数时, $r+x$ 也为有理数, 当 x 为无理数时, $r+x$ 也为无理数, 于是

$$D(x+r) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

从而, $D(x+r) = D(x)$. 但不存在最小正周期.

$$\text{例 6. 设函数 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| = 1; \\ -1, & |x| > 1. \end{cases} \quad g(x) = e^x.$$

求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

$$\begin{aligned}
 f[g(x)] &= \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\
 g[f(x)] &= \frac{1 + x}{1 - x}
 \end{aligned}$$

解:

$$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & (|e^x| < 1) \\ 0, & (|e^x| = 1) \\ -1, & (|e^x| > 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & (e^x < 1) \\ 0, & (e^x = 1) \\ -1, & (e^x > 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

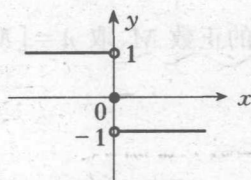


图 1-1

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1 \\ e^0, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1; \\ 1, & |x| = 1; \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

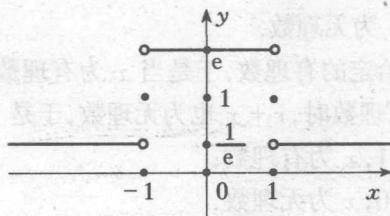


图 1-2

三、练习题 1-1

1. 设 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$