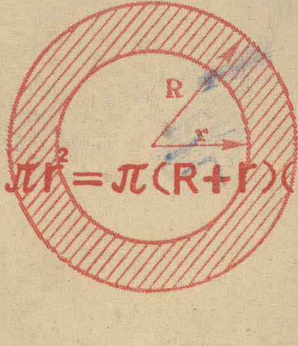
初級中学課本

代数

DAISHU

第二册



$$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R+r)(R-r)$$

人民教育出版社

初級中学課本代数第二冊

目　录

第四章　一元一次不等式

4.1 不等式　我們来看下面的一些式子:

$$a+1<a+5, \qquad \frac{1}{a^2}>0,$$

$$2x<6, \qquad x-3>5,$$

$$3+4>5, \qquad -2<-1.$$

这些式子，都是用不等号連結两个代数式所成的式子，叫做**不等式**. 不等号左边的代数式，叫做不等式的左边；不等号右边的代数式，叫做不等式的右边.

4.2 不等式的性质　不等式有下面一些性质.

(1) 不等式的两边都加上（或者都减去）同一个数，所得的不等式仍能成立.

例如，不等式

$$6>2$$

的两边都加上 4，得

$$10>6,$$

仍能成立.

又如，不等式

$$-8<-2$$

的两边都减去 5（就是加上 -5），得

$$-13<-7,$$

仍能成立.

一般地說，如果 $a>b$，那么

$$a+c>b+c,$$

$$a-c>b-c.$$

(2) 不等式的两边都乘以（或者都除以）同一个正数，所得的不等式仍能成立.

例如，不等式

$$6>2$$

的两边都乘以 3，得

$$18>6,$$

仍能成立.

又如，不等式

$$-8<-2$$

的两边都除以 2 $\left(\text{就是乘以}\frac{1}{2}\right)$，得

$$-4<-1,$$

仍能成立.

一般地說，如果 $a>b$，$c>0$，那么

$$ac>bc,$$

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

(3) 不等式的两边都乘以（或者都除以）同一个负数，并且把不等号改成相反的不等号，所得的不等式仍能

成立.

例如,不等式

$$6>2$$

的两边都乘以 -3,并且把不等号改成相反的不等号,得

$$-18<-6,$$

仍能成立.

又如,不等式

$$-8<-2$$

的两边都除以 $-2\left(就是乘以-\frac{1}{2}\right)$,并且把不等号改成相反的不等号,得

$$4>1,$$

仍能成立.

一般地說,如果 $a>b$, $c<0$,那么

$$ac<bc,$$

$$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

练　习

1. 怎样比較两个有理数的大小?

2. 在下列各題的横綫上,应当用什么不等号,并且說明根据的是不等式的哪一个性质:

(1) $\because\ 3+4>5,\qquad \therefore\ 3\_\_\_\_5-4;$

(2) $\because\ 4<7,\qquad \therefore\ -40\_\_\_\_-70;$

(3) $\because\ -1>-2,\qquad \therefore\ -\frac{1}{3}\_\_\_\_-\frac{2}{3};$

(4) $\because\ a^2+1>0,\qquad \therefore\ (a+1)^2$____$2a$;

(5) 如果 $-a<-5$，　那么 a____5;

(6) 如果 $a+2>3$，　那么 a____1;

(7) 如果 $3a<6$，　那么 a____2;

(8) 如果 $-\dfrac{a}{4}<-\dfrac{b}{2}$，那么 a____$2b$.

4.3 絕对不等式和条件不等式　我們来看下面的一些不等式:

$$a+1<a+5, \qquad (1) \qquad \frac{1}{a^2}>0, \qquad (2)$$

$$2x<6, \qquad (3) \qquad x-3>5. \qquad (4)$$

在不等式(1)里，不論 a 等于任何数值，左边的值总是小于右边的值($\because 1<5$, $\therefore a+1<a+5$). 在不等式(2)里，当 $a=0$ 时，左边沒有意义(因为不能用零做除数)，因此，a 的数值不容許等于 0，但是除了 $a=0$，不論 a 等于其他任何数值，a^2 的值总是正的，因此，左边的值总是大于右边的值$\left(\because 1>0, a^2>0,\ \therefore \frac{1}{a^2}>\frac{0}{a^2}\right.$，就是$\left.\frac{1}{a^2}>0\right)$. 这就是說，在前两个不等式里，不論用任何数值(只要是容許的)代替其中的字母，不等式总是成立的.

一个不等式，不論用任何数值(只要是容許的)代替其中的字母，它都是成立的，这样的不等式叫做**絕对不等式**.

只含有数字的不等式，例如

$$3+4>5,\quad -2<-1$$

等，也是絕对不等式.

上面的(3)、(4)两个不等式，并不是用任何数值代替其中的字母都能成立的. 它們都不是絕对不等式. 在不等式(3)里，必須用小于 3 的值代替 x，不等式才能成立. 在不等式(4)里，必須用大于 8 的值代替 x，不等式才能成立. 不等式(3)可以看作是“什么数的 2 倍小于 6”. 不等式(4)可以看作是“什么数减去 3 大于 5”. 这两个不等式里的字母 x 都是未知数. 含有未知数的不等式叫做**条件不等式**. 不等式(3)和(4)都是条件不等式. 条件不等式以后就簡称不等式. 能够使不等式成立的未知数的值，叫做**不等式的解**. 例如，小于 3 的任何数值都是不等式 $2x<6$ 的解，大于 8 的任何数值都是不等式 $x-3>5$ 的解.

求不等式的所有的解的过程，叫做**解不等式**. 以后我們所說的不等式的解指的都是不等式所有的解.

不等式所有的解，一般是一个或几个范圍里的数值，它可以在数軸上明显地表示出来. 例如:

1. 如果不等式的解是 $x<3$，就可以用数軸上表示 3 的点的左边部分（圓圈表示不包括 3 这一点）来表示(图 4.1).

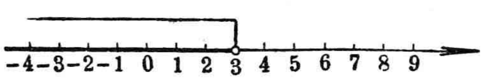


图 4.1

2. 如果不等式的解是 $x \geqslant -2$（符号 $\geqslant$ 讀作大于或等于），就可以用数軸上表示 -2 的点和它的右边部分（黑点表示包括 -2 这一点）来表示（图 4.2）。

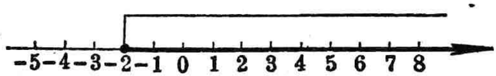


图 4.2

3. 如果不等式的解是 $2 < x \leqslant 6$（符号 $\leqslant$ 讀作小于或等于），就可以用数軸上表示 2 和 6 两点之間的部分（包括 6 而不包括 2）来表示（图 4.3）；如果不等式的解是 $x > 4$ 或 $x < -4$，就可以用数軸上表示 4 的点的右边部分以及表示 -4 的点的左边部分来表示（图 4.4）。

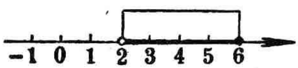


图 4.3

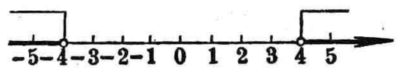


图 4.4

练　习

1. 什么叫做絕对不等式？什么叫做条件不等式？在下列不等式中，哪些是絕对不等式，哪些不是？

(1) $x-1>0$;　　(2) $x^2+1>0$;

(3) $|x|+1>0$;　　(4) $a+2<7$;

(5) $a-2<a$;　　(6) $5a<10$.

2. 根据下面的数量关系列出不等式：

(1) x 的 2 倍减去 3 大于 1；

(2) x 的 $\frac{1}{3}$ 与 4 的和是正数；

(3) 20 减去 x 的 5 倍的差是負数；

(4) 7与x的和的一半不大于10;

(5) 7与x的一半的和不小于1;

(6) x的立方不是正数.

3. 什么叫做不等式的解? 在数軸上表示下列不等式的解:

(1) $x>5$;　(2) $x\geqslant 0$;　(3) $x\geqslant -4$;

(4) $x\leqslant 3$;　(5) $x<0$;　(6) $x\leqslant -2\frac{1}{2}$;

(7) $-2\leqslant x<-1$;　(8) $-1\leqslant x\leqslant 2$;

(9) $x>6$ 或 $x<-1$;　(10) $x<-4$ 或 $x\geqslant 0$.

4. 利用数軸来說明方程 $2x=6$ 的解与不等式 $2x<6$ 的解的区別.

4.4 同解不等式 我們来看下面的两个不等式:

$$2x<6, \tag{1}$$

$$5x<15. \tag{2}$$

在不等式(1)里,只有用小于3的值代替x,不等式才能成立;在不等式(2)里,也只有用小于3的值代替x,不等式才能成立. 所以这两个不等式的解都是$x<3$,它們的解完全相同.

两个不等式,如果第一个不等式的解都是第二个不等式的解,并且第二个不等式的解也都是第一个不等式的解,也就是說,如果它們的解完全相同,那么这两个不等式叫做**同解不等式**. 例如,不等式(1)和(2)是同解不等式. 又如,不等式 $x-3>5$ 和不等式 $x>8$ 的解都是 $x>8$,所以不等式 $x-3>5$ 和 $x>8$ 也是同解不等式. 但

是如果一个不等式的解是 $x<3$，而另一个不等式的解是 $x\leqslant3$ 或者是 $1<x<3$，这两个不等式就不是同解不等式.

练　习

1. 什么叫做同解不等式？$2x>6$ 和 $x>3$ 是不是同解不等式？

2. (1) 一个不等式的解是 $x>3$，另一个不等式的解是 $x>2$，这两个不等式是不是同解不等式？利用数軸来說明.

(2) 一个不等式的解是 $x>1$，另一个不等式的解是 $x<-1$，利用数軸来判别这两个不等式是不是同解不等式.

关于不等式的同解，有下面一些性质:

(1)不等式的两边都加上（或者都减去）同一个数或者同一个整式，所得的不等式和原不等式是同解不等式.

例如，在不等式

$$x-3>5 \tag{1}$$

的两边都加上 3，得到新的不等式

$$(x-3)+3>5+3. \tag{2}$$

根据不等式的性质(1)可以知道，能够使不等式(1)成立的 x 的值，一定也能使不等式(2)成立. 这就是說，不等式(1)的解一定也是不等式(2)的解.

反过来，把不等式(2)的两边都减去 3，就得到不等式(1). 根据不等式的性质(1)又可以知道，能够使不等式(2)成立的 x 的值，一定也能使不等式(1)成立. 这就

是說，不等式(2)的解一定也是不等式(1)的解．因此，不等式(1)和(2)的解完全相同，它們是同解不等式．

根据不等式同解的性质(1)可以知道：**不等式中的任何一項，都可以把它的符号改变以后，从不等式的一边移到另一边**．这个过程也叫做移項．

例 解不等式 $4x-8>3x+5$，并且把它的解在数軸上表示出来．

解 移項，得

$$4x-3x>5+8.$$

合并同类項，得

$$x>13.$$

这个解可以用数軸上表示 13 的点的右边部分来表示(图 4.5)．

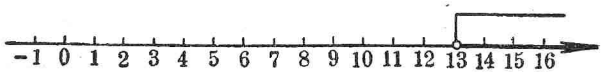


图 4.5

为了檢驗解不等式的过程中計算有沒有錯誤，我們可以取 x 的任何一个大于 13 的值代入原不等式，看它能不能成立，再用 13 代替原不等式中的 x，看它左右两边是不是相等．

练 习

1. 說出不等式同解的性质(1)，并且根据这个性质說明下列

每对不等式是同解不等式:

(1) $x+3>2$ 和 $x>-1$; (2) $x-3>2$ 和 $x>5$;

(3) $3x>2x+1$ 和 $x>1$; (4) $-3x+1>-4x$ 和 $x>-1$.

2. 解下列不等式,并且把它們的解在数軸上表示出来:

(1) $5x-3>4x$; (2) $2x+1<x+2$;

(3) $8x+5>7x+5$; (4) $x+4<0$;

(5) $3x-6\geqslant 2x+1$; (6) $7x\leqslant 6x-3$.

(2)不等式的两边都乘以(或者都除以)同一个正数,所得的不等式和原不等式是同解不等式.

(3)不等式的两边都乘以(或者都除以)同一个負数,并且把不等号改成相反的不等号,所得的不等式和原不等式是同解不等式.

上面这两个性质,可以分别用不等式的性质(2)和(3)来說明.

在应用不等式同解的性质(2)和(3)时,要特别注意乘数(或者除数)是正数还是負数.

应当注意,不能用0去乘或者除不等式的两边.因为用0去乘不等式的两边,两边都变成0,不等式就不能成立;用0去除不等式的两边,两边的代数式都失去了意义.

例 解下列不等式,并且把它們的解在数軸上表示出来:

(1) $3x<6$; (2) $-3x<6$; (3) $-\frac{x}{9}\geqslant-\frac{2}{7}$.

解 (1) $3x<6$.

两边都除以 3, 得

$$x<2.$$

这个解在数轴上表示如下(图 4.6):

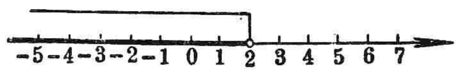


图 4.6

(2) $-3x<6$.

两边都除以 -3, 并且把不等号改成相反的不等号, 得

$$x>-2.$$

这个解在数轴上表示如下(图 4.7):

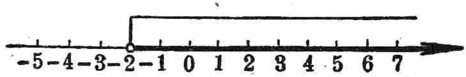


图 4.7

(3) $-\frac{x}{9}\geqslant-\frac{2}{7}$.

两边都乘以 -9, 并且把不等号改成相反的不等号, 得

$$x\leqslant2\frac{4}{7}.$$

这个解在数轴上表示如下(图 4.8):

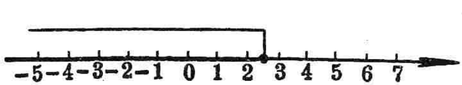


图 4.8

练 习

1. 說出不等式同解的性质(2)和(3)，指出这两个性质的不同点，并且根据这两个性质說明下列每对不等式是同解不等式：

(1) $\frac{x}{3}>-2$ 和 $x>-6$;

(2) $4x<-12$ 和 $x<-3$;

(3) $-4x<12$ 和 $x>-3$;

(4) $-x\leqslant 0$ 和 $x\geqslant 0$.

2. 解下列不等式，并且把它們的解在数軸上表示出来：

(1) $2x>-10$;　　(2) $-3x<-18$;

(3) $\frac{x}{4}<1$;　　(4) $\frac{x}{-4}<1$;

(5) $-\frac{1}{2}x\leqslant -2$;　　(6) $\frac{x}{7}>0$;

(7) $-2x<0$;　　(8) $-x\geqslant -6$.

习题二十三

1. 用不等号連結下列两式：

(1) $3-5$ 和 $7-11$;　　(2) $|6-7|$ 和 $|6|-|7|$;

(3) $(-3)^2$ 和 $(-3)^3$;　　(4) $(-2)^3$ 和 $(-3)^3$;

(5) $(a-b)^2$ 和 0; $(a\neq b)$

(6) $-a^2$ 和 0.01.

2. 按照下列条件，作出仍旧能够成立的不等式：

(1) $7<8$，两边都加上 9;　　(2) $7<8$，两边都加上 -9;

(3) $5>2$，两边都乘以 3;　　(4) $5>2$，两边都乘以 -3;

(5) $-18<16$，两边都除以 2;

(6) $-18<16$，两边都除以 -2;

(7) $-4<-3$，两边都加上 -1;

(8) $-4<-3$, 两边都减去 -1;

(9) $-4<-3$, 两边都乘以 -1;

(10) $-4<-3$, 两边都除以 -1.

3. 已知 $a<b$, 用不等号連結下列两式:

(1) $a+5$ 和 $b+5$; (2) $a-b$ 和 0;

(3) $-5a$ 和 $-5b$; (4) $\frac{a}{-3}$ 和 $\frac{b}{-3}$;

(5) $-a$ 和 $-b$; (6) $-\frac{2}{3}a$ 和 $-\frac{2}{3}b$;

(7) $2a$ 和 $a+b$; (8) $a\times10^n$ 和 $b\times10^n$.

4. 說明下列各式是絕对不等式的理由:

(1) $2x-3>2(x-3)$; (2) $-(a+4)<-(a+2)$.

5. 在数軸上, 表示出下列不等式里 x 的点所在的范圍:

(1) $x>4$; (2) $x<2$;

(3) $x\geqslant-2$; (4) $x\leqslant5\frac{1}{2}$;

(5) $1.5<x<3.5$; (6) $-1\frac{1}{3}<x\leqslant0$;

(7) $-2\frac{1}{2}\leqslant x<3\frac{2}{3}$; (8) $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant0.5$;

(9) $x\geqslant3$ 或 $x<-2$; (10) $x\leqslant5$ 或 $x\geqslant6$.

6. 說明:

(1) 能够使不等式 $x>5$ 成立的 x 的值是不是只有整数 6、7、8、……?

(2) 能够使不等式 $4<x<6$ 成立的 x 的值是不是只有整数 5?

7. 說明:

(1) 怎样知道不等式 $x-3>1$ 的解是 $x>4$;

(2) 怎样知道不等式 $x+5<9$ 的解是 $x<4$;

(3) 怎样知道不等式 $2x>x+3$ 的解是 $x>3$;

(4) 怎样知道不等式 $-2x<-3x+7$ 的解是 $x<7$.

8. 根据不等式同解的性质(1)解下列不等式, 并且在数軸上表示不等式的解:

(1) $x+8>10.5$;　　(2) $y-3\frac{2}{3}<3\frac{1}{3}$;

(3) $-y<4-2y$;　　(4) $-4x>-5x-6$;

(5) $10x+\frac{1}{2}>9x-\frac{1}{2}$;　　(6) $1-2y<5-3y$.

9. 下列每对不等式是同解不等式嗎?

(1) $7x>63$ 和 $x>9$;

(2) $-5x>1$ 和 $x>-\frac{1}{5}$;

(3) $\frac{x}{2}<-5$ 和 $x<-10$;

(4) $\frac{x}{-3}<-4$ 和 $x>12$.

10. 根据不等式同解的性质(2)和(3)解下列不等式, 并且在数軸上表示不等式的解:

(1) $\frac{x}{6}<-\frac{2}{3}$;　　(2) $-4x>-10$;

(3) $-\frac{4}{5}x<2$;　　(4) $-\frac{3}{4}x>0$;

(5) $-x\geqslant-5$;　　(6) $1<-x$.

4.5 一元一次不等式和它的解法　对于未知数来說, 不等式两边的代数式都是整式的不等式, 叫做**整式不等式**. 含有一个未知数, 并且未知数的次数只有一次的整式不等式, 叫做**一元一次不等式**. 例如, 不等式 $2x-3$

$>x+2$, $3(1-y)>2(y-6)$, $x-\frac{3x-8}{2}\leqslant\frac{2(10-x)}{7}-1$ 等都是一元一次不等式. 不等式 $x+y>5$ 含有两个未知数x和y, 不等式 $x^2<4$的未知数 x 的次数不是1, 不等式$\frac{2}{x}>3$对于未知数 x 来說, $\frac{2}{x}$不是整式, 它們都不是一元一次不等式.

解一元一次不等式的步驟, 和解一元一次方程相类似, 但是要特别注意乘以或者除以負数时, 要把不等号改成相反的不等号. 解一元一次不等式的一般步驟是:

1. 去分母(乘数是負数时, 要把不等号改成相反的不等号);

2. 去括号;

3. 移項;

4. 合并同类項;

5. 不等式的两边都除以未知数的系数(系数是負数时, 要把不等号改成相反的不等号).

例 1 解不等式:

$$3(1-y)>2(y-6).$$

解 去括号, 得

$$3-3y>2y-12.$$

移項, 得