福建省高职专升本高等数学习题解析

FUJIANSHENG GAOZHI ZHUANSHENGBEN GAODENG SHUXUE XITI JIEXI

主编
王招平

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

福建省高职专升本高等数学习题解析

FUJIANSHENG GAOZHI ZHUANSHENGBEN GAODENG SHUXUE XITI JIEXI

主编 王招平

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

福建省高职专升本高等数学习题解析 /王招平主编.
大连 ：大连理工大学出版社，2011.11
ISBN 978-7-5611-5929-3

Ⅰ.①福… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—成人教育：高等教育—解题—升学参考资料 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 231188 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:12 字数:267 千字
印数:1～1600
2011 年 11 月第 1 版 2011 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:张剑宇 责任校对:周双双
封面设计:张 莹

ISBN 978-7-5611-5929-3 定 价:24.00 元

前　言

本书是福建省高职专升本入学考试辅导用书.编撰本书,力求突显如下特点:

1.配套性:本书与福建省高职专升本入学考试指定教材《高等数学》(徐荣聪主编,厦门大学出版社,2004年8月第2版,2010年4月第7次印刷)配套使用.

2.自学性:本书编撰的目的,不仅仅是为解题而解题,而是力求更上一层楼.书中对一般题给出简约的解题过程和答案,学生可参考对照;对于重点题、难点题进行了深入详尽的解析及补充,以消除学生的疑问,并激发学生的学习兴趣.通过解题归纳方法,达到举一反三的效果,贯彻理论与实践相结合的原则.

3.篇幅结构的层次性:第一篇,习题解析;第二篇,综合练习解析.步步为营,逐层升级,贯彻循序渐进的原则.

在编写本书的过程中,编者尽可能把多年以来教授高等数学课程的经验融入其中.但自感能力、时间及精力有限,谬误和不足之处在所难免,敬请读者不吝赐教并来函指正,勘误结果将不定期在麦豆网(www.mydou.com)上发布.

由于本书篇幅有限,福建省高职专升本入学考试《高等数学》的考试大纲、历年真题及解析,亦将陆续发布于麦豆网,大家可以直接下载并打印.

在本书编撰过程中,麦豆网提供了教学实践班级,并参与了策划、组织和协调工作,促进了出版任务的顺利完成.对这次愉快的合作,本人特在此致谢!

王招平

2011年10月于福建省泉州市

E-mail:519487069@qq.com

目　录

第一篇

习题解析

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　数

习题 1-1 解析

1. 用区间表示下列不等式中变量 x 的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 5$；　(2) $|x|\leqslant 2$；　(3) $|x-1|\leqslant \frac{1}{3}$；　(4) $|x+2|>1$.

解　(1) $(2,5]$；　(2) $[-2,2]$；　(3) $\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$；　(4) $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg(x^2)$, $g(x)=2\lg x$；　(2) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$, $g(x)=\sin x$；　(4) $f(x)=\frac{x}{x(1+x)}$, $g(x)=\frac{1}{1+x}$.

解　(1) 不相同. 因为 $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $D(g)=(0,+\infty)$，$D(f)\neq D(g)$；

(2) 相同；

(3) 不相同. 因为 $R(f)=[0,1]$，而 $R(g)=[-1,1]$，即对应规则 f 与 g 不相同；

【$f=g\rightarrow R(f)=R(g)$，即 $R(f)=R(g)$ 是 $f=g$ 的必要条件而非充分条件，事实上 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$，显然与 $g(x)=\sin x$ 不相同】

(4) 不相同. 因为 $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$，而 $D(g)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$D(f)\neq D(g)$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(2) $f(x)=|x|+x$；

(3) $f(x)=1-e^{1-x^2}$；　　(4) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(5) $f(x)=\ln(x+1)$；　　(6) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<-1\\ 3-x, & x\geqslant -1\end{cases}$.

解　(1) $\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ 1-x^2\neq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\geqslant -2\\ x\neq \pm 1\end{cases}$, $D:[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(2) $D:(-\infty,+\infty)$；

(3) $D:(-\infty,+\infty)$；

(4) $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1\rightarrow -2\leqslant x-1\leqslant 2$, $D:[-1,3]$；

(5) $x+1>0\rightarrow x>-1$, $D:(-1,+\infty)$；

(6) $D:(-\infty,+\infty)$.

4. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$.

解　$f(0)=0^2-3\cdot 0+2=2$.

$f(1)=1^2-3\cdot 1+2=0$.

$f(-x)=(-x)^2-3\cdot(-x)+2=x^2+3x+2$.

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-3\cdot\dfrac{1}{x}+2=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}+2$.

$f(x+1)=(x+1)^2-3\cdot(x+1)+2=x^2-x$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ 4, & x>0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-2)$，$f(x-1)$.

解　$f(0)=0+1=1$.

$f(2)=4$.

$f(-2)=-2+1=-1$.

$f(x-1)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ 4, & x>1\end{cases}$.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$；　(2) $y=x+\sin x$；　(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　(4) $y=|\tan x|$.

解　(2)为奇函数，(1)、(3)、(4)均为偶函数.

7. 设在对称区间$[-1,1]$上，函数 $f(x)$ 为偶函数，

(1)若函数 $g(x)$ 为偶函数，证明 $f(x)+g(x)$ 为偶函数；

(2)若函数 $g(x)$ 为奇函数，证明 $f(x)\cdot g(x)$ 为奇函数.

证明　(1)已知在对称区间$[-1,1]$上，函数 $f(x)$ 为偶函数，又知函数 $g(x)$ 也为偶函数，所以 $\forall x\in[-1,1]$，$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$.

设 $h(x)=f(x)+g(x)$，那么 $h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=h(x)$.

故 $h(x)$为偶函数，即 $f(x)+g(x)$为偶函数；

(2)已知在对称区间$[-1,1]$上，函数 $f(x)$为偶函数，又知函数 $g(x)$为奇函数，所以 $\forall x\in[-1,1]$，$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

设 $S(x)=f(x)\cdot g(x)$，

那么 $S(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-[f(x)\cdot g(x)]=-S(x)$.

故 $S(x)$为奇函数，即 $f(x)\cdot g(x)$为奇函数.

8. 函数 $y=\cos3x$ 的周期是多少？

解　设 T 为 $\cos3x$ 的周期，因为 $\cos3(x+T)=\cos3x$.

令 $x=0$，得 $\cos3T=1=\cos2n\pi$. 所以 $T=\frac{2n\pi}{3}$. 当 $n=1$，得 $T=\frac{2\pi}{3}$.

故(最小正)周期为$\frac{2\pi}{3}$.

9. 求下列函数的反函数：

(1)$y=3x+1$；　　(2)$y=\frac{x+1}{x-1}$；

(3)$y=1+\ln(x+2)$；　　(4)$y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1)原函数 $y=3x+1\rightarrow$直接函数 $x=\frac{y-1}{3}\rightarrow$矫形反函数 $y=\frac{x-1}{3}$，D：$\mathbf{R}$；

(2)$y=f(x)$：$y=\frac{x+1}{x-1}\rightarrow x=f^{-1}(y)$：$x=\frac{y+1}{y-1}\rightarrow y=f^{-1}(x)$：$y=\frac{x+1}{x-1}$，

D：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

(3)$y=f(x)$：$y=1+\ln(x+2)\rightarrow x=f^{-1}(y)$：$x=e^{y-1}-2\rightarrow y=f^{-1}(x)$：$y=e^{x-1}-2$，$D$：$\mathbf{R}$；

(4)$y=f(x)$：$y=\frac{2^x}{2^x+1}\rightarrow x=f^{-1}(y)$：$x=\log_2\frac{y}{1-y}\rightarrow y=f^{-1}(x)$：$y=\log_2\frac{x}{1-x}$，$D$：$(0,1)$.

10. 下列各组函数能否构成复合函数？如果能构成复合函数，请写出复合函数.

(1)$y=u^3$，$u=\sin x$；　　(2)$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$；

(3)$y=\sqrt{u}$，$u=2+v^2$，$v=\cos x$.

解　(1)因为 $R(u)=[-1,1]\subset\mathbf{R}=D(y)$，所以 y 与 u 可构成复合函数：$y=\sin^3x$；

(2)因为 $R(u)\cap D(y)=[-3,-1]\cap[0,+\infty)=\varnothing$，所以 y 与 u 不能构成复合函数；

(3)因为 $R(v)\cap D(u)=[-1,1]\cap(-\infty,+\infty)=[-1,1]\neq\varnothing$，所以 u 与 v 能构成复合函数：$u=2+\cos^2x$；

又因为 $R(u)\cap D(y)=[2,3]\cap[0,+\infty)=[2,3]\neq\varnothing$，所以 y 与 u 能构成复合函数：$y=\sqrt{2+\cos^2x}$.

11. 将下列函数分解成几个简单函数的复合：

(1)$y=\tan^2x$；　　(2)$y=e^{e^{-x^2}}$；

(3) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$；　　(4) $y=3\ln(1+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y=u^2, u=\tan x, D:\mathbf{R}$；

(2) $y=e^u, u=e-x^2, D:\mathbf{R}$；

(3) $y=\arcsin u, u=\sqrt{v}, v=\sin x, D:[2k\pi,(2k+1)\pi]$；

(4) $y=3u, u=\ln v, v=1+t, t=\sqrt{s}, s=1+x^2, D:\mathbf{R}$.

12. 作出下列函数的图形：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$；　　(2) $y=1-|x|$；

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x-1, & 1<|x|<2\end{cases}$.

解 (1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$. $D:(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$. 图形为少一点 $P_0(-3,-6)$ 而经两点 $P_1(0,-3)$ 及 $P_2(3,0)$ 的一条直线(图 1-1)；

(2) $y=1-|x|$. $D:\mathbf{R}$. 图形为共始点 $P_0(0,1)$ 的两条射线(图 1-2)；

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x-1, & 1<|x|<2\end{cases}$. $D:(-2,2)$. 图形由一个半圆 $y_1=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ 和两条线段 $y_2=x-1, x\in(-2,-1)\cup(1,2)$ 所组成(图 1-3).

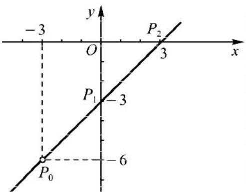

图 1-1

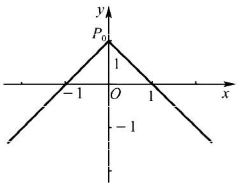

图 1-2

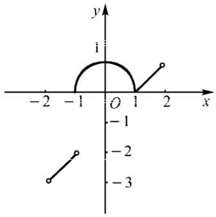

图 1-3

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$, 如图 1-4. $g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$, 如图 1-5.

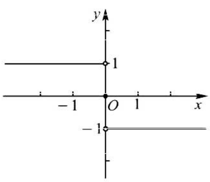

图 1-4

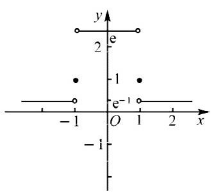

图 1-5

第二节　数列的极限

习题 1-2 解析

观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；

(3) $x_n=\frac{2n-1}{n+1}$；　　(4) $x_n=n+(-1)^n$；

(5) $x_n=e^{-n}$；　　(6) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$.

解　按顺序列出数列前几项，并揭示其规律，指出无限逼近的常数，或指出并无此常数存在：

(1) $x_n:\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},\cdots\to0$；

(2) $x_n:-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6},-\frac{1}{7},\frac{1}{8},\cdots\to0$；

(3) $x_n:\frac{1}{2},1,\frac{5}{4},\cdots,\frac{197}{100},\cdots,\frac{1997}{1000},\cdots\to2$；

(4) $x_n:0,3,2,5,4,7,6,9,\cdots\to+\infty$，没有极限；

(5) $x_n:\frac{1}{e},\frac{1}{e^2},\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^4},\frac{1}{e^5},\cdots\to0$；

(6) $x_n:2+1,2+\frac{1}{2^2},2+\frac{1}{3^2},2+\frac{1}{4^2},2+\frac{1}{5^2},\cdots\to2$.

第三节　函数的极限

习题 1-3 解析

1. 观察并写出下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. 事实上，$x\to\infty$，包含了 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$. 当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to0$，且当 $x\to-\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to0$. 从而当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to0$.

(2)$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$. 事实上，列表 1-1 观察到：当 $x\to 3\pm 0$ 时，$3x-1\to 8\pm 0$.

表 1-1

x	$\cdots$	2.97	2.98	$2.99\to 3\leftarrow 3.01$	3.02	3.03	$\cdots$
$3x-1$	$\cdots$	7.91	7.94	$7.97\to 8\leftarrow 8.03$	8.06	8.09	$\cdots$

(3)$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$. 事实上，列表 1-2 观察到：当 $x\to -2\pm 0$ 时，$\dfrac{x^2-4}{x+2}\to -4\pm 0$.

表 1-2

x	$\cdots\ -2.03\quad -2.02\quad -2.01\to -2\leftarrow -1.99\quad -1.98\quad -1.97\cdots$
$\dfrac{x^2-4}{x+2}\overset{x\neq -2}{=\!=\!=}x-2$	$\cdots\ -4.03\quad -4.02\quad -4.01\to -4\leftarrow -3.99\quad -3.98\quad -3.97\cdots$

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2x^3}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. 事实上，当 $x\to +\infty$时，$\dfrac{1}{2x^3}\to 0$；且当 $x\to -\infty$时，$\dfrac{1}{2x^3}\to 0$，从而当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{2x^3}\to 0$. 故当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{2x^3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+x^3}{2x^3}\to\dfrac{1}{2}$.

(5)$\lim\limits_{x\to -\infty}2^x=0$. 事实上，当 $x\to -\infty$时，$2^x\to 0$.

(6)$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. 事实上，当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to +\infty$，故 $e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<3\\ 2x+1, & x\geqslant 3\end{cases}$，作 $f(x)$的图形，并讨论当 $x\to 3$时，$f(x)$的左右极限及$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$的存在性.

解 作图，如图 1-6 所示. 由图可知

$$f(3-0)=3$$
$$f(3+0)=7$$

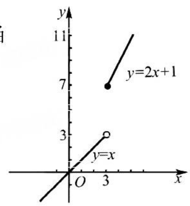

图 1-6

即

$$f(3-0)=3\neq 7=f(3+0)$$

所以$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$不存在.

第四节 极限运算法则

习题 1-4 解析

计算下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-5x+3)$； (2)$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{2x^4+x^2-1}$；

(3)$\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)$； (4)$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$；

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x+4}+2\right)$； (6)$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x^3+x}$； (8)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}$；

(9) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)$;

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x-1}$;

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{9x^3+x-7}$;

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{3x^4-2x^2+1}$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}$;

(15) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(17) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

(18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}\cdot(3x-2)^{20}}{(x+1)^{50}}$.

解　【方法一：应用极限运算法则】

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-5x+3)=\lim\limits_{x\to 2}2x^3-\lim\limits_{x\to 2}5x+\lim\limits_{x\to 2}3=2\lim\limits_{x\to 2}x^3-5\lim\limits_{x\to 2}x+3$

$$=2\cdot 2^3-5\cdot 2+3=16-10+3=9;$$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{2x^4+x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(2x^4+x^2-1)}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{2(\sqrt{3})^4+(\sqrt{3})^2-1}=\dfrac{3-3}{2\cdot 9+3-1}=0$;

【方法二：求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，若 $f(x)$ 是初等函数，且 $f(x_0)$ 存在(由第七节，换句话说，$f(x)$ 在 d_0 点连续)则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，就是直接把 x_0 代入 $f(x)$ 即得极限 $f(x_0)$，称为代入法，方法一直接变为方法二】

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)=1-\dfrac{2}{1-3}=1+1=2$;

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{2-2}{\sqrt{2+2}}=\dfrac{0}{2}=0$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x+4}+2\right)=\dfrac{0^2-3\cdot 0+1}{0+4}+2=\dfrac{1}{4}+2=2\dfrac{1}{4}$;

【方法三：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或$\infty$)，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$(或$\infty$)，此时称 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ $\left(\text{或}\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型未定式. 可把 $f(x)$ 或 $g(x)$ 进行因式分解，此后分子分母中消去非零因子(或非无穷大因子)，由此消去未定式，再使用代入法求极限. 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)\cdot h(x)}{g_1(x)\cdot h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$】

(6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{\underset{\text{因式分解①}}{=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x^3+x}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^2+1}=\dfrac{0+2}{0^2+1}=2$;

---

①表示对分子分母同时进行因式分解.

(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)(x+1)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1-2}{1+1}=\dfrac{1}{2}$;

(9) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}=3-0+0=3$;

【方法四:当 $x\to\infty$ 时,有理分式函数的极限为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m<n\\ \infty, & m>n\end{cases}$$
】

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x-1}\xlongequal{m=n=1}\dfrac{2}{3}$;

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{9x^3+x-7}\xlongequal{m=n=3}\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$;

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{3x^4-2x^2+1}\xlongequal{m=2<4=n}0$;

【方法五:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式且 $f(x)$ 或 $g(x)$ 是无理式,可把无理式乘上它的有理化因子.此后,分子分母中同时消去非零因子,由此消去未定式,再使用代入法求极限】

(14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}\xlongequal[\text{有理化}^{①}]{\frac{0}{0}\text{型}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+\sqrt{1+x})}{-x}$

$=-\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{1+x})=-2$;

(15) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\xlongequal[\text{有理化}]{\frac{0}{0}\text{型}}\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2(x-4)2\sqrt{2}}{(x-4)6}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$;

【方法六:等差或等比数列求无穷和极限,应先用前几项和公式替代无穷和,再求极限】

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]=2$;

【方法七:对于 $\infty-\infty$ 型未定式,应先通分,再用方法二】

(17) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)\xlongequal[\text{通分}]{\infty-\infty\text{型}}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}$;

①表示分子分母同时乘同一有理化因子.

(18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(x+1)^{50}}\xlongequal{m=n=50}\dfrac{2^{30}3^{20}}{1^{50}}=2^{30}3^{20}$(应用方法四).

第五节　极限存在准则及两个重要极限

习题 1-5 解析

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{5}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 3x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$($x$ 为不等于零的常数)；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\xlongequal{令\,3x=t}3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=3\cdot 1=3$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{5}}=5^2\lim\limits_{\frac{x}{5}\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{x}{5}\right)^2}{\left(\sin\dfrac{x}{5}\right)^2}=25\cdot\left[\lim\limits_{\frac{x}{5}\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{5}}{\sin\dfrac{x}{5}}\right]^2\xlongequal{令\frac{x}{5}=t}25\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=25\cdot 1^2=25$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{3x}{3x\sin 3x}\cdot\dfrac{\cos 3x}{1}=\dfrac{4}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\dfrac{4}{3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}\xlongequal{\div x[①]}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2$；

【方法十：变量替换，令 $y=\arcsin x$，$x=\sin y$，当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$】

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\!=\!=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{\frac{x}{2^n}\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x=1\cdot x=x$($x$ 为不等于 0 的常数)；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}\xlongequal{\div\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)}$

①表示分子分母同时“$\div x$”.

$$\xlongequal{\div(1-\cos x)}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

2. 计算下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$； (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}$；

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}-1}$； (4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{1+x}\right)^{x}$；

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$； (6)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)^{\frac{1}{-x}}]^{-1}=[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}}]^{-1}=e^{-1}$；

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{\frac{x}{2}\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{4}=e^{4}$；

$$(3)\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-1}$$

$$=\left[\lim_{-\frac{x}{3}\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-1}\cdot 1=e^{-1}；$$

【采用方法十：令 $t=\frac{2}{1+x}$，$x=\frac{2}{t}-1$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$】

$$(4)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{1+x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}-1}=\lim_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{2}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-1}$$

$$=e^{2}\cdot 1=e^{2}；$$

$$(5)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}\xlongequal{\div x^{x}}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{\left[\lim\limits_{-x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}；$$

$$(6)\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{-x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\left[\lim_{-x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}.$$

第六节 无穷大与无穷小

习题 1-6 解析

1. 指出下列函数中哪些是无穷小，哪些是无穷大？

(1)$2-\frac{1}{x}$，$x\to 0$； (2)$\frac{2}{x^{2}+2}$，$x\to\infty$；

(3)2^{-x}，$x\to+\infty$； (4)$\frac{1}{2^{x}}$，$x\to-\infty$.

解 【方法十一：无穷大量与无穷小量互为倒数】

(1)当 $x\to 0$ 时，$2-\frac{1}{x}$为无穷大；

(2)当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{2}{x^2+2}$ 为无穷小；

(3)当 $x\to+\infty$ 时，2^{-x} 为无穷小；

(4)当 $x\to-\infty$ 时，$\dfrac{1}{2^x}$ 为无穷大.

2. 函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 在什么变化过程中是无穷大量，又在什么变化过程中是无穷小量？

解　函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，当 $x\to1$ 时，是无穷大量；而当 $x\to\infty$ 时，是无穷小量.

3. 利用无穷小的性质，计算下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解　【方法十二：无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量】

(1)当 $x\to0$ 时，x^2 是无穷小；而 $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，即 $\cos\dfrac{1}{x}$ 是有界量，所以 $x^2\cos\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，故 $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}=0$；

(2)当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小；而 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，即 $\arctan x$ 是有界量，所以 $\dfrac{\arctan x}{x}$ 是无穷小，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

4. 当 $x\to0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x^2}{2-x}=0$，所以 x^2-x^3 是 $2x-x^2$ 的高阶无穷小.

5. 当 $x\to1$ 时，无穷小 $1-x$ 与下列无穷小是否同阶？是否等价？

(1)$1-\sqrt[3]{x}$；　　(2)$1-\sqrt{x}$；　　(3)$2(1-\sqrt{x})$.

解　(1)因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-\sqrt[3]{x}}=3$.

所以，当 $x\to1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小；

(2)因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}=2$.

所以，当 $x\to1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt{x}$ 是同阶无穷小；

(3)因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{2(1-\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(1-\sqrt{x})}=1$.

所以，当 $x\to1$ 时，$1-x$ 与 $2(1-\sqrt{x})$ 是等价无穷小.

6. 用等价无穷小代换计算下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$（$m$、$n$ 为正整数）；　　(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{\sin x^2}$；