高等数学

1

上海交通大学数学教研组编

高　等　数　学

1

(試 用 本)

上海交通大学数学教研組編

1960·8

前　言

我国工农业生产巨大跃进的形势，迫切要求科学文化事业迅速攀登世界高峰。四月初，我校教学革命的群众运动深入开展，我們受到大好形势的鼓午，揭露和批判了以往数学教学中存在的資产阶級教育思想和"少慢差費"的現象，因此有必要在教学内容上进行一次革命。在党的領导下，我們和有关的专业教师、同学一起着手編写新的数学教学大綱和教材，力求冲破旧的教材体系，貫彻"多快好省"的总路綫精神。經过反复的討論修改，四月底訂出了大綱；紧接着为了向五月中旬召开的上海市文教战綫群英会献礼，全体同志又发揮了冲天干劲，苦战十余天，初步編写了这本教材。其后，虽經审校修改，但由于我們思想水平和业务水平的限制，又加上付印仓促，教材内容的思想性和科学性远不能令人滿意，其中錯誤的地方一定不少，有待于在教学实踐中进一步提高。

上海交通大学数学教研組。

一九六〇、七。

高等数学第一册目次

緒論……1
第一章　坐标系与矢量代数……5
§1.1 直角坐标系……5
I. 有向綫段及其在軸上的投影　II. 点的直角坐标
III. 两点間的距离　IV. 定比分点
§1.2 平面上点的极坐标……16
I. 极坐标概念　II. 极坐标与直角坐标的关系
§1.3 矢量概念……18
§1.4 矢量的代数运算……19
I. 矢量的加减法　II. 矢量和数量的乘法
§1.5 矢量的坐标……21
§1.6 矢量的数积与矢积……24
I. 数积　II. 矢积
§1.7 矢量的三重数积……29
第二章　函数及其图形……32
§2.1 函数概念……32
I. 概念的引入　II. 一元函数与多元函数
§2.2 函数的表示法及簡单性質……39
I. 函数的表示法　II. 函数的簡单性态
§2.3 曲綫及其方程……47
I. 直綫——一次曲綫　II. 二次曲綫
III. 曲綫的极坐标方程
§2.4 空間曲面及其方程……72
I. 平面　II. 二次曲面及其标准方程
§2.5 矢量函数与空間曲綫……84
I. 矢量函数　II. 空間直綫方程　III. 空間曲綫

第三章　函数的極限与連續 ……………………95

§3.1　函数的极限 ……………………95

I. 概念的引入　II. 函数当 $x\to x_0$ 时极限的定义

III. 函数的左右极限　IV. 函数当 $x\to\infty$ 时的极限

V. 无穷小与无穷大

§3.2　极限运算法则。无穷小的比較……………………104

I. 极限运算法则　II. 无穷小的比較

§3.3　极限存在的准則……………………108

§3.4　函数的連續性……………………113

I. 連續与間断　II. 連續函数的性質。初等函数的連續性

§3.5　多元函数的极限与連續……………………124

§3.6　級数……………………128

I. 級数的概念及簡单的性質　II. 正項級数

III. 一般項級数

第四章　导数 ……………………141

§4.1　一元函数的导数概念……………………141

I. 概念的引入　II. 导数的定义

§4.2　一元函数的微分法……………………150

I. 函数和积商的微分法　II. 复合函数的微分法

III. 反函数的微分法　IV. 初等函数的导数

V. 由参数方程所确定的函数的微分法

§4.3　多元函数的微分法……………………168

I. 偏导数　II. 复合函数的微分法。全导数

III. 参数式的微分法

§4.4　隐函数及隐函数組的微分法……………………172

I. 隐函数的微分法　II. 隐函数組的微分法

§4.5　高阶导数……………………177

I. 一元函数的高阶导数　II. 多元函数的高阶偏导数

§4.6　矢量函数的微分法……………………182

第五章　微分与微分方程初步……………………186

§5.1　一元函数的微分……………………186

§5.2　有限增量公式……………………189

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

§5.3 多元函数的全微分……………………………192
§5.4 微分与微分方程……………………………195
§5.5 原函数与不定积分……………………………198
I. 原函数与不定积分 II. 换元积分法 III. 分部积分法
IV. 积分表的使用 V. 有理函数的积分
§5.6 微分方程的一般概念。簡单微分方程的解法……216
I. 微分方程的一般概念 II. 一阶微分方程中的几种基本类型的求积法 III. 可降阶的高阶方程
第六章 导数的应用……………………………233
§6.1 一元函数性态的研究……………………………233
I. 函数的单調性与极值 II. 曲綫的凹凸与拐点
III. 曲綫的渐近綫和曲綫的描繪
§6.2 导数在計算极限时的应用——罗彼塔法則………351
§6.3 多元函数的极值与条件极值……………………256
I. 极值 II. 条件极值
§6.4 导数在几何上的应用……………………………263
I. 曲率与曲率圓 II. 空間曲綫的切綫及法面
III. 曲面的切面与法綫
§6.5 泰勒公式与泰勒級数……………………………274
I. 泰勒公式 II. 函数項級数与幂級数
III. 泰勒級数 IV. 函数展为泰勒級数举例
V. 泰勒級数在近似計算上的应用
第七章 积分及其应用……………………………295
§7.1 定积分……………………………295
I. 概念的引入 II. 定积分的定义
III. 定积分的簡单性质
§7.2 定积分的計算……………………………302
I. 牛頓—萊布尼茲公式 II. 定积分的分部积分法
III. 定积分的换元积分法 IV. 用幂級数近似計算定积分
§7.3 定积分的一些应用……………………………313
I. 解題的一般程序 II. 几何上的应用
III. 物理上的应用举例

§7.4 重积分……327
I. 概念的引入 II. 重积分的定义及簡单性质
III. 在直角坐标系中重积分的計算法 IV. 利用极坐标計算二重积分 V. 利用柱面坐标与球面坐标計算三重积分
§7.5 重积分的应用……348
I. 曲面面积 II. 重心 III. 轉动慣量
§7.6 广义积分……355
I. 区間为无穷 II. 函数有无穷間断点
§7.7 欧拉积分……363
I. Γ函数 II. B函数 III. B函数与Γ函数之間的关系
第八章 数値計算……370
§8.1 近似計算理論的基本知識……370
I. 引言 II. 絕对誤差与相对誤差 III. 有效数字与近似数的写法 IV. 近似数和、差的誤差及运算規則 V. 近似数积商的誤差及其运算規則 VI. 近似値乘方开方的誤差
VII. 近似公式
§8.2 方程的近似解……379
I. 用作图法做根的隔离 II. 用試探法把根算得更精确
III. 迭代法 IV. 用弦位切綫法做根的近似計算
§8.3 插植法……389
I. 插值法的目的和作用 II. 差分和差商及其簡单性质
III. 牛頓插值公式与拉格朗日插值公式 IV. 內插法的誤差
§8.4 数値积分……408
I. 梯形公式 II. 辛卜生公式 III. 契比雪夫公式
§8.5 常微分方程的数値解……413
I. 求一阶微分方程初值問題的数値解的差分方法
II. 开始 n 点解的求得 III. 龙盖-庫塔方法
§8.6 綫代数方程組……424
I. 高斯方法 II. 迭代法 III. 張弛法
第九章 常微分方程……432
§9.1 方程的导来……432
I. 单摆运动方程 II. 彈性曲綫方程

§9.2 二阶綫性微分方程的一般理論……………………434
§9.3 常系数綫性微分方程……………………………442
I. 常系数綫性齐次微分方程 II. 常系数綫性非齐次微分方程
III. 欧拉方程
§9.4 拉氏变換……………………………………………453
I. 拉氏变换的定义及举例 II. 反拉氏变换 III. 拉氏变换的性质 IV. 用拉氏变换解常系数綫性微分方程
§9.5 微分方程的級数解………………………………460
§9.6 貝塞尔函数…………………………………………462
I. 貝塞尔方程。貝塞尔函数 X II. 第二类貝塞尔函数
XIII. 第三类貝塞尔函数 X IV. 展开为貝塞尔函数的級数
§9.7 微分方程組…………………………………………472
X§9.8 稳定性理論初步…………………………………477
I. 基本概念 II. 常係数齐次綫性方程解的稳定性討論
III. 用一次近似研究稳定性

第十章 論場………………………………………………489

§10.1 数量場与矢量場。梯度…………………………489
I. 方向导数 II. 梯度概念 III. 梯度的性质
§10.2 曲綫积分……………………………………………492
I. 由力場对质点所作功引入曲綫积分概念 II. 平面曲綫积分定义 III. 曲綫积分的簡单性质及其計算法
IV. 空間曲綫积分
§10.3 曲面积分……………………………………………499
§10.4 曲綫积分曲面积分与重积分的关系………………502
I. 格林公式 II. 奥斯特洛格拉特斯基公式
III. 斯托克斯公式
§10.5 綫积分与路綫无关的問題。全微分求积問題……510
I. 綫积分与路綫无关的条件。綫积分在多元函数上的应用
II. 全微分方程。积分因子
§10.6 散度…………………………………………………516
I. 散度的概念 II. 散度的坐标表示法 III. 管量場
IV. 散度的性質

§ 10.7 旋度……………………………………………………520

I. 旋度概念　II. 旋度的坐标表示法　III. 势量場

IV. 旋度的性质　V. 漢米尔頓算子与拉普拉斯算子

§ 10.8 正交曲綫坐标中的矢量运算……………………………525

I. 求函数 $u(M)=u(q_1,q_2,q_3)$ 的梯度　II. 求矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度

III. 拉普拉斯算子表达式　IV. 求矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度

§ 10.9 調和函数与势論……………………………………531

I. 引力場与电場中的势函数　II. 調和函数

III. 体势与面势

附　表　簡單积分表……………………………………541

緒　論

数学，由于实际的需要，在古代已經产生了。現在已經发展成为分支众多、內容龐大的系統。数学，也如其他科学一样，反映了物质实际的規律，并成为理解自然和征服自然的有力工具。

早在 1877 年恩格斯就对数学的本質作出了精辟的論斷："数和形的概念不是从任何地方得来，而仅仅是从現实世界中得来的，人們用十个指头算数目，就是說作第一次的算术运算，这十个指头可以是一切別的东西，但总不是理性的自由創造物，要作計算不但要有被計算的对象，而且还要具有这样的能力使其在考察这些对象时能够摆脫其他的特性而仅仅顧到数目。和数的概念一样，形的概念也完全从外面世界得来的，而不是在头脑中从純粹的思維中产生的，要能达到形的概念先应当存在具有一定形状的物件，而且应把这些形状拿来比較，純数学是以現实世界的空間形式和数量关系——这是非常現实的材料——为对象的，这些材料表現于非常抽象的形式之中，这一事实只能表面地掩盖它的来自現实世界的根源"①。

恩格斯强調指出，数学是反映現实世界的科学，它的初始概念和原理的建立是以經驗为基础的长期历史发展的結果。

恩格斯并不是数学家，但他却对数学的本質作出了这样深刻的分析，这不仅因为他是偉大的思想家，而最主要的是因为他掌握了辯証唯物主义，并以它为指导来闡述数学的本質。因此，不难理解为什么在恩格斯以前，即使是那些最偉大的数学家也不能够这样深刻和正确的解决这个問題。

事实再一次証明了辯証唯物主义的意义和力量。为了掌握一

① 恩格斯"反杜林論"37 頁，人民出版社 1956 年版。

門科学,只認識它的个别原理是不够的,还必須掌握正确的一般方法——辯証唯物主义。离开了辯証唯物主义,科学的結論将成为輪廓模糊的一堆或者表現为歪曲的形式。

在恩格斯的論断中,可以看出抽象性是数学的特征,抽象性并不是数学这一門科学所独有的,一切科学都有它一定的抽象,因为科学的抽象使人們有可能"更正确、更完善、更深刻的反映現实"(列宁語),但是数学的抽象性还在于它仅保留量的关系和空間形式,而摒弃事物的其他一切特征;其实,这种抽象的过程,实际上也是深入的过程,并且应用于証明数学定理的方法也是抽象的。

随着科学的不断发展,数学概念的抽象已达到了这样的程度:卽从表面看来,好象它已經同現实生活失去了紧密联系。事实上当然不是这样,而相反地越来越广泛地被应用于一切科学技术領域,数学上的一切最新的成果都被应用到現代工程技术中去,今天,数学已被认为解决生产实际問題最有力的工具之一。

但是数学的抽象性和严格性只有和应用的广泛性联系起来才賦予数学以生命力。因为一切科学归根結蒂都必需服务于生产,而不是供人們欣賞的。

数学的发生与发展是决定于人类生产的实踐的需要,我們都知道,古代由于进行田地面积及器物容量的测定,时間的計算等,产生了初等数学。

在十七、十八世紀,由于自然科学及工程上需要,就产生了高等数学中的一些概念和方法,近代数学更是与最新科学和技术的发展紧密联系的。

生产实踐不仅直接推动数学的发展,而且也通过其他自然科学間接地推动数学的发展,而当数学一經发展后,它又可以回过来应用到实踐中去,并接受实踐的考驗,因此我們說:生产实踐是数学发展的动力,也是科学眞实性的准繩。

从整个数学发展过程来看,它是遵循着"实踐——理論——实

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

践"的道路。

初等数学（如中学的代数和几何）研究的对象，主要是定量和固定的图形。人們为了把握客观事物的規律，把它暫时看成不变的来加以研究，这是認識过程中的开始阶段，但是我們的認識决不能停留在这一点上，因为世界是在永恒变化中，只有从变化中去認識才能获得事物本质的了解。

在十七、十八世紀时，由于生产上的巨大变革，促使力学的各个分支的研究发展起来，而这些研究又要求有全新的数学工具，来反映运动規律的量的这一側面，而数学这一重大发展的主要标誌就是变量的引入。笛卡儿（1596—1650，法国著名数学家、哲学家）首先把变量引进数学，并創立了坐标概念。这是数学史上的一件大事，恩格斯对此給予很高的評价，他說："笛卡儿的变数是数学中的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学，……"①

現在高等数学的基本思想和結論已广泛地为自然科学工作者及工程技术人員运用着，因此，在培养工程技术人材的过程中，高等数学起着奠基的作用，它是学习专业課必須具备的知識。而要迅速攀登世界科学高峰就更需要有充实的数学知識。

我国是世界文化发达最早的国家之一，我們的祖先在数学方面有过不少的成就，古算书流傳至今的有"算經十书"，其中"九章算术"尤为世所称頌。古代数学家祖冲之（429—500）推算出圓周率 π 介于 3.1415926 与 3.1415927 之間，比德国的奥托（1547 年）早一千多年。宋代秦九韶（1247 年）的"大衍求一术"（可解不定方程）曾流傳到欧洲称为中国剩余定理。此外，在解高次方程、联立方程、高阶等差級数求和等方面有很多貢献。但是我国数学經过一千多年的不断发展后，从十四世紀起，却开始停滞不前，因而我国古代数学的成就大多限于初等数学的范圍，这是因为在封建社会中生产力的发展受到了束縛，所以数学的进步也就象其它科学

① "自然辯証法" 217 頁，人民出版社 1955 年版。

一样长期停留下来。这充分說明明代以后虽然西洋数学开始輸入我国，但由于帝国主义的压迫，在国内的反动統治下，生产落后，科学事业也一直得不到发展。

解放以后随着社会主义建設事业的高速度发展，数学也得到了相应的发展，譬如全国高等院校数学系的人数空前增多，数学书刊更是大量的出版，尤其重要的是党为数学发展制定了正确的方針：数学要和当前社会主义建設任务相联系，要重点发展和社会主义建設联系較大的分支，如計算数学、概率論及数理統計、微分方程等。

教学革命以后，在数学理論联系实际方面，已取得了巨大的成就。并且在改变旧教学体系，建立新教学体系方面，树立了先进的榜样。确信我国数学科学在联系实际，解决生产任务，发展理論等方面，今后一定会取得更大、更光辉的成就。

第一章　坐标系与矢量代数

§1.1　直角坐标系

I. 有向綫段及其在軸上的投影

一个点沿着一定不变的方向运动而描出了一条直綫，动点运动的方向作为直綫的正方向，与它相反的方向作为負方向，直綫的正方向用一个箭头指出，如图1.1。

单位长

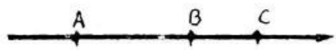

图 1.1

确定了正方向以后的直綫称为有向直綫、或称为軸，直綫上任意两点 A 与 B 截取了一个綫段，选取单位长度后，則可用一个正实数来表示它的长度，記作 $|AB|$。在几何、物理及其他許多問題的討論中，仅仅考虑綫段的长度是不够的，在更多的情形下还要指明它的方向，因而有必要規定綫段的起点和終点，規定了起点和終点的綫段称为有向綫段。以 A 为起点，B 为終点的綫段記作 $\overline{AB}$，若起点与終点互易，則得有向綫段 $\overline{BA}$，它与 $\overline{AB}$ 的长相等而方向相反，为了能用代数方法来研究几何問題，我們用一个实数来表示有向綫段 $\overline{AB}$，这个数值記作 AB，它的大小等于 $\overline{AB}$ 的长，而它的符号則視 $\overline{AB}$ 与軸的方向相同或相异而定为正或負。当起点与終点重合时，用实数 0 来表示这綫段。这样一来，任何有限綫段都可用一个实数来表示，容易証得，若 A、B、C 为軸上任意三点，不論它們的相互位置怎样，恒有如下的关系式：

$$AB+BC=AC。 \tag{1}$$

一般地若 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{n-1}, A_n 为軸上任意 n 个点，則有

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n \text{。} \tag{1'}$$

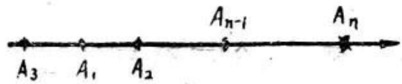

图 1.2

以上就一軸来討論有向綫段，在空間往往会牽涉到許多有向綫段，因而要研究它們之間的联系。

設 l_1, l_2 是空間两軸，所謂 l_1, l_2 間的角是这样规定的：若 l_1, l_2 相交于 S 点，则将其中一軸繞 S 点在两軸所决定的平面上旋轉，使它的正向与另一軸的正向重合时所需要旋轉的最小的正角，称为两軸 l_1 与 l_2 間的角，(图 1.3) 記作 $(\widehat{l_1, l_2})$ 或 $(\widehat{l_2, l_1})$，显然二軸間的角限于 0 与 π 之間，且不分順序，若 l_1, l_2 不相交，则可在空間任取一点 S，并自 S 引二軸 l_1', l_2' 与 l_1, l_2 同向(图 1.4)，我們就用两軸 l_1' 与 l_2' 間的角来定义两軸 l_1 与 l_2 的角。

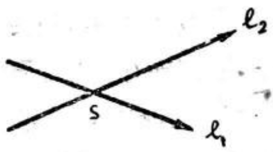

图 1.3

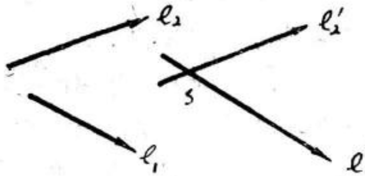

图 1.4

有向綫段 $\overline{AB}$ 与一軸 l 間的角，我們用軸 l 与另一軸 l' 間的角来定义，其中軸 l' 与有向綫段 $\overline{AB}$ 同向。类似地有向綫段 $\overline{AB}$ 和有向綫段 $\overline{CD}$ 間的角我們就用軸 l 和 l' 間的角来定义，其中 l 和 l' 分别与有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 同向。

过有向綫段 AB 的起点 A 和終点 B，分别作与軸 l 垂直的平面，此两平面与軸相交，得交点 A' 和 B' (图 1.5)，点 A' 和 B' 分别称为点 A 和 B 在軸 l 上的投影而軸上有向綫段 $\overline{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为有向綫段在軸 l 上的投影，記作 Пр$_l\,\overline{AB}$，軸 l 称为投影軸。

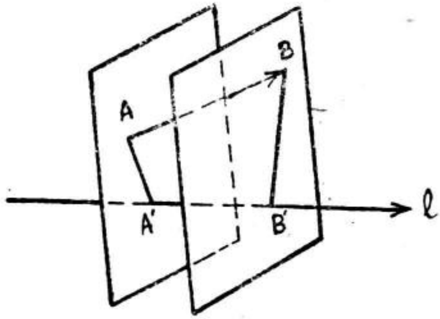

图 1.5

至于有向綫段 $\overline{AB}$ 在有向綫段 $\overline{CD}$ 上的投影，我們用有向綫段 $\overline{AB}$ 在軸 l 上的投影来定义，其中軸 l 与有向綫段 $\overline{CD}$ 同向。

关于有向綫段在軸上的投影，有下面两个重要的定理：

定理一 有向綫段 $\overline{AB}$ 在任何軸 l 上的投影，等于有向綫段的长度和軸与有向綫段間的角的余弦的乘积，即

$$\text{Пp}_l\,\overline{AB}=|AB|\cdot\cos(\widehat{\overline{AB},l})。\tag{2}$$

証 过有向綫段 $\overline{AB}$ 的起点引軸 l' 使与軸 l 同向（图 1.6），

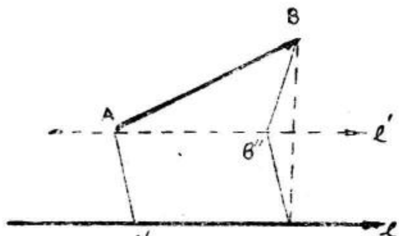

图 1.6

則 $(\widehat{\overline{AB},l'})=(\widehat{\overline{AB},l})$，因而

$$\text{Пp}_l\,\overline{AB}=\text{Пp}_{l'}\,\overline{AB},$$

但 $$\text{Пp}_{l'}\,\overline{AB}=AB''=|AB|\cdot\cos(\widehat{\overline{AB},l'}),$$

所以 $$\text{Пp}_l\,\overline{AB}=|AB|\cos(\widehat{\overline{AB},l})。$$

定理二 有向折綫 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 在軸 l 上的投影等于有

向綫段 $\overline{A_1A_n}$ 在 l 上的投影。

証 有向折綫 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 在 l 上的投影是

$$A_1'A_2'+A_2'A_3'+\cdots+A_{n-1}'A_n'.$$

但根据公式(1′)

$$A_1'A_2'+A_2'A_3'+\cdots+A_{n-1}'A_n'=A_1'A_n',$$

而 $A_1'A_n'$ 就是有向綫段 $\overline{A_1A_n}$ 在 l 上的投影。

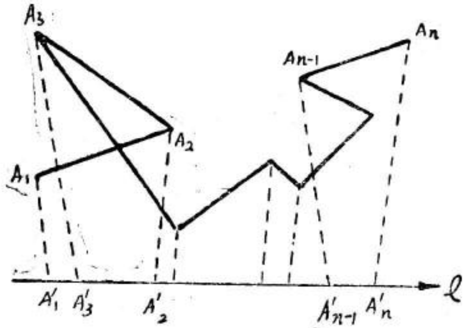

图 1.7

II. 点的直角坐标

(i) 直綫上点的坐标 軸上一有向綫段，我們可以把它沿着此軸任意移动，移动时不改变它的方向，移动后的有向綫段与原来的有相同的长度与方向，因而它們是相等的，这样我們就可以任选一点 O，称为原点，作为軸上有向綫段的共同起点，若 P 为軸上任意一点，則有向綫段 $\overline{OP}$ 对应着一个实数 x；反之，任何实数确定了以 O 为起点，P 为終点的有向綫段 $\overline{OP}$；换言之，当有向綫段的起点固定于 O 时，它的終点 P 与实数 x 互相对应，由此軸上的点可与实数之間建立一一对应。凡是軸上的点与数建立了一一对应之后的軸称为坐标軸，或称数軸。

設坐标軸 Ox 上的 P 点对应着实数 x，則 x 称为 P 点的坐标，通常把点的坐标写在表示点的字母的后面而加上一括号( )；例如 $P(x)$ 便表示坐标为 x 的点 P，見图1.8。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com