高等学校教学用書

算 术

M.K. 格列本卡 C.E. 里亞平著

高等教育出版社

高等学校教学用書

算　　　术

M. K. 格列本卡　C. E. 里亞平著
郝鈵新譯

高等教育出版社

本書系根据苏俄教育部教育出版社(Государственное учебно-педагогическое издательство мин стерства просвещения РСФСР) 1952 出版的格列本卡与里亞平 (М. К. Гркбенча и С. Е. Ляпин) 合著的"算术" (Арифметика) 一書譯出。原書系1947年格列本卡著"算术"(中譯本張禾瑞孙永生譯，1953年初版)一書的修訂第二版，并經苏俄教育部审定为师范專科学校教科書。

算　　术

M. K. 格列本卡　C. E. 里亚平著

郝鈵新譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

(北京市書刊出版业營业許可証出字第054号)

京华印書局印装　新华書店发行

統一書号13010·564　开本850×1168 1/32　印張9 15/16

字数294,000　印数68,501—70,500　定价(6)¥0.95

1953年9月第1版　1960年3月第6版(修訂本)

1960年3月第12次印刷

第一版序

在現时有一种意見是：做为科学的算术的內容应該限于关于数的理論基础，最極端的意見，認为只应限于关于正有理数、零及其运算的理論。从这一观点来看，論証演算技术的問題，特别是象名数、比及比例、成比例的量、百分法等等这样的部分，就或者带有实用的性質，或者是算术科学以外的东西，而它們之所以包括在算术里面，是由于由来已久的傳統。

但是毫无異議的是：算术的普通內容决定了中小学算术課程的范圍，并且在全世界的中小学实踐中巳是十分确定的。

由于师范專科学校的物理数学系培养算术教师的事实，在專科学校內算术的研究只限于屬于算术科学的那些部分将是不够愼重的，因为这些部分在范圍上仅是中小学算术的一小部分。

按照这一观点来实行，那么对培养未来的教师能在中小学进行算术各部分的教学来說，自然将造成很大的脫节。

在这本教科書內，为了更好地面向算术各部分的教学来培养教师，因而試圖在較高的理論水平上講述全部中小学算术。这种方針的采納，自然要求保持中小学教程的結构。后一点，就能够最大限度地把这里所講的一系列的問題直接利用于中小学教学而言，也是合适的。所以本書不是有“高等观点”的算术，而是中小学算术的扩充教程，其目的不仅为提高教师的科学眼界，也是为了本書的在中小学教学中部分地应用。由上所述，这本書不只按其內容而且按其結构来說，和韋伯尔、韋尔斯坦、坦納尔、費伯尔、阿諾德的書是完全不同的。这些書的質量之高巳为俄国数学教师所熟知。

我謹向B.B.斯切潘諾夫教授深致謝意，因为他給了非常有价值的指示。我也向Б.А.屠里諾夫同志表示謝意，他的宝貴的經驗在一系列的問題上帮助了我。最后，在本書写作过程中，我曾經和C.П.阿列克薩辛同志多次交換意見，这些意見都巳在不同的程度上包含在書的內容里，我在这里謝謝他。

M.K.格列本卡　1947.

第二版序

在 1947 年出版了格列本卡的算术第一版。这本教学参考書的价值和所起的作用是不待贅言的。但是現在无論是师范專科学校或是师范学院，关于算术的教学大綱都已經有了改变。另一方面，格列本卡的算术教程中某些章节对学生来説是比較难了一些。上述的两个原因促使我們来重新修訂这一本書，删去或按另一方式来講述某些問題，同时保持教科書的一般体裁。在这种形式下，我們認为，这本書对于物理数学系的学生以及想提高自己知識的教师来説是比較易于接受的。

开始引入基数及序数的概念。如果由于某种原因不願意以同时講述这两种理論作为开端的話，也可以只限于其中一种，因为学了两种理論或是只学了一种理論，对这一教程以后的闡述是沒有关系的。此外，如果教师認为把分数看作度量的結果是恰当的話，那末第四章可以按以下的次序来講：§ 62, § 63, § 42, § 43 等等。

在修訂本書时，И. В. 普罗斯里亞科夫，Н. Т. 澤尔欽尼諾夫，И. В. 巴拉諾娃，И. Д. 基塞辽夫和 Л. М. 弗利得曼以他們的意見及建議給予了很大的帮助，为此向他們表示誠摯的謝意。

我們将感謝把缺点和适当的补充通知我們的讀者。

C. E. 里亞平　1951.

目　录

第一章　自然数

§ 1. 作为科学与作为中小学科目的算术 …… 1
§ 2. 运算的性質 …… 3
§ 3. 計数法 …… 5
§ 4. 集合．基数的理論 …… 9
§ 5. 序数的理論 …… 25
§ 6. 自然数的加法 …… 26
§ 7. 数的加法的作法 …… 30
§ 8. 不等式的加法 …… 32
§ 9. 扩大的自然数列 …… 33
§10. 减法 …… 34
§11. 减法的做法 …… 40
§12. 不等式的减法 …… 42
§13. 和与差的变化 …… 43
§14. 自然数的乘法 …… 44
§15. 乘积的計算方法 …… 54
§16. 不等式的乘法 …… 57
§17. 除法 …… 57
§18. 除法的基本性質 …… 62
§19. 除法的做法 …… 65
§20. 成份改变时运算結果的变化 …… 67
§21. 数的整除性 …… 71
§22. 不等式的除法 …… 73
§23. 历史知識 …… 74

第二章　記数制度

§24. 制度数 …… 81
§25. 制度数的运算 …… 86
§26. 从一个記数制度轉化为另一記数制度 …… 89
§27. 記数制度簡史 …… 92

第三章　数的整除性

§28. 二数的公因数 …… 96
§29. 輾轉相除法 …… 97
§30. 关于整除性的基本定理 …… 99
§31. 公倍数 …… 103
§32. 最小公倍数的求法 …… 104
§33. 若干数的最大公因数 …… 106
§34. 若干数的最小公倍数 …… 108
§35. 質数 …… 110
§36. 整除性的判别法 …… 116
§37. 因数的个数 …… 121
§38. 剩余 …… 125
§39. 数的欧拉函数 …… 129
§40. 欧拉定理与費尔馬小定理 …… 131
§41. 算术运算的验算 …… 133

第四章　分数

§42. 分数的概念 …… 141
§43. 分数的基本性質 …… 142
§44. 分母等于 1 的分数与 1 的分数形式 …… 147
§45. 分数的加法 …… 148
§46. 分数的减法 …… 151
§47. 分数的乘法 …… 155
§48. 分数的除法 …… 158

§49. 带分数……163
§50. 关于分数的簡單历史……165

第五章 十进小数

§51. 十进小数的定义……170
§52. 十进小数的运算……175
§53. 利用十进小数的追近……179
§54. 化十进小数为普通分数……184
§55. 化普通分数为十进小数……185
§56. 循环小数……187
§57. 混循环小数……203
§58. 关于循环小数概念的推广……206
§59. 分数的十进近似值……208
§60. 制度小数……210
§61. 关于十进小数的簡單历史知識……220

第六章 量的度量

§62. 关于量的概念……223
§63. 公度……226
§64. 不可通約量……229
§65. 度量的过程……234
§66. 度量的技术……241
§67. 名数……244

第七章 成正比例与成反比例的量

§68. 量的比……257
§69. 比例……258
§70. 函数的概念……268
§71. 成正比例的量……272
§72. 成反比例的量……275
§73. 关于成比例的量的問題……277
§74. 与一类量成正比例而与另一类量成反比例的量……281

第八章 近似計算

§75. 量的近似值……285
§76. 絕对誤差与相对誤差……287
§77. 数的四舍五入……290
§78. 近似数的运算……293
§79. 算术运算的簡略算法……301
§80. 估計誤差的計算問題的解法……306

第一章　自然数

§1. 作为科学与作为中小学科目的算术

算术是关于数以及它們的运算的科学。

从这个定义出發，不仅关于自然数及分数的理論应該屬于算术，而且关于正数及負数，无理数及复数等的理論也应該屬于算术。此外，关于級数，序列，組合等的理論也还应該包括在算术課程中。

因为对于数要进行以下七种运算（加、減、乘、除、乘方、开方、求对数），所以关于这些运算的性質的研究也是算术的內容。

作为中小学科目的算术的內容要少得多，它仅包含关于自然数及分数以及四种基本运算（加、減、乘、除）的理論。这样，作为科学的算术的內容比作为中小学科目的算术的內容广泛得多。

尽管研究的对象都是数及它們的运算，但作为科学的算术和作为中小学科目的算术在講述上有着很大的区别。

一开始研究算术，我們就会遇到在算术中扮演重要角色的一些概念。在这些概念中有这样的一些概念，它們的意义是借助于其他先前知道的概念来表述的；比方說，两个数 a 与 b 的差指的是这样的数 c，这个数与 b 的和等于 a。在这里，新的概念是借助于先前知道的概念“和”与“等于”来定义的。

通过先前知道的概念来对新概念所做的闡述叫做概念的定义。

但也有这样的一些概念，給它們来下定义是不可能的。“量”，“数”，“計算”等都应該算作这一类的概念。

这样的概念叫做原始的概念。介紹这些概念的方法是使人通曉它們的性質。

在算术的闡述中，我們提出关于概念的各种論断。在这些論断中有一些是作为自明的，显而易見的道理来引入的。这些論断是人类許多世紀生活实踐的結果，它們被称为公理。屬于公理的还有被作为原則而提出的論断；这些原則幷不是显然的，但是沒有它們就不能把数学建立成为一門科学。这一类的概念，正如一切数学概念一样，是物質世界中具体关系的抽象表現。数学归納法原理，就可以算作这样的原則。

除了显然的論断和用原則形式提出而对于一切研究数学的人都有約束性的論断以外，我們还会遇到这样的論断，这种論断是根据已知的論断按照邏輯規則进行推理所得的結果。例如，若一数的各位数碼的和可以被三整除，那末这个数也可以被三整除。能够利用邏輯推理来証明其正确性的那一类論断叫做定理。

把論断分做公理和定理是很不容易的一件工作。把一个論断算作公理，必須确信它不能由其他公理推出，幷且不与其他公理矛盾。同时，在构成一个系統的教程时，必須使公理的个数对于証明以后的定理来說是够用的。我們还要指出，公理体系的选擇可以是很不同的，而某些公理在另一个公理体系中可以是定理。所有这些問題远非容易的問題，而直到現时还沒有得到解决。

算术中基本的原始概念之一就是关于自然数及自然数列

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

的概念。

在建立自然数的理論时需要确定，那些概念应該作为原始概念，那些論断作为公理，那些論断作为定理。因为对于这些問題有好几种答案，所以也存在着好几种自然数的理論。

最常用的是其中的两种：基数的理論及序数的理論。

§2. 运算的性質

設給定二数 a 与 b，根据已知的規則由給定的二数来求新数，叫做运算，并且如下地来表示：$f(a, b)$。例如：

$$f(5, 3)=5+3=8;$$

$$\varphi(81, 4)=\sqrt[4]{81}=3.$$

若施行运算的結果得一个数，那末这个运算叫做單值运算；若結果得若干个数，那末这个运算叫做多値运算。例如，实数的加法是單值运算，而求正数的平方根是二値运算。

在算术以及初等代数里所研究的是以下的直接运算及逆运算，这些运算可以按級区分如下：

級	直接运算	逆运算
1 級	加法	減法
2 級	乘法	除法
3 級	乘方	开方，求对数

在我們这个課程里将只討論第一級和第二級的运算。

在着手研究一个运算的性質以前，必須确定，这个运算在什么样的数的范圍內以及在什么条件之下能够施行。比方說，在实数及复数范圍內加法永远可以施行。在自然数的范圍內，減法仅当被減数大于減数时才能施行，但若在自然数中添上数 0，那末当被減数等于減数时減法也能施行。

把除数等于零的情形除外，除法在实数范圍內永远可以施行。开偶数次方在正实数的范圍內可以施行，但当根号下的数是負数时就不能施行。

我們要注意，直接运算在任何数的范圍內可以施行；但是逆运算对于某些数的范圍来說在一定的限制下才能施行。

若是把給定的数（运算的組成分子）对調一下，运算的結果可

能是同一个数，即

$$f(a,b)=f(b,a).$$

这个性質叫做交换性質。但并不是一切运算都具有交换性質。例如实数的加法具有交换性質，即

$$a+b=b+a.$$

但是乘方已不具有交换性質，例如

$$f(2,3)=2^3=8;$$

$$f(3,2)=3^2=9.$$

同样，求对数也不具有交换性質:

$$\lg(2,8)=\lg_2 8=3;$$

$$\lg(8,2)=\lg_8 2=\frac{1}{3}.$$

若是对三个元素(数)进行两次运算总得到同一的結果，那末就說，这个数学运算具有結合性質。例如:

$$(3+5)+2=3+(5+2).$$

但是不能認为对于每一数学运算来說，結合性質都成立，即

$$f[a,f(b,c)]=f[f(a,b),c].$$

例如， $$(a^b)^c\neq a^{(b^c)}$$

就不永远成立。

事实上， $$(3^2)^3=9^3=729.$$

假若按另一順序結合这些数，則得出另一結果:

$$3^{(2^3)}=3^8=6561.$$

我們要注意，在扩大数的概念的过程中，我們对于每一类数都給出运算的定义，并且指明运算的性質，但是对于范圍較狹的数成立的性質对于范圍較广的数可能不再成立。比方說，在自然数的范圍內，乘法被看作簡化了的加法（乘数含有多少个單元，就取多少个被乘数作为被加数）。这个定义对无理数来說已不再适用。

又如:两个自然数的乘积不小于每一因子;对于分数来説这一性質不永远成立。对于某一种新的(扩大了的)数来説，运算必須这样定义，使得以前在較狹的范圍內所建立的运算是新运算的特殊情形。

也必須确定,利用每一个运算可以解决什么样的問題。

§3. 計数法

在数东西时，我們念出数: 一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,…。这种数法是用單元的数法。

时常为了迅速起見,也用双或用五来数,即每一次数两个或五个东西，而不是象用單元数时那样每次只数一个。有时用十来数更为方便: 一个十，两个十，…，十个十。若在用十数时有不能数的东西，那末就用單元来数(数到十)。在数的結果中得到若干个十与若干个單元,例如: 两个十又七个單元。但也可以用百来数，每次数一百个东西，这时数的結果将是一个百，两个百，…，十个百; 我們不説“十个百”而説“一千”。若在用百数时还剩下有不能数的东西,那末再用十及單元来数它們。

也可以用千来数,等等。

在数东西的时候,一个东西一个东西地数过去，我們念出数: 一,二,三等等。这时对每一个东西附上所数出的那个数。在这种情况下,数数叫做編号,而附到每一个东西上的数叫做序数。

数零表示,要数的东西不存在。

为了建立数数的一般原則,我們引入以下名称:数一叫做第一位單位,十个第一位單位,即数“十”,叫做第二位單位,十个第二位單位(十个十),即数“百”,叫做第三位單位,等等,也就是説，任何一位的十个單位构成下一位的一个單位。

数数时得到的最初十个單元屬于第一位,并且叫做簡單單元。

十个單元构成第二位單位。

第 3 位單位叫做百； 第 4 位單位叫做千；
第 5 位單位叫做万； 第 6 位單位叫做十万；
第 7 位單位叫做百万； 第 8 位單位叫做千万；
第 9 位單位叫做亿； 第 10 位單位叫做十亿；
第 11 位單位叫做百亿； 第 12 位單位叫做千亿；
第 13 位單位叫做万亿等。

从第一位开始，每三个相邻的位构成一級。

第 1 級——單元級——由第一，第二与第三位組成；

第 2 級——千級——由第四，第五与第六位組成；

第 3 級——百万級——由第七，第八与第九位組成，等等。①

构成一級的三个位叫做这一級的个位，十位与百位。

現时采取以下的制度来書写数目。引入符号

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

来表示数“一”，“二”，“三”，“四”，“五”，“六”，“七”，“八”，“九”，这些符号叫做数碼。

这些数碼的讀法和它們所表示的数的讀法一样。除去所引用的这九个数碼之外，还引用一个数碼 0(零)。

除零外，任何数碼都叫做有效数碼。

数的写法基于“数碼的位置值”原则，也就是說，每一个数碼除了依其写法而决定的本身的値外，还有一个所謂“位置値”，例如，数碼 3 可以是三个單元，假如在数的表示式中它位于第一位；也可以是三个十(30)，假如在数的表示式中位在从右数第二位；也可以是三个百(300)，假如在数的表示式中位在从右数第三位等等。

用一个有效数碼所表示的数叫做一位数；用两个数碼，其中左

① 原表还有若干級的名称，因与我国習惯不合而删去——譯者注。

边的数碼是有效数碼,所表示的数叫做二位数。

类似地可以定义多位数:三位数,四位数等等。

关于数的讀法有以下規則:在讀任何一个数之前,先把这个数从右向左每三个数碼分成一級(在最高級中可以是一个或两个数碼),然后每一級分开来讀,从最高級开始到最低級为止,每一級附加上級的名称。例如,数 12327409 讀作:十二百万三百二十七千四百零九。[1]

在写数时应該遵循以下規則:因为任何数都是由最高級开始按級来讀,并且每一級由三个位构成(高級可能只含一个或两个位),所以在写数时把这些級从左向右書写,始于最高位單位,而終于簡單單元所在的那一級。若在某一級中空一位,那么在它的位置上写一个零,若整个一級都空着,那末就写三个零。例如,二千三百七十万零五千六百四十八写作 23705648;二亿一千六百万零九百五十三写作 216000953。

要指出在一个数里面某一位單位有多少,应該删去一切低于这个位的数碼,并且讀出剩下的数碼所表示的数。

例如:在数 19329 中含有 19 个千,193 个百,1932 个十。

上面所指出的記数制度叫做印度記数制度。在八世紀时它由印度傳入阿拉伯,又由后者傳到欧洲。最初的印度数碼和現在的数碼很少有相似之点,它們只是逐漸地取得了現在的形状。

斯拉夫人利用 27 个字母来表示数,为了使数的表示法区别于一般的字或音节,規定在表示数的字母的上面放置一个特殊的符号,这个符号叫做“齐特罗(ТИТЛО)”。这些字母分别表示以下的 27 个数(小于一千):

① 此种讀数法与我国習慣不合——譯者注。

斯拉夫字母	对应数的表示法	斯拉夫字母	对应数的表示法
а (аз)	а̃—1	ξ (кси)	ξ̃—60
в (веди)	в̃—2	о (он)	о̃—70
г (глаголь)	г̃—3	п (покой)	п̃—80
д (добро)	д̃—4	ү (червь)	ү̃—90
е (есть)	е̃—5	ρ (рцы)	ρ̃—100
s (зело)	s̃—6	с (слово)	с̃—200
ȝ (земля)	ȝ̃—7	т (твердь)	т̃—300
и (иже)	и̃—8	у (ук)	у̃—400
ѳ (фита)	ѳ̃—9	ф (ферт)	φ̃—500
і (и)	і̃—10	х (хер)	х̃—600
к (како)	к̃—20	ψ (пси)	ψ̃—700
л (люди)	л̃—30	ω (омега)	ω̃—800
м (мыслете)	м̃—40	ч (цы)	ч̃—900
N (наш)	Ñ—50		

在齐特罗之下写成一串的若干个字母所表示的数等于这些字母所表示的数的和。这时小于 1000 大于 20 的数按照讀它們的順序放置，换句話說，从左向右放置。

例如：928 被記作 чк̃и；

数 16 被記作 s̃і，亦卽，六与十，十六是在这个順序下来讀的。

数 1000 写作≠ã，卽用 ã 并且在它前面加上一个符号 ≠ 来表示。

数 20406 写作：≠bỹs。

罗馬人一共只用七个符号来表示数：

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000.

小于 2000 的数看成上面所指出这些数的和，并且利用以下的規則書写:

1) 若符号 I 或 X 或 C 位在較大的符号的后面，則应該作加法;

2) 若 I 或 X 或 C 在較大的符号的前面，則应該做减法。

1951—MCMLI; 1029—MXXIX; 476—CDLXXVI.

二千記作: II_{m}，即用 2 并且在它后面略低一些放置一个符号 m(mille—千)来表示。同样地把 25000 表作 $\mathrm{XXV}_{\mathrm{m}}$。

§4. 集合. 基数的理論

起初数的各种运算以及数的性質和它們之間的相互关系都是借助于对具体东西的实驗来建立的。但数学的較高發展表明，有必要来建立数的一切运算的理論基础，而不每一次都求助于实驗。

如我們所指出的那样，存在两种最普通的自然数的理論: 基数的理論及序数的理論。

在基数的理論基础中有一个原始的概念，就是“物体的集合”。

把任意一些东西　　$a, b, c, \cdots, d$

看作一个整体，我們就說，有一个由 $a, b, c, \cdots, d$ 这些东西所組成的集合。

这些东西叫做集合的元素。例如

1) 可以給定四边形的集合(圖 1);

圖 1

2) 可以考察三角形的集合(圖 2)。

圖 2