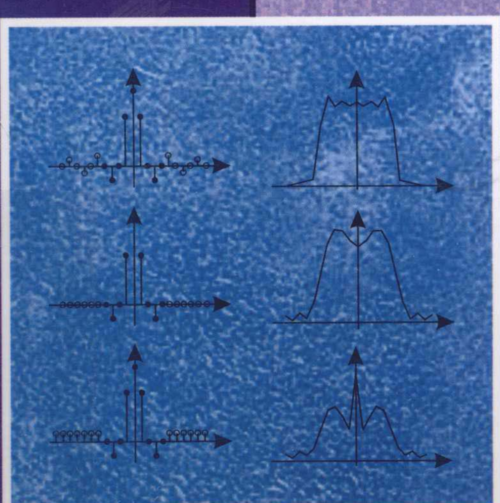
研究生系列教材

现代数字信号处理



王炳和　主编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

研究生系列教材

现代数字信号处理

王炳和　主编
刘建平　张一闻　朱维杰　参编

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍了现代数字信号处理的主要内容和方法，并对此领域内近十年来出现的新进展，如高阶谱、时频分析与小波变换等也进行了讨论。

全书共分10章，主要内容包括离散时间信号与系统分析基础、离散时间随机信号及模型、信号检测与估计、功率谱估计、维纳滤波与卡尔曼滤波、自适应滤波、阵列信号处理、同态滤波、高阶谱估计、时频分析与小波变换等。

本书可作为信息与通信工程专业以及其他相关专业硕士研究生的教材，也可供从事信号处理相关工作的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代数字信号处理/王炳和主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2011.11

研究生系列教材

ISBN 978-7-5606-2668-0

Ⅰ. ① 现… Ⅱ. ① 王… Ⅲ. ① 数字信号处理一研究生一教材 Ⅳ. ① TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第176078号

策　　划　陈婷

责任编辑　阎彬　陈婷

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2011年11月第1版　2011年11月第1次印刷

开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张18.5

字　　数　430千字

印　　数　1～2000册

定　　价　37.00元

ISBN 978-7-5606-2668-0/TN·0626

XDUP 2960001-1

前 言

数字信号处理是一门应用十分广泛的基础学科，它的应用已涉及通信与信息处理、生物医学、天气预报、地震监测、生态控制、经济分析等人类生产、生活的各个方面，它的理论基础正在不断丰富和完善，应用技术和方法的发展日新月异。许多高等院校已把数字信号处理中有关确定性信号分析的内容作为通信工程、电子科学技术、自动控制、机电一体化、经济管理等许多专业本科生的重要必修课程，而把随机数字信号处理的内容作为信息与通信工程、生物医学工程、电气工程等相关学科研究生的学位课程。

根据研究随机数字信号处理既要掌握经典部分的内容(如信号检测与估计、维纳滤波、卡尔曼滤波、自适应滤波、谱估计等)，又要熟悉最新的理论成就与新技术、新方法的要求，本书对随机数字信号处理的经典内容与近年来发展的新理论、新方法的部分内容进行优化整合，形成了 10 章的结构，这种内容的安排比较适合研究生学位课程的教学。

本书较全面地反映了随机数字信号处理领域的经典理论方法和最新进展。作为教材，本书注重基本概念、基本分析方法的介绍，注重各章节内容的逻辑性和整本书的系统性，也充分照顾到从本科到研究生知识的衔接。本书结构分明，内容由浅入深，后几章的内容可以根据课时及需要选用。

全书共分 10 章。第 1 章概述了离散时间信号与系统的基本概念，阐述了模拟信号数字化的基本理论与方法，同时介绍了离散信号的基本变换。本章内容回顾了本科阶段应掌握的数字信号处理的基础理论，起到了承上启下的作用。第 2 章讲述了离散随机信号及模型，主要阐述了平稳随机序列的概念、性质及统计描述，对随机序列通过线性时不变系统后具备的主要性质进行了分析。这些统计描述的方法、主要性质和基本信号模型，将成为后面各章的理论和方法基础。第 3 章讨论了信号检测与估计的几种典型方法，内容主要包括统计判决的常用准则——贝叶斯准则、最小错误概率准则、最大后验概率准则和奈曼－皮尔逊准则，以及匹配滤波器、最大似然估计和最小二乘估计方法。第 4 章从经典谱估计出发，对周期图法和 BT 法进行了分析，并在分析的基础上讨论了经典谱估计的改进方法，然后过渡到现代谱估计，对 AR 模型法、最大熵谱估计、最大似然谱估计、特征谱估计等内容进行了讨论，重点对 AR 模型方法进行了分析和论述。第 5 章介绍了从噪声中提取信号的一类最佳线性滤波方法——维纳滤波和卡尔曼滤波，内容包括维纳滤波和卡尔曼滤波的基本概念、原理、模型、设计方法和求解过程等。第 6 章介绍了自适应信号处理的基本理论和经典算法，主要包括自适应噪声对消、自适应模拟与逆模拟、自适应谱线增强与谱估计、自适应阵列处理与自适应波束形成，为读者掌握自适应信号处理的理论、方法和进一步研究自适应信号处理的新理论、新方法打下基础。第 7 章主要介绍阵列信号处理的方法及应用，在阐述了阵列信号模型、空间匹配滤波、最优波束形成和自适应波束形成的基础上，对于将阵列信号处理用于信号源测向的 MUSIC 法和旋转不变子空间算法进行了讨论，这些方法都是应用十分广泛的前沿技术。第 8 章介绍了一种非线性信号处理技术——同态滤

波，主要阐述了同态信号处理的基本概念、原理、方法和处理过程，并重点介绍了其中的时谱技术，最后介绍了解同态系统的信号处理方法及其应用。第 9 章主要介绍了高阶谱估计的概念、方法及应用，在介绍高阶矩、高阶累积量和高阶谱估计的基础上，重点对高阶谱估计、双谱估计的方法进行了阐述，最后还介绍了高阶谱在时延估计和 DOA 估计方面的应用。第 10 章主要讨论了用于非平稳信号分析的时频域分析理论与方法，包括短时傅立叶变换(STFT)、Wigner 分布(WD)和小波变换，这些理论和方法是非平稳信号处理领域的最新发展成果，已获得了广泛的应用。

本书由王炳和主编。其中，第 1、2、6、8 章由王炳和编写，第 3、5、7 章由朱维杰编写，第 4 章由刘建平编写，第 9、10 章由张一闻编写。全书由王炳和负责统稿。

樊养余教授对本书进行了详细的审阅，提出了许多宝贵的修改意见。在本书的编写过程中，还得到了黄建国教授、相敬林教授的支持和帮助。编者的许多学生也付出了辛勤的劳动。编者在这里对他们表示衷心的感谢！

本书可作为信息与通信工程及相关专业硕士研究生、博士研究生和高年级本科生的教材和参考书，也可供相关领域的科研工作者参考。

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2011 年 8 月于西安

目　　录

第 1 章　基础理论 …… 1
1.1　概述 …… 1
1.1.1　信号 …… 1
1.1.2　信号分类 …… 1
1.2　离散时间信号与系统 …… 2
1.2.1　离散时间信号 …… 2
1.2.2　典型的离散信号 …… 2
1.2.3　离散时间系统 …… 4
1.2.4　系统的输入—输出描述 …… 4
1.2.5　离散时间系统的结构图表示 …… 6
1.2.6　离散时间系统的分类 …… 7
1.2.7　离散时间系统的互连 …… 12
1.2.8　离散时间线性时不变系统的分析 …… 13
1.2.9　线性系统的分析方法 …… 13
1.2.10　离散时间信号分解为冲激信号 …… 14
1.2.11　离散时间系统的实现 …… 15
1.2.12　线性时不变系统的实现结构 …… 15
1.2.13　FIR 系统的递归和非递归实现 …… 19
1.3　信号抽样、量化和编码 …… 20
1.3.1　抽样 …… 20
1.3.2　理想抽样的抽样定理 …… 20
1.3.3　实际抽样 …… 24
1.3.4　正弦信号的抽样 …… 25
1.4　基本的信号变换方法 …… 26
1.4.1　Z 变换的定义与收敛域 …… 26
1.4.2　Z 反变换 …… 27
1.4.3　傅立叶变换的几种可能形式 …… 29
习题 …… 32

第 2 章　离散随机信号及信号模型 …… 35
2.1　离散随机过程的概念及性质 …… 35
2.2　时域离散随机信号的统计描述 …… 36
2.2.1　时域离散随机信号(随机序列)的概率描述 …… 36
2.2.2　随机序列的数字特征 …… 37
2.2.3　平稳随机序列及其数字特征 …… 38
2.2.4　平稳随机序列的功率谱 …… 39
2.2.5　随机序列的各态历经性 …… 40

2.2.6 随机信号的采样定理 …… 41
2.3 随机序列数字特征的估计 …… 41
2.3.1 估计准则 …… 41
2.3.2 均值的估计 …… 43
2.3.3 方差的估计 …… 44
2.3.4 随机序列自相关函数的估计 …… 45
2.4 线性系统对随机信号的响应 …… 48
2.4.1 线性时不变系统对随机输入的响应 …… 49
2.4.2 系统输入、输出的互相关函数与互谱密度 …… 51
2.5 时间序列信号模型 …… 53
2.5.1 三种时间序列模型 …… 53
2.5.2 三种时间序列信号模型的适应性 …… 54
2.5.3 自相关函数、功率谱与时间序列信号模型的关系 …… 56
习题 …… 59

第 3 章 信号检测与估计的基本概念 …… 62
3.1 引言 …… 62
3.2 几种统计判决准则 …… 62
3.2.1 贝叶斯准则 …… 62
3.2.2 最小错误概率准则 …… 66
3.2.3 最大后验概率准则 …… 68
3.2.4 奈曼一皮尔逊(Neyman - Pearson, NP)准则 …… 69
3.3 匹配滤波器 …… 70
3.4 广义匹配滤波器 …… 73
3.5 最大似然估计 …… 75
3.6 最小二乘估计 …… 78
3.6.1 最小二乘估计及其性能 …… 78
3.6.2 加权最小二乘估计 …… 79
习题 …… 80

第 4 章 功率谱估计 …… 82
4.1 经典功率谱估计 …… 82
4.1.1 BT 法 …… 82
4.1.2 周期图法 …… 84
4.1.3 周期图法与 BT 法的关系 …… 85
4.1.4 周期图的改进 …… 85
4.1.5 经典功率谱估计性能比较 …… 88
4.2 AR 模型功率谱估计的方法和性质 …… 90
4.2.1 AR 模型功率谱估计的引出 …… 90
4.2.2 AR 模型谱估计的性质 …… 93
4.2.3 AR 模型参数提取方法 …… 97
4.2.4 AR 模型阶次的选择 …… 103
4.3 最大熵谱估计方法 …… 105

4.4 最大似然谱估计 …… 109
4.5 互协方差估计与互谱估计 …… 111
4.6 特征分解法谱估计 …… 112
4.6.1 自相关阵的特征分解 …… 112
4.6.2 Pisarenko 谐波分解 …… 116
4.6.3 MUSIC 算法 …… 119
4.6.4 其他的特征矢量分析方法 …… 120
习题 …… 123

第 5 章 维纳滤波与卡尔曼滤波 …… 125
5.1 引言 …… 125
5.2 维纳滤波器的离散形式——时域解 …… 126
5.3 维纳滤波器的 z 域解 …… 129
5.3.1 非因果维纳滤波器 …… 131
5.3.2 因果维纳滤波器 …… 134
5.4 维纳预测器 …… 135
5.4.1 预测的可能性 …… 135
5.4.2 预测器的计算公式 …… 137
5.4.3 纯预测器(N 步) …… 139
5.4.4 维纳预测器的时域解——一步线性预测公式 …… 141
5.5 卡尔曼滤波 …… 143
5.6 卡尔曼滤波的方法与公式 …… 145
5.6.1 卡尔曼滤波的一步递推法模型 …… 145
5.6.2 卡尔曼滤波的递推公式 …… 146
习题 …… 148

第 6 章 自适应滤波——自适应信号处理技术与应用 …… 151
6.1 自适应噪声对消 …… 151
6.1.1 引言 …… 151
6.1.2 自适应噪声对消器的组成 …… 151
6.1.3 单信道噪声对消器 …… 153
6.1.4 用作陷波滤波器的自适应干扰对消器 …… 155
6.1.5 自适应噪声对消在医学中的应用 …… 157
6.1.6 消除声音信号的干扰 …… 159
6.1.7 分离周期信号和宽带信号 …… 159
6.1.8 自适应回声对消 …… 160
6.2 自适应模拟与逆模拟 …… 162
6.2.1 自适应模拟与逆模拟概述 …… 162
6.2.2 自适应均衡器 …… 163
6.3 自适应谱线增强与谱估计 …… 167
6.3.1 自适应谱线增强 …… 167
6.3.2 自适应谱估计 …… 169
6.4 自适应阵列处理与自适应波束形成 …… 170

6.4.1 阵列波束形成的基本原理 …… 171
6.4.2 自适应天线旁瓣对消 …… 173
习题 …… 174

第7章 阵列信号处理 …… 175
7.1 阵列信号模型 …… 175
7.2 空间匹配滤波 …… 178
7.3 最优波束形成 …… 180
7.4 自适应波束形成 …… 182
7.5 MUSIC 法测向 …… 185
7.6 最大似然法与子空间拟合方法测向 …… 187
7.7 旋转不变子空间算法测向 …… 188
习题 …… 191

第8章 同态滤波 …… 194
8.1 引言 …… 194
8.2 同态滤波的基本概念 …… 194
8.3 解相乘同态系统 …… 197
8.4 相乘同态系统的应用 …… 198
8.4.1 雷达对杂波干扰的恒虚警处理 …… 198
8.4.2 图像的同态处理 …… 200
8.5 解卷积同态系统 …… 203
8.5.1 规范系统 …… 203
8.5.2 特征系统 D_* 的数学表示 …… 203
8.5.3 线性系统 …… 204
8.5.4 逆特征系统 D_*^{-1} …… 205
8.5.5 举例分析 …… 206
8.6 时谱技术 …… 208
8.6.1 复时谱的定义 …… 208
8.6.2 功时谱和相时谱 …… 209
8.7 解卷积同态系统的应用 …… 209
8.7.1 解混响 …… 209
8.7.2 语音参量估值 …… 212
8.7.3 同态预测 …… 217
习题 …… 220

第9章 高阶谱估计 …… 222
9.1 高阶矩和高阶累积量 …… 222
9.1.1 高阶矩 …… 222
9.1.2 高阶累积量 …… 223
9.1.3 高斯过程的高阶累积量 …… 225
9.2 高阶谱 …… 226

9.2.1 高阶谱的定义 …… 227
9.2.2 高阶谱的性质 …… 228
9.2.3 确定性信号的高阶谱 …… 228
9.2.4 信号通过线性系统的高阶累积量 …… 230
9.3 双谱及其性质 …… 231
9.4 高阶谱估计方法 …… 234
9.4.1 非参数法高阶谱估计方法 …… 234
9.4.2 参数化高阶谱估计方法 …… 236
9.5 高阶谱估计的应用 …… 241
9.5.1 时延的估计 …… 241
9.5.2 DOA 估计 …… 245
习题 …… 248

第 10 章 时频分析与小波变换 …… 250
10.1 引言 …… 250
10.2 信号的时频域分析 …… 251
10.2.1 短时傅立叶变换(STFT) …… 251
10.2.2 Wigner 分布(WVD) …… 254
10.2.3 Wigner 分布的性质 …… 256
10.2.4 WVD 的交叉项 …… 259
10.2.5 平滑的 WVD 和解析信号的 WVD …… 261
10.3 小波变换 …… 263
10.3.1 连续小波变换的定义 …… 263
10.3.2 小波变换的特点 …… 264
10.3.3 几种小波基函数 …… 266
10.4 小波反变换及小波容许条件 …… 269
10.5 多分辨率分析 …… 271
10.6 离散小波变换和数字滤波器组 …… 273
10.7 WVD、STFT Spectrogram 和 Scalogram 的关系 …… 276
习题 …… 279

参考文献 …… 281

第1章

基础理论

本章主要介绍离散时间信号与系统的基本理论、数字信号的获得和基本信号变换方法。

1.1 概 述

1.1.1 信号

通信的目的主要是传递信息，信号则是信息的载体。信号定义为随着时间、空间或者其他自变量变化的物理量。虽然信号可以用很多方法表示，例如光信号、声信号、电信号、磁信号等，但是在所有情况下，信息都可以包含在以某种方式变化的一个图形中，各种信号可表示为一个或几个独立变量的函数。例如，语音信号可以表示为时间的函数，而图像可以表示为二维空间变量的亮度函数。各种信号可以互相转化，例如，磁带录音机首先将声音信号转化为电信号，然后再将电信号转化为磁信号并记录在磁带上；收音机则将磁信号转化为电信号，再将电信号转化为能够听到的声音信号。我们经常处理的信号一般是电信号。

1.1.2 信号分类

不同类型的信号其处理方法有很大差别，因此，有必要对信号进行具体分类。信号的分类方法很多，下面介绍常用的几种方法。

根据时间变量的取值方式不同，信号可以分为连续时间信号和离散时间信号。时间取值连续的为连续时间信号；不连续的为离散时间信号。

根据信号的周期性，可以分为周期信号和非周期信号。对于信号 $x(n)$，若有 $x(n)=x(n+kN)$，k 和 N 均为正整数，则称 $x(n)$为周期信号，周期为 N；否则，称 $x(n)$为非周期信号。当然，一个非周期信号也可以视为周期信号，其周期认为是无穷大的。

根据信号在任意时刻的取值是否能够精确确定，可以分为确定性信号和随机信号。顾名思义，随机信号在任意时刻的取值是随机的，不能给出精确的预测。

根据信号的能量和功率大小，可以将信号分为能量信号和功率信号。如果信号能量有限，则称为能量信号；如果信号功率有限，则称为功率信号。周期信号、准周期信号及随机信号，由于其时间是无限的，所以它们总是功率信号。一般认为在有限区间内存在的确定性信号有可能是能量信号。

根据信号变量的个数，可以将信号分为一维信号、二维信号和多通道信号。

1.2 离散时间信号与系统

上一小节我们已经介绍过信号的分类，本节主要介绍离散时间信号的基本内容和系统组成。将模拟信号转化为离散时间信号需要经过抽样等过程，这将在下一小节进行介绍。

1.2.1 离散时间信号

一个信号 $x(t)$，可以代表一个实际的物理信号，也可以是一个数学函数。例如，$x(t)=A\ \sin(2\pi ft)$既是正弦信号，又是正弦函数。因此，在信号处理中，信号与函数往往是通用的。随机信号与随机过程也是通用的。在函数中，如果 t 是时间轴上的连续变量，那么称 $x(t)$为连续时间信号，又称模拟信号。如果 t 仅在时间轴的离散点上取值，那么称其为离散时间信号，记为 $x(n)$。

$x(n)$在时间上是离散的，其幅度可以在某一个范围内连续取值。但是目前的信号处理装置是以计算机或专用信号处理芯片来实现的，它们都以有限的位数来表示幅度，因此，其幅度也要量化，即取离散值。在时间和幅度上都取离散值的信号称为数字信号。

1.2.2 典型的离散信号

在离散时间信号中，我们经常遇到一些典型的离散信号，下面对它们进行简要介绍。

(1) 单位抽样序列：

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1.2.1}$$

$\delta(n)$为单位抽样序列，该序列在离散信号和离散系统的分析与综合中有重要的作用，其地位犹如单位冲激信号 $\delta(t)$在连续时间系统中的地位。$\delta(n)$在数字信号处理中也起着重要的作用，它的许多性质与单位冲激信号相似，只是定义不同。$\delta(t)$又称 Kronecker 函数，是以积分为基础定义的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{1.2.2}$$

且 $t\neq 0$ 时，$\delta(t)=0$。$\delta(t)$表示在极短的时间内产生的巨大冲激，而 $\delta(n)$在 $n=0$ 时定义为 1。图 1.1(a)和(b)分别给出了 $\delta(n)$和 $\delta(t)$的波形。

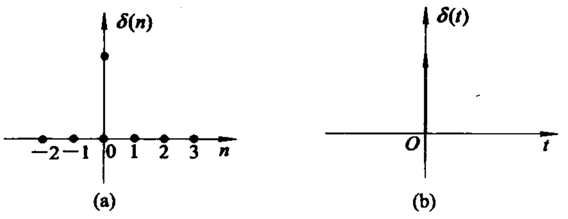


图 1.1 单位抽样信号和单位冲激信号

(2) 单位阶跃序列：

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1.2.3}$$

该序列只在时间轴的正半轴上取值，且恒为数值1。若序列 $y(n)=x(n)u(n)$，那么 $y(n)$ 的自变量 n 的取值就限定在 $n\geqslant 0$ 的右半轴上。

（3）正弦序列：

$$x(n)=A\sin(2\pi fnT_s+\varphi) \tag{1.2.4}$$

式中：f 是频率，单位是Hz。令 $\Omega=2\pi f$，则 Ω 的单位是rad/s，Ω 是相对连续信号 $x(t)$ 的连续角频率变量，当 f 由 $-\infty$ 至 ∞ 时，Ω 也由 $-\infty$ 至 ∞，令

$$\omega=2\pi fT_s=\frac{2\pi f}{f_s},\quad f_s=\frac{1}{T_s} \tag{1.2.5}$$

f_s 称为抽样频率。显然，当 f 从0增至 f_s 时，ω 从0增至 2π；当 f 从0减至 $-f_s$ 时，ω 从0减至 -2π；当 f 再增加或减少 f_s 的整数倍时，ω 重复 $0\sim\pm 2\pi$。ω 的单位是rad，我们称 ω 为圆频率或圆周频率，它是相对离散信号 $x(n)$ 的频率分量。于是式(1.2.4)的正弦序列可以表示为

$$x(n)=A\sin(\omega n+\varphi) \tag{1.2.6}$$

（4）复正弦序列：

$$x(n)=e^{j\omega n}=\cos(\omega n)+j\sin(\omega n) \tag{1.2.7}$$

上式称为欧拉恒等式。复正弦 $e^{j\omega n}$ 在数字信号处理中有着重要的应用，它不但是离散信号做傅立叶变换的基函数，同时也是离散系统的特征函数。

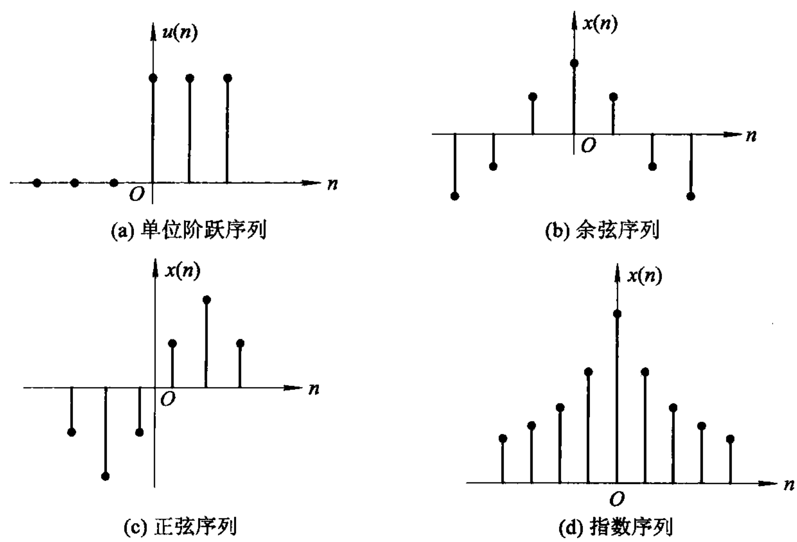
（5）指数序列：

$$x(n)=a^{|n|} \tag{1.2.8}$$

式中，a 为常数且 $|a|<1$。

如果 a 为复数，我们可以将 a 写成 $a=re^{j\omega_0}$ 的形式，式中 $r>0$，$\omega_0\neq 0$，π，这样，$x(n)$ 变成复值信号，即 $x(n)=r^{|n|}e^{j\omega_0|n|}$。若 $r<1$，则 $x(n)$ 为衰减的复正弦，其实部和虚部分别为衰减的实余弦和衰减的实正弦。

单位阶跃序列、余弦序列、正弦序列及指数序列如图1.2所示。



(a) 单位阶跃序列　(b) 余弦序列

(c) 正弦序列　(d) 指数序列

图 1.2　几种典型的离散序列

1.2.3 离散时间系统

在许多数字信号处理应用中，我们希望能设计出一个器件或算法，对离散时间信号执行某些规定的运算，这样的器件或算法称为离散时间系统。具体来说，离散时间系统就是一个器件或算法，它根据某种详细定义的规则，对称为输入或激励的离散时间信号进行运算，以产生称为系统输出或响应的另一个离散时间信号。通常，我们把系统视为对输入信号 $x(n)$进行的一种运算或一组运算，以产生输出信号 $y(n)$。我们说，输入信号 $x(n)$被系统转换成信号 $y(n)$，并将 $x(n)$和 $y(n)$的一般关系表示为

$$y(n) = \tau[x(n)] \tag{1.2.9}$$

其中，符号 τ 表示系统对 $x(n)$进行的转换(也称为运算)或处理，用以产生 $y(n)$。图 1.3 用图形化方法描述了式(1.2.9)的数学关系。

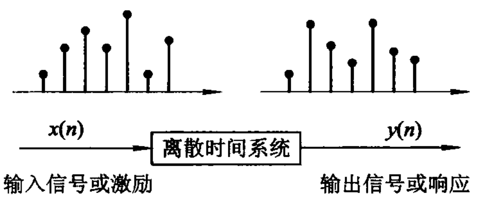


图 1.3 离散时间系统的结构图表示

还有很多方法用来描述系统的特性以及系统为产生 $y(n)$而对 $x(n)$所做的运算。在这一章，我们将从系统的输入一输出描述入手，介绍系统的时域特性。输入一输出描述关注系统的终端特性，而忽略了系统的详细内部结构或者实现形式。后面章节中，我们将会讲述离散时间系统的执行过程，并介绍系统实现的不同结构。

1.2.4 系统的输入一输出描述

离散时间系统的输入一输出描述由数学表达式或规则组成，它明确地定义了输入和输出信号的关系(输入一输出关系)。系统的准确内部结构是未知的或者被忽略，因此，与系统交互的唯一方法就是利用它的输入和输出终端(即对用户来说，系统假定为一个黑匣子)。为了反映这个观点，我们使用图 1.3 描述的图形表示，以及式(1.2.9)中的一般输入一输出关系式或者等价的符号：

$$x(n) \xrightarrow{\tau} y(n) \tag{1.2.10}$$

这仅仅说明 $y(n)$是系统 τ 对激励 $x(n)$的响应。下面的例子说明了几个不同的系统。

例 1.1 计算如下系统对输入信号的响应

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & -3 \leqslant n \leqslant 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(a) $y(n)=x(n)$(恒等系统)；

(b) $y(n)=x(n-1)$(单位延迟系统)；

(c) $y(n)=x(n+1)$(单位超前系统)；

(d) $y(n)=[x(n+1)+x(n)+x(n-1)]/3$(滑动平均滤波器)；

(e) $y(n)=\text{median}[x(n+1), x(n), x(n-1)]$(中值滤波器)；

(f) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)+\cdots$(累加器)。

解：首先，明确计算出输入信号的样本值

$$x(n)=\{\cdots,0,3,2,1,\underset{\uparrow}{0},1,2,3,0,\cdots\}$$

接下来，利用输入－输出关系计算每个系统的输出。

(a) 在这种情况下，输出和输入信号完全相同，这样的系统即是我们熟知的恒等系统。

(b) 这个系统仅仅对输入延迟了一个样本。因此它的输出为

$$x(n)=\{\cdots,0,3,2,\underset{\uparrow}{1},0,1,2,3,0,\cdots\}$$

(c) 在这种情况下，系统超前输入一个样本。例如，在 $n=0$ 时刻，输出值 $y(0)=x(1)$。系统对于给定输入的响应为

$$x(n)=\{\cdots,0,3,2,1,0,\underset{\uparrow}{1},2,3,0,\cdots\}$$

(d) 这个系统的输出在任何时刻都是当前样本值、最近的过去样本值以及最近的将来样本值的平均。例如，在 $n=0$ 时刻，输出为

$$y(n)=\frac{x(1)+x(0)+x(-1)}{3}=\frac{2}{3}$$

对每个 n 值重复计算，就得到输出信号

$$y(n)=\left\{\cdots,0,1,\frac{5}{3},2,1,\underset{\uparrow}{\frac{2}{3}},1,2,\frac{5}{3},1,0,\cdots\right\}$$

(e) 在时刻 n，这个系统选择三个输入样本 $x(n-1)$、$x(n)$ 和 $x(n+1)$ 中的中值作为它的输出。因此，该系统对输入信号 $x(n)$ 的响应为

$$y(n)=\{\cdots,0,2,2,1,\underset{\uparrow}{1},1,2,2,0,0,0,\cdots\}$$

(f) 这个系统基本上是一个累加器，用来计算在当前时刻以前的所有输入值的连续和，该系统对给定输入的响应为

$$y(n)=\{\cdots,0,3,5,6,\underset{\uparrow}{6},7,9,12,0,\cdots\}$$

我们注意到，例 1.1 中所考虑的几个系统，在时刻 $n=n_0$ 时的输出不仅依赖于 $n=n_0$ 时刻的输入值，而且还依赖于 $n=n_0$ 前、后作用到系统的输入值。例如，例题中所考虑的累加器，我们看到在 $n=n_0$ 时刻的输出不仅依赖于 $n=n_0$ 时刻的输入，而且还依赖于 $x(n)$ 在 $n=n_0-1$，$n=n_0-2$ 以及其后的值。通过简单的代数运算，累加器的输入－输出关系可以写为

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x(k)+x(n)\\&=y(n-1)+x(n)\end{aligned}\tag{1.2.11}$$

它证明了术语“累加”的含义，即系统通过将当前的输入值与先前的输出值相加(累加)，计算出当前的输出值。

再进一步观察这个看上去非常简单的系统，还可以得到其他一些有趣的结论。假如，给定 $n\geqslant n_0$ 时的输入信号 $x(n)$，我们希望计算该系统在 $n\geqslant n_0$ 时的输出。对于 $n=n_0$，n_0+1 …，由式(1.2.11)得出

$$y(n_0)=y(n_0-1)+x(n_0)$$

$$y(n_0+1)=y(n_0)+x(n_0+1)$$

以此类推。现在，我们在计算 $y(n_0)$ 时遇到了问题，这是因为 $y(n_0)$ 的计算依赖于 $y(n_0-1)$。然而

$$y(n_0-1)=\sum_{k=-\infty}^{n_0-1}x(k)$$

即，$y(n_0-1)$“概括”了在 n_0 时刻以前已经作用到系统的所有输入对系统所产生的影响。所以，当 $n\geqslant n_0$ 时，系统对作用于 $n=n_0$ 时刻的输入 $x(n)$ 的响应，结合了该输入以及先前已经作用到系统的所有输入的影响结果。因此，$n\geqslant n_0$ 时的 $y(n)$，并不是由 $n\geqslant n_0$ 时的输入 $x(n)$ 唯一确定的。

求解 $n\geqslant n_0$ 时的 $y(n)$ 需要的额外信息是初始条件 $y(n_0-1)$，这个值概括了先前输入到系统的所有值的影响。因此，初始条件 $y(n_0-1)$ 和 $n\geqslant n_0$ 时的输入序列 $x(n)$ 一起唯一确定了 $n\geqslant n_0$ 时的输出序列 $y(n)$。

如果累加器在 n_0 之前没有激励，那么初始条件 $y(n_0-1)=0$。在这种情况下，我们说该系统为初始弛豫。因为 $y(n_0-1)=0$，所以输出序列 $y(n)$ 只依赖于 $n\geqslant n_0$ 时的输入序列 $x(n)$。

习惯上，假设每个系统在 $n=-\infty$ 时都是弛豫的。在这种情况下，如果输入 $x(n)$ 作用于 $n=-\infty$，那么对应的输出 $y(n)$ 由给定的输入唯一确定。

1.2.5 离散时间系统的结构图表示

现在我们介绍一种非常有用的离散时间系统的结构图表示。为此，我们需要定义一些可以相互连接以构建复杂系统的基本运算单元。

(1) 加法器。图 1.4 所示的系统(加法器)用于执行两个信号序列相加，以构成另一个(和)序列，这个序列表示为 $y(n)$。注意，执行加法并不需要存储任何一个序列。换言之，加法运算无记忆。

(2) 常数乘法器。图 1.5 描述了这个运算，它的表达式仅仅是对输入 $x(n)$ 增加了一个缩放因子。注意，该运算同样也是无记忆的。

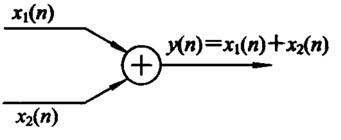


图 1.4 加法器的图形表示

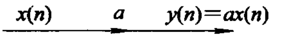


图 1.5 常数乘法器的图形表示

(3) 信号乘法器。图 1.6 示例了两个信号序列相乘构成另一个(积)序列的情况，这个序列在图中表示为 $y(n)$。和先前两种情况一样，可以把乘法运算视为无记忆的。

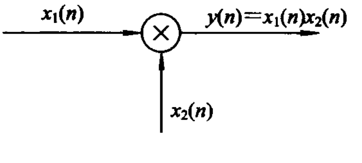


图 1.6 信号乘法器的图形表示

(4) 单位延迟元件。单位延迟是一个特殊的系统，它仅仅将通过它的信号延迟一个样本。图 1.7 画出了这样的系统。如果输入信号是 $x(n)$，则输出为 $x(n-1)$。实际上，样本 $x(n-1)$ 在 $n-1$ 时刻就存储在存储器中，在 n 时刻再从存储器中取出，这样就构成了

$$y(n) = x(n-1)$$

因此，这个基本运算单元是需要存储器的。我们用符号 z^{-1} 来表示单位延迟，这在以后讨论 Z 变换时，将经常看到。

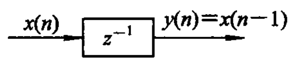


图 1.7 单位延迟元件的图形表示

(5) 单位超前元件。与单位延迟元件不同，单位超前元件将输入 $x(n)$ 在时间上向前移动一个样本以生成 $x(n+1)$。图 1.8 表示了这个运算，其中运算符 z 用来表示单位超前。我们注意到，任何这样的超前元件在实时系统中是物理上不可实现的，这是因为无法观察信号的未来。另一方面，如果把信号存储在计算机的存储器内，那么就可以在任意时间调出任何样本。在这样的非实时应用中，就有可能在时间上超前信号 $x(n)$。

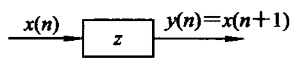


图 1.8 单位超前元件的图形表示

例 1.2 利用上面的基本运算单元，画出离散时间系统的结构图表示，已知它的输入一输出关系为

$$y(n) = 0.25y(n-1) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$$

其中，$x(n)$ 是输入，$y(n)$ 是输出。

解：根据系统的输入一输出关系式，通过将 $x(n)$ 和 $x(n-1)$ 乘以 0.5，将两个乘积相加，然后再加上先前的输出 $y(n-1)$ 的 0.25 倍，就得到了输出 $y(n)$。图 1.9 画出了该系统的两种实现结构图。

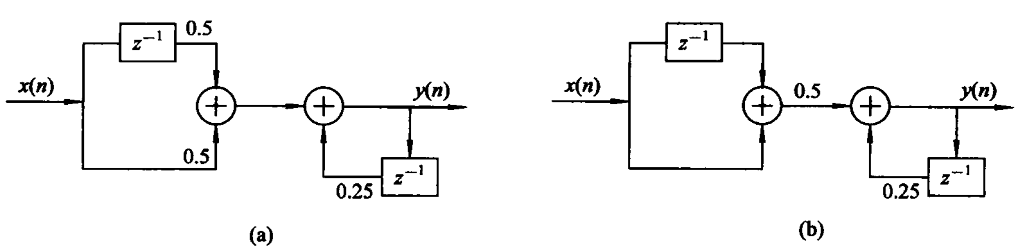


图 1.9 系统 $y(n)=0.25y(n-1)+0.5x(n)+0.5x(n-1)$ 的实现结构图

注意，如果从输入一输出关系看，那么我们并不关心系统是如何实现的。另一方面，如果采用系统的内部描述，那么我们就可以准确地了解系统的基本运算单元是如何配置的。对于这样的实现形式，我们可以看到，如果系统中存在的所有延迟器在 $n=n_0$ 时的值为零，那么这个系统在 $n=n_0$ 时就是弛豫的。

1.2.6 离散时间系统的分类

在分析以及设计系统时，需要根据系统满足的特性对它们进行分类。实际上，在这一