普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

主　编／倪　岚

XIANXING DAISHU

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

主　编　倪　岚
副主编　陈　辉　曹国凤

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 倪岚主编. —成都：西南交通大学出版社，2011.8

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5643-1256-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①倪岚… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 137373 号

普通高等学校“十二五”规划教材

线 性 代 数

主编 倪 岚

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	9.25
字　　数	231 千字
版　　次	2011 年 8 月第 1 版
印　　次	2011 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1256-5
定　　价	28.80 元

前　言

线性代数是普通高等院校理工类和经管类相关专业的一门重要基础课程，是学习后续课程的重要工具，也是研究生入学考试的必考内容. 它对培养大学生的计算和抽象思维能力十分重要. 近些年来，随着科学技术突飞猛进的发展，线性代数已经渗透到经济、金融、信息、社会等各个领域，人们已越来越深刻地感到线性代数教材应该在充分考虑大学生的特点，帮助大学生掌握相关的代数知识的同时，提高其用代数的方法思考、解决实际问题的能力.

工科及理科非数学专业的学生学习本课程的目的，主要在于加强基础及实际应用. 通过线性代数的学习，一方面可以进一步培养抽象思维能力和严密的逻辑推理能力，为进一步学习和研究打下坚实的理论基础，另一方面为立志报考研究生的同学提供必要的线性代数理论知识、解题技巧和方法. 为此，结合教育部教学指导委员会所制定的新的基本要求，在编写教材时，我们注重讲清基本概念、原理和计算方法，避免繁琐的理论推导和证明，力求简明、准确；在内容的安排上注重系统性、逻辑性，由浅入深、循序渐进。注意理论联系实际，加强概念与理论的背景和应用介绍，利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念. 通过配以较多的例子，开阔学生的思路，理解所学概念。每章还配有大量习题（附有答案或提示）以测试学生对重点内容、基本方法的掌握程度.

本书第一章、第五章由黑龙江科技学院倪岚编写，第二章、第六章由黑龙江科技学院陈辉编写，第三章、第四章由东北农业大学成栋学院曹国凤编写. 全书由倪岚担任主编，由陈辉、曹国凤担任副主编. 在本书编写过程中，杨磊组织了编者间协调和校对工作，一些同仁在编写中做了大量协助工作，在此谨向他们致以由衷的谢意.

限于编者水平，疏漏差错仍恐难免，敬请读者多提意见，不吝赐教，以便改正！

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第一章　行列式……1

第一节　*n* 阶行列式……1

第二节　行列式的性质……8

第三节　行列式按一行（列）展开……12

第四节　克拉默（Cramer）法则……18

习题一……21

第二章　矩　阵……25

第一节　矩　阵……25

第二节　矩阵的运算……28

第三节　可逆矩阵……33

第四节　分块矩阵……39

习题二……42

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组……46

第一节　矩阵的初等变换……46

第二节　矩阵的秩……52

第三节　线性方程组的解……56

习题三……65

第四章　向量组的线性相关性……68

第一节　向量组及其线性组合……68

第二节　向量组的线性相关性……70

第三节　向量组的秩……75

第四节　线性方程组的解的结构……78

第五节　向量空间……84

习题四……88

第五章　相似矩阵与二次型……90

第一节　向量的内积……90

第二节　方阵的特征值与特征向量……93

第三节　相似矩阵与矩阵的对角化……97

第四节　二次型及其标准型……105

第五节　正定二次型 …… 111
习题五 …… 113

第六章[*]　线性空间与线性变换 …… 116

第一节　线性空间的定义与性质 …… 116
第二节　维数、基与坐标 …… 119
第三节　基变换与坐标变换 …… 121
第四节　线性变换 …… 124
第五节　线性变换的矩阵 …… 127
习题六 …… 129

习题答案 …… 131

第一章 行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念，其理论起源于线性方程组的求解，它在自然科学的许多领域中都有广泛的应用. 本章主要介绍n阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外还要介绍运用行列式求解n元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

第一节 *n* 阶行列式

一、二、三阶行列式

解方程是代数中一个基本的问题，特别是在中学所学的代数中，解方程占有非常重要的地位. 线性方程组的理论在数学中是最基本的也是最重要的内容.

下面考察二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，由消元法知此方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

它由方程组的四个系数确定.

为了便于记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

(1.3) 式称为**二阶行列式**（determinant）.

数a_{ij}（$i=1,2;\ j=1,2$）称为行列式的元素.元素a_{ij}的第一个下标i称为行标，表明该元素位于第i行；第二个下标j称为列标，表明该元素位于第j列. 由上述定义可知，二阶行列式是由4个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式的记号中就是**“对角线法则”**：如图1.1所示，把a_{11}到a_{22}的实连线称为行列式的**主对角线**，把a_{12}到a_{21}的虚连线称为行列式的**副对角线**。于是，二阶行列式等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

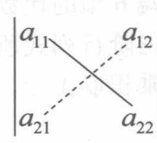

图 1.1 二阶行列式

由此法则，令

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

则当 $D\neq 0$ 时，二元一次方程组（1.1）的唯一解（1.2）可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

例 1.1 求解二元线性方程组：

$$\begin{cases}3x_1+7x_2=10\\ 2x_1+5x_2=4\end{cases}$$

解 先计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{vmatrix}=3\times5-2\times7=1\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}10 & 7\\ 4 & 5\end{vmatrix}=10\times5-4\times7=22$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 10\\ 2 & 4\end{vmatrix}=3\times4-2\times10=-8$$

所以线性方程组的唯一解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=22,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-8$$

相应地，对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

也有类似的结论. 为此，我们记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\tag{1.5}$$

式（1.5）中的记号 D 称为三阶行列式，它是由 3 行 3 列共 9 个元素并由式（1.5）计算得到的右端 6 项的代数和.

三阶行列式所表示的代数和可利用图 1.2 所示的**对角线法则**来记忆，图中实线上三个元素的乘积取正号，虚线上三个元素的乘积取负号.

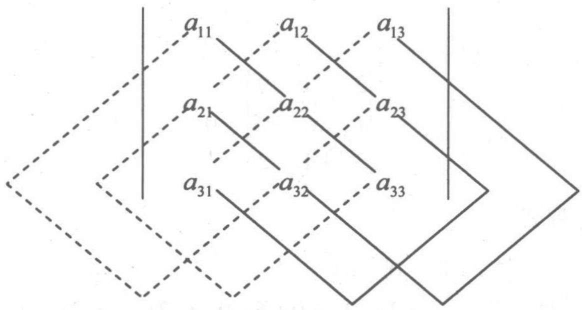

图 1.2 三阶行列式

引入三阶行列式之后，我们称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为方程组（1.4）的**系数行列式**. 当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组（1.4）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1.2 求解三元线性方程组：

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3=-2 \\ x_1-x_2-x_3=4 \\ -x_1+2x_2+6x_3=1 \end{cases}$$

解 先计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=3\times(-1)\times 6+1\times 2\times 1+5\times(-1)\times(-1)-$$

$$1\times(-1)\times(-1)-5\times 1\times 6-3\times 2\times(-1)=-36\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=-108,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=90,\quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-54$$

所以方程组有唯一解，且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3}{2}$$

例 1.3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

解 先计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4x + 0 + 6 - 0 - (-2) - 4 = 4x + 4$$

所以

$$4x + 4 = 0$$

解得 $x = -1$.

从上述讨论可以看出，引入二、三阶行列式的概念之后，二元和三元线性方程组的解可以公式化. 为了把这一思想推广到 n 元线性方程组，下面先引入 n 阶行列式的概念.

二、排列与逆序数

在 n 阶行列式的定义中，要用到 n 级排列的一些性质.

定义 1.1 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 **n 级排列**，其中 i_k 为 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数，k 表示这个数在 n 级排列中的位置，$k=1,2,\cdots,n$.

n 个不同元素共有 $n!$ 个不同的 n 级排列.

显然 $12\cdots n$ 也是一个 n 级排列. 通常规定这种从小到大的排列为一个标准次序，其他的排列都或多或少地破坏自然顺序.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即 $i_t > i_s$，则称这两个数有一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数记为

$$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$$

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

下面给出计算逆序数的方法

方法一 分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

方法二 分别计算出排在 $1,2,\cdots,n$ 前面比它大的数码之和，即分别算出 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素的逆序数，这每个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

例 1.4 求下列排列的逆序数.

（1）32514； （2）462351；

（3）$12\cdots(n-1)n$ （4）$n(n-1)\cdots 21$.

解 （1）$\tau(32514) = 0+1+0+3+1 = 5$；

（2）$\tau(462351) = 5+2+2+0+1+0 = 10$；

（3） $\tau(12\cdots(n-1)n)=0$；

（4） $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

可以看出排列（1）是奇排列，排列（2）（3）是偶排列.而排列（4）的奇偶性与n的取值有关，即当$n=4k,4k+1$（k为非负整数）时为偶排列，否则为奇排列.

在一个排列中将某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个**对换**.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

推论 在全部n级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有$\dfrac{n!}{2}$个.

定理 1.2 任意一个n级排列与排列$12\cdots n$都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

三、n阶行列式

在给出n阶行列式的定义之前，先来看一下二阶和三阶行列式的定义.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

它们具有以下特点：

（1）它们都是一些乘积的代数和，而每一乘积项都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.

（2）在三阶行列式中，每项的一般形式可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中$j_1j_2j_3$是$1,2,3$的一个排列. 容易看出，当$j_1j_2j_3$是偶排列时，对应的项在式（1.5）中带有正号；当$j_1j_2j_3$是奇排列时对应的项带有负号. 因此三阶行列式可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$表示对所有 3 级排列$j_1j_2j_3$求和

定义 1.4 n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成n行n列，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

称为n阶行列式，它等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列. 当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，(1.7) 式带有正号；当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，(1.7) 式带有负号，也就是可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

这里$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有$n$级排列求和. 行列式$D$通常可简记为$\det(a_{ij})$或$\left|a_{ij}\right|_n$.

注：(1) 行列式是一种特定的算式，最终的结果是一个数.

(2) n阶行列式是$n!$项的代数和.

(3) n阶行列式的每个乘积项都是位于不同行、不同列的n个元素的乘积.

(4) 每一项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的符号为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

(5) 一阶行列式$\left|a_{11}\right| = a_{11}$，不要与绝对值的概念相混淆.

例 1.5 证明：

(1) 上三角形行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) $D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

证明 (1) 由行列式的定义知

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

所以只需找出一切可能的非零项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$即可.

第n行除a_{nn}外其余元素全为0，所以$j_n = n$；

第$n-1$行除$a_{n-1,n-1},a_{n-1,n}$外其余元素全为0，又$j_n = n$，所以$j_{n-1} = n-1$；

以此类推：$j_{n-2} = n-2,\cdots,j_1 = 1$，

因此D中仅有一项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$可能非零，故

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 类似于 (1) 的推理，

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

注：由上例可知

（1）下三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

（3）对角行列式：

$$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

（4）$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

在行列式的定义中，为了确定每一项的正负号，我们把每个乘积项元素按行指标排起来. 事实上，数的乘法是可交换的，因而这个元素的次序是可以任意写的. 一般地，n 阶行列式中的乘积项可以写成

$$a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$, $q_1q_2\cdots q_n$ 是两个 n 级排列. 由于每交换两个元素对应的行标列标都做了一次对换，因此由定理 1.1 知：它们的逆序数之和的奇偶性不变. 因此有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由此可见，行指标与列指标的地位是对称的. 因此为了确定每一项的符号，同样可以把每一项按列指标排起来，于是定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$
$$= \sum (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

第二节　行列式的性质

行列式的计算是行列式的重点，对于低阶或者零元素很多的行列式可以用定义计算，但对于 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式来说用定义计算将非常繁琐或几乎不可能，因此我们有必要探究行列式的一些性质，以简化其运算，并且这些性质对行列式的理论研究也有重要意义.

一、行列式的性质

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行变为相应的列所得到的新行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明　因为 D 中元素 a_{ij} 位于 D^{T} 的第 j 行第 i 列，所以

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} = D^{\mathrm{T}}$$

性质 1.1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的，因此凡是有关行的性质，对列也同样成立.

性质 1.2　互换行列式中两行（列）元素的位置，行列式变号.

证明　设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_l \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} = -D_2 \end{aligned}$$

推论 如果行列式中有两行（列）元素相同，那么行列式为零.

证明 交换元素相同的两行（列），由性质 1.2 知 $D=-D$，即 $D=0$.

性质 1.3 行列式某行（列）元素的公因子可以提到行列式符号的外面，或者说以一数乘行列式的某行（列）的所有元素等于用这个数乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

证明 容易得出

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} = k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

即（1.9）式成立.

推论 1 如果行列式中某行（列）元素全为零，那么行列式为零.

推论 2 如果行列式中两行（列）元素成比例，那么行列式为零.

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$，因为第一列与第二列对应元素成比例，根据推论 2，可直接得到 $D=0$.

性质 1.4 如果某一行（列）的元素是两组数之和，那么这个行列式就等于两个行列式之和，而这两个行列式除这一行元素外全与原来行列式对应行的元素一样. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左端 $= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_i + c_i)_{j_i} \cdots a_{nj_n}$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}$$

性质 1.5 把行列式某一行（列）元素的 k 倍加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由性质 1.4 及推论 2 即可得.

为使行列式 D 的计算过程清晰醒目，特约定以下记号：

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ （$c_i \leftrightarrow c_j$）表示交换 D 的第 i 行（列）与第 j 行（列）；

(2) $kr_i(c_i)$ 表示用数 k 乘 D 的第 i 行（列）所有元素；

(3) r_j+kr_i （c_j+kc_i）表示把 D 的第 i 行（列）元素的 k 倍加到第 j 行（列）的对应元素上.

二、行列式的计算

计算行列式时，常用行列式的性质把它化为上（下）三角形行列式来计算.

例 1.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1,r_4+5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+4r_2,r_4-8r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+(5/4)r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

当今大部分用于计算一般行列式的计算机都是按上述方法设计的. 可以证明，利用行变换计算行列式需要进行大约 $2n^3/3$ 次算数运算. 任何一台现代微型计算机都可以在几分之一秒内计算出 50 阶行列式的值，运算量大约为 83 300 次.

计算行列式时要根据行列式的特点，灵活应用行列式的性质.

例 1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

解 注意到行列式中各行（列）4 个数之和都为 6，故可把第二、三，四行同时加到第一行，提出公因子6，然后各行减去第一行，化为上三角行列式来计算.

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1,r_3-r_1,r_4-r_1}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$

例 1.8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1&-a_1&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

解 根据行列式的特点，可将第一列加至第二列，然后将第二列加至第三列，再将第三列加至第四列，目的是使 D 中的零元素增多.

$$D=\begin{vmatrix}a_1&-a_1&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&2&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&&a_3&-a_3\\1&2&3&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_3}\begin{vmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&0\\1&2&3&4\end{vmatrix}=4a_1a_2a_3$$

例 1.9 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&&&\\\vdots&&\vdots&&O&\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$$